Axiomas y Propiedades de medidas de pobreza

Prof. S. P. Sinha
Instituto de Estadística Aplicada y Computación
U.L.A., Mérida.
Abril de 2004

Introducción:

Existe pobreza en una sociedad cuando hay persona quienes no pueden alcanzar un nivel de bienestar material considerado como mínimo según los estándares que caracterizan a esa sociedad. Tampoco no existe un método único para medir el nivel de pobreza en una sociedad. A continuación se describen los siguientes cuatro tipos de enfoques que se utilizan para medir pobreza.

Enfoque 1: Línea de Pobreza: (z):

Un Individuo pobre es aquella persona quién proviene de un hogar con ingreso per cápita por debajo de la línea de pobreza.

z = CBA + CNA

CBA = Canasta Básica Alimentaria ; CNA = Canasta No Alimentaria ;

Sea

δ = Gastos Total del Hogar/Gastos en alimentos.

En muchos estudios realizados en América Latina, se considera el valor de $\delta = 2$.

z = (δ).(CBA)

Enfoque 2: Necesidades Básicas Insatisfechas: (NBI)

Un hogar se considera pobre si sufre de una cualquiera de las siguientes NBI.

(i): Hacinamiento: Más de 3 personas por cuarto.

(ii): Vivienda con construcción inadecuada.

(iii): Servicios sanitarios no adecuados en la vivienda.

(iv): Sin enseñanza formal entre niños de 6-12 años de edad.

(v): Baja capacidad para generar ingreso por parte del Jefe del hogar.

Enfoque 3: Combinado:

(i): Pobres Estructurales: Hogares clasificados como pobres por NBI y por LP.

(ii): Pobres Recientes: Hogares clasificados como pobres por LP y no por NBI.

(iii): Pobres Inerciales: Hogares clasificados como pobres por NBI y no por LP.

Enfoque 4: Multidimensional:

Construye una medida de pobreza considerando en forma simultánea 2 o más variables.

El enfoque de Necesidades Básicas Insatisfechas: (NBI) carece de una base conceptual y en consecuencia han surgido muchas críticas sobre esta metodología. En cambio, el método de línea de pobreza ha sido ampliamente investigado y posee un desarrollo conceptual y axiomático. El enfoque multidimensional es un método relativamente nuevo y se puede considerar coma una extensión multivariante del método de línea de pobreza.

Objetivo:

Exponer conceptos relacionados con axiomas y propiedades de diferentes Índices de pobreza que utilizan el método de línea de pobreza. Se hará una construcción de ejemplos y contra-ejemplos que permitirán la verificación de propiedades y axiomas definidos por Sen(1976) y Kakwani(1980).

Definición de una Medida de Pobreza:

Sea $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ un vector de ingresos con valores no negativos Sea $z > 0$, el valor de la línea de pobreza. Un Índice de pobreza $P(X, z)$ es una función real valuada cuyo valor indica el nivel de pobreza asociada al vector de ingresos X correspondiente a la línea de pobreza z.

Algunos ejemplos de Índices de Pobreza:

Existen muchos índices de pobreza, como por ejemplo: índices: Foster-Greer-Thorbecke (FGT), Watts, Sen, Sen-Shorrocks-Thon, Clark-Hemming-Ulph, Blackorby-Donaldson, Chakravarty, Takayama, Hamada-Takayama, Kakwani, y otros. Comentaremos solamente algunos de ellos que se explican a continuación:

Índice de Pobreza FGT:

[Propuesto por Foster, Greer y Thorbecke(1984)]:
Sea

$$P_\alpha = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z - x_i}{z}\right)^{\alpha} I(x_i < z) \;\; ; \;\; \alpha \geq 0;$$

el índice de pobreza FGT, donde α es un parámetro que especifica la sensibilidad del índice, z = línea de pobreza, n = Número total de hogares (o individuos), x_i es el ingreso del hogar (o del individuo) i-ésimo. $I(x_i < z)$ es una función indicadora que tiene el valor igual a 1 sí la expresión $(x_i < z)$ es cierta y 0 en el caso contrario.

Sea $q = \sum_{i=1}^{n} I(x_i < z)$, entonces q es el número de hogares (o individuos) pobres.

Nota: α es un indicador de la aversión a la pobreza y en consecuencia mientras más alto sea el valor de α mayor será la ponderación que se asigna a los más pobres en el cómputo del valor del índice P_α .

Sean:

$H = \frac{q}{n}$ = proporción de hogares (o individuos) pobres.

H se conoce con el nombre del *Índice de Recuento* (o *Incidencia*).

$z - x_i$ = Brecha de pobreza del i-ésimo hogar (o individuo).

$\frac{z - x_i}{z}$ = cociente de brecha de pobreza del i-ésimo hogar (o individuo).

Se puede verificar que $P_{(\alpha = 0)} = H$.

$P_{(\alpha = 1)}$ se llama Índice de brecha de Pobreza.

$P_{(\alpha = 2)}$ se llama Índice de severidad de Pobreza (Brecha de pobreza cuadrada).

Nota:
Kakwani(1993) define el índice de pobreza FGT para una población infinita por:

$$\int_0^z \left(\frac{z-x}{z}\right)^{\alpha} g(x)dx$$

, donde g(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria ingreso X.

Índice de Watts:

$$W = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Log}(z/x_i)/n).I(x_i < z)$$

en que n, z, x_i , $I(x_i < z)$ ya han sido definidos anteriormente.

En el caso continuo, el Índice de Watts se define como:

$$\int_0^z -\mathrm{Log}(x/z)\, g(x)dx$$

, donde g(x) es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria ingreso X.

Índice de Sen:

$P_S = P_0 G_p + P_1(1- G_p)$

Índice de Sen-Shorrocks-Thon:

$P_{SST} = P_0 P_1 (1 + G_p)$

donde P_0 es el Índice de recuento, P_1 es es el Índice de brecha de pobreza y G_p es el coeficiente de Gini entre los pobres.

Propiedades deseables que debe poseer un Índice de pobreza:

Un Índice de Pobreza debe satisfacer las siguientes propiedades:
(1): P(X, z) es una función creciente en z. es decir, P(x; z') > P(x; z) para todo z' > z . obsérvese que un valor mayor de una medida de pobreza indica que existe más pobreza en la sociedad.
Esta propiedad implica que el valor de P(X, z) aumenta cuando crece el valor del la Línea de pobreza z.

(2): *Simetría:* P(X, z) = P(Y, z), sí X se obtiene al permutar los elemento de Y.
Por lo tanto una medida de pobreza no se altera si se reordenan los elementos del vector de ingresos

(3): *Invariante bajo replicación:* P(X, z) = P(Y, z), sí X se obtiene por la replicación de los elementos de Y. Es decir, que $X = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ \vdots \\ Y \end{pmatrix}$

(4): *Foco:* P(X, z) = P(Y, z), sí X se obtiene de Y debido a un incremento en el ingreso de un individuo no pobre. Esto implica que P(X, z) es independiente de los ingresos de los ricos. Por lo tanto un cambio en el ingreso de una o más personas ricas no cambia el nivel de pobreza.

(5) *Continuidad:* P(X, z) es una función conjuntamente continua en ambas variables X y z.

La continuidad de la función P(X, z) significa que si se produce un cambio muy pequeño en el ingreso de una persona pobre, entonces se produce una variación también pequeña del nivel de pobreza correspondiente.

Axiomas de Pobreza:

Sen (1976):

A1: *Axioma de Monotonicidad:*

Dadas otras cosas, una reducción en el ingreso de una persona debajo de la línea de pobreza debe incrementar la medida de pobreza.

A2: *Axioma de transferencia*:

Dadas otras cosas, una transferencia pura de ingreso de una persona debajo de la línea de pobreza a otra persona más rica debe incrementar la medida de pobreza.

Kakwani (1980):

La definición y aplicación de axiomas A3 y A4 requieren que el vector de ingreso $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ sea ordenado en el orden creciente.

A3: *Sensibilidad a Monotonicidad:*

Sí $(dP)_i$ representa el aumento en la medida de pobreza debido a una reducción pequeña del ingreso del pobre i-ésimo, entonces $(dP)_i > (dP)_j$ sí $j > i$.

A4: *Sensibilidad a Transferencia*:

Sí una transferencia del ingreso ocurre desde el pobre i-ésimo con ingreso x_i al otro pobre con ingreso $(x_i + h)$, entonces para un $h > 0$ dado, la cantidad del aumento en la medida de pobreza disminuye cuando i se incrementa.

Foster y Shorrocks (1991):

A5: Axioma de descomponibilidad.

Una medida de pobreza P(.) se llama descomponible sí para todo $K \geq 2$ y para cualquier vector de ingreso X^k, $k = 1, \ldots, K$,

$$P(X, z) = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \, P(X^k, z), \text{ donde } \quad X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^K \end{pmatrix}; \quad \omega_k = n(X^k)/n(X), \quad \text{en que } n(X^k) \text{ y } n(X)$$

indican números de elementos de X^k y X respectivamente.

Cuando se cumple este axioma entonces es posible expresar la medida de pobreza total como una media ponderada de las medidas de pobrezas de los distintos subgrupos.

A6: ***Consistencia por Subgrupos: Foster y Shorrocks (1991):***

Sean X, X^*, Y, Y^* vectores de ingresos con números de elementos iguales a $n(X)$, $n(X^*)$, $n(Y)$, $n(Y^*)$ respectivamente. Entonces un Índice de pobreza se llama consistente por subgrupos, sí para todo $z > 0$, se cumplen las siguientes condiciones:

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, z\right) > P\left(\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix}, z\right), \text{ cuando}$$

(i) $P(X, z) > P(X^*, z)$, y (ii) $P(Y, z) = P(Y^*, z)$

Sí una medida de pobreza satisface este axioma entonces el aumento de pobreza de un grupo de personas implicará un aumento en el valor de la pobreza total.

Perfiles de Pobreza:

La metodología de Perfiles de Pobreza permite establecer una comparación de la medida de pobreza entre distintos subgrupos de una sociedad.

La construcción de Perfiles de Pobreza se puede hacer usando una medida de pobreza que sea descomponible y aditivamente separable. De esta manera la pobreza agregada puede ser expresada como una media ponderada de medidas de pobrezas de los distintos subgrupos como por ejemplo: diferentes regiones en un país, diferentes niveles de educación, tipos de empleos etc. Los índices de pobrezas FGT se usan con preferencia para construir los perfiles de pobrezas.

Nota:

Los Axioma A1-A4 consideran los efectos que se producen sobre el valor de una medida de pobreza cuando:

A1: Existe una reducción en el ingreso de una persona pobre.

A2: Ocurre una transferencia del ingreso desde una persona pobre a otra persona más rica.

A3: Reducciones en ingresos de 2 pobres distintos.
A4: Transferencia desde un pobre a otro pobre con mayor ingreso.

Descripción de datos utilizados para verificar el cumplimiento de axiomas:

Inicial: Reducción del ingreso del individuo número 2.
Red_4: Reducción del ingreso del individuo número 4.
T_2_5: Transferencia del ingreso del individuo número 2 al individuo número 5.
T_4_5: Transferencia del ingreso del individuo número 4 al individuo número 5.
T_4_7: Transferencia del ingreso del individuo número 4 al individuo número 7.
T_6_7: Transferencia del ingreso del individuo número 6 al individuo número 7.
T_2_5M: Transferencia del ingreso del individuo número 2 al individuo número 5.
T_3_6: Transferencia del ingreso del individuo número 3 al individuo número 6.

Línea de Pobreza = 8

Aplicar el Axioma:
(1): A1 sobre Red_2 y Red_4 separadamente.
(2): A2 sobre las primeras 4 transferencias separadamente.
(3): A3 sobre el par (Red_2 , Red_4).
(4): A4 sobre el par (T_2_5M , T_3_6).

Usando los ejemplos y contra ejemplos que se presenta en una tabla a continuación, se podrá verificar que:

(1): El Índice de Watts satisface los 4 axiomas.
(3): P_α para $\alpha > 0$ satisfacen axioma 1.
(4): P_α para $\alpha > 1$ satisfacen axioma 1 , 2 y 3.
(5) P_α para $\alpha > 2$ satisfacen los 4 axiomas.
(6): P_α para $\alpha \geq 0$ satisfacen axioma 5 y 6.

El lector debe consultar Foster, Greer y Thorbecke(1984) para conocer la demostración sobre el cumplimiento de los axiomas. A continuación se demostrará que el Índice de recuento no satisface el Axioma de monotonicidad.

Proposición: $P_{(\alpha = 0)} = \frac{q}{n}$, no satisface el Axioma de monotonicidad, donde q = Número de hogares (o individuos) pobres, y, n = Número total de hogares(o individuos).

Demostración: Sean $x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_q \leq x_{q+1} \leq \ldots x_n$ los elementos ordenados del vector del ingreso X . Sea m < q, entonces x_m es el ingreso de un hogar pobre. Sea el ingreso x_m del hogar m-ésimo reducido por una cantidad igual a t y esto implica que el nuevo ingreso del hogar m-ésimo es igual a x_m - t, donde t > 0.
Luego observamos que $m < q \Rightarrow x_m < x_q \Rightarrow x_m - t < x_q \Rightarrow$ el número de hogares pobres es todavía igual a q $\Rightarrow P_{(\alpha = 0)} = \frac{q}{n} \Rightarrow$ la reducción del ingreso del hogar

pobre m-ésimo no aumenta el valor de $P_{(\alpha = 0)}$,   y por lo tanto no se satisface el Axioma de monotonicidad

Bibliografía:

Foster, James; Greer, Joel, Thorbecke, Erik: (1984): Notes and comments: A class of decomposable poverty measures. Econometrica, 52 , 761-765.

Foster, James and Shorrocks, A. F. (1991): Subgroup consistent poverty indices. Econometrica, 59, 687-79.

Kakwani, N. (1980): On a class of poverty measures. Econometrica, 48: 431-436.

Sen A. K. (1976): Poverty: an ordinal approach to measurement. Econometrica, 44: 219-31.

Apéndice

(A): Ejemplos y contra ejemplos:

		Verificación del cumplimiento de axiomas A1 - A4:							
Individuo #	Inicial	Red_2	Red_4	T_2_5	T_4_5	T_4_7	T_6_7	T_2_5M	T_3_6
(1)	1	1	1	1	1	1	1	1,0	1,0
(2)	2	1	2	1	2	2	2	1,5	2,0
(3)	3	3	3	3	3	3	3	3,0	2,5
(4)	4	4	3	4	3	3	4	4,0	4,0
(5)	6	6	6	7	7	6	6	6,5	6,0
(6)	7	7	7	7	7	7	6	7,0	7,5
(7)	9	9	9	9	9	10	10	9,0	9,0
(8)	10	10	10	10	10	10	10	10,0	10,0
(9)	11	11	11	11	11	11	11	11,0	11,0
(10)	12	12	12	12	12	12	12	12,0	12,0
Indices									
Incidencia	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
FGT(α =1)	0,3125	0,3250	0,3250	0,3125	0,3125	0,3250	0,3250	0,3125	0,3125
FGT(α =2)	0,2047	0,2250	0,2188	0,2203	0,2141	0,2187	0,2094	0,2117	0,2117
FGT(α =3)	0,1479	0,1727	0,1598	0,1713	0,1584	0,1598	0,1492	0,1584	0,1558
Watts	0,5561	0,6254	0,5849	0,6099	0,5694	0,5849	0,5715	0,5769	0,5674
			LINEA DE POBREZA = 8						

Índice de Pobreza Multidimensional:

El siguiente índice de pobreza multidimensional es una generalización bivariante del índice FGT y fue propuesto por Bourgugnon, F. y S. R. Chakravarty en 1999:

$$P_{\alpha\beta b}(\mathbf{X}\,;\,\mathbf{z}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[I(x_{i1} < z_1)\left(1 - \frac{x_{i1}}{z_1}\right)^{\beta} + b^{\frac{\beta}{\alpha}}\, I(x_{i2} < z_2)\left(1 - \frac{x_{i2}}{z_2}\right)^{\beta}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

donde $\mathbf{z} = (z_1\ z_2)'$ es el vector de las líneas de pobreza correspondiente a 2 variables. n = número de hogares. $\mathbf{X} = (x_{ij})$, es una matriz de $n \times 2$ tal que x_{ij} es igual al valor de la variable j - ésima en el hogar i-ésimo. $x_{ij} \in \mathbb{R}^{+}$; $j = 1, 2$. α, β, y, b son constantes conocidas tal que $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $b \geq 0$. $I(\ )$ es una función indicadora que toma valores uno o cero según $x_{ij} < z_j$, *o* $x_{ij} \geq z_j$; $j = 1, 2$.

El hogar i-ésimo se considera pobre si satisface cualesquiera de las siguientes 2 condiciones:

(i): $x_{i1} < z_1$; o (ii): $x_{i2} < z_2$; $i = 1, \ldots, n$.

Bibliografía:

Bourgugnon, F. y S. R. Chakravarty (1999): A Family of Multidimensional Poverty Measures, en D.J. Slottje (ed.), Advances in Econometrics, Income Distribution and Methodology of Science", Essays in Honor of C. Dagum, Springer-Verlag, London.