

Resoluções de Algumas Questões – Prova da AMAN 1997

1. (AMAN- 1997, q01cod_3) Considere o triângulo ABC de área S, baricentro G e medianas CM e BN. A área do quadrilátero AMGN é igual a

- () $\frac{S}{2}$
 () $\frac{2S}{3}$
 () $\frac{S}{3}$
 () $\frac{S}{4}$
 () $\frac{3S}{4}$

Resolução:

- 1) os triângulos FGC, CGN, AGN são ??
 congruentes e a área de cada um

$$A_1 = \frac{S/2}{3} = \frac{S}{6}$$

- 2) os triângulos AGN, AGM e BGM
 são congruentes e sua área

$$A_2 = \frac{S/2}{3} = \frac{S}{6}$$

- 3) A área do quadrilátero AMGN é

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2S}{6} = \frac{S}{3}$$

2. (AMAN- 1997, q02cod_2) Se $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{n^2 \cdot [(n-1)! + n!]}$ então a_{1997} é

- () $\frac{1997}{1996}$
 () $\frac{1}{1998}$
 () $1998!$
 () 1997
 () 1

Resolução:

$$a_n = \frac{(n+1)! - n!}{n^2 \cdot [(n-1)! + n!]} = \frac{1998! - 1997!}{1997^2 \cdot [1996! + 1997!]} = \frac{1998 \cdot 1997! - 1997!}{1997 \cdot 1997 \cdot [1996! + 1997 \cdot 1996!]}$$

$$a_{1997} = \frac{1997 \cdot 1997!}{1997 \cdot 1997 \cdot [1998 \cdot 1996!]} = \frac{1997!}{1997 \cdot [1998 \cdot 1996!]} = \frac{1997 \cdot 1996!}{1997 \cdot [1998 \cdot 1996!]}$$

$$a_{1997} = \frac{1}{1998}$$

3. (AMAN- 1997, q03cod_1) A relação entre os coeficientes **b** e **c** para que a equação $x^3 + bx + c = 0$ possua duas raízes iguais é:

☐ $4b^3 + 27c^2 = 0$

☐ $b^3 + c^2 = 0$

☐ $2b^3 + 3c^2 = 0$

☐ $4b^3 + 9c^2 = 0$

☐ $3b = c$

Resolução:

Chamando y, y e z as três raízes da equação.

$$\text{Usando as relações de Girard } \begin{cases} y + y + z = 0 \rightarrow z = -2y \rightarrow z^2 = 4.y^2 \\ y.y + y.z + y.z = b \rightarrow y^2 + 2yz = b \\ y.y.z = -c \rightarrow y^2.z = -c \end{cases}$$

$$y^2 + 2y(-2y) = b \rightarrow -3y^2 = b \rightarrow y^2 = -\frac{b}{3}$$

$$z^2 = 4.y^2 \rightarrow \frac{9c^2}{b^2} = -4.\frac{b}{3} \rightarrow 27c^2 = -4b^2 \rightarrow 27c^2 + 4b^3 = 0$$

4. (AMAN- 1997, q04cod_1) A função $f(x) = x.e^{1/x}$ é crescente no intervalo

☐ $(1, +\infty)$

☐ $(-\infty, 1)$

☐ $(-\infty, 0)$

☐ $(0, +\infty)$

☐ $(0, 1)$

Resolução:

O crescimento ou decrescimento de uma função se faz pelo estudo do sinal da primeira derivada:

$$f(x) = x.e^{1/x} \rightarrow f'(x) = 1.e^{1/x} + x.(-x^{-2})e^{1/x} = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right), \text{ como } e^{1/x} \text{ é sempre um}$$

número positivo, vamos estudar o sinal do termo $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

1) $f(x)$ é crescente no intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2) $f(x)$ é decrescente no intervalo $]0, 1[$

5. (AMAN- 1997, q05cod_1) Seja P o ponto da circunferência

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$ mais próximo da origem. A soma das coordenadas de P é

$$(\) \frac{18}{5}$$

$$(\) \frac{7}{2}$$

$$(\) \frac{9}{2}$$

$$(\) \frac{28}{5}$$

$$(\) \frac{13}{2}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0 \\ x^2 - 2.3x + 9 + y^2 - 2.4y + 16 + 24 - 9 - 16 = 0, \\ (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \end{cases}$$

nessa última equação temos o centro da circunferência C(3,4) e o raio r=1.

O coeficiente da reta pelo que passa pelo ponto P e pelo centro da circunferência é

$$tgq = \frac{4}{3}$$

$$1) \text{ Equação da reta que passa pelo ponto P: } y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{4}{3}x.$$

2) P=?, é a intersecção da reta que passa pelo ponto P e pela circunferência

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 - 6x - 8 \cdot \frac{4}{3}x + 24 = 0$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{50}{3}x + 24 = 0$$

$$x = \frac{18}{5} \text{ ou } x = \frac{12}{5}$$

tomando-se $x = \frac{12}{5}$ que é a abscissa mais próxima da origem, encontramos o valor de y:

$$y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{5}$$

3) Coordenadas do ponto $P = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$, somando-se essas coordenadas

$$soma = \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{28}{5}$$

6. (AMAN- 1997, q06cod_4) Considere a reta tangente ao gráfico da função $y=f(x)$ no ponto $(1, f(1))$. Sejam $f(1)=3$ e $f'(1)=2$. Se r intercepta o gráfico da função $g(x)=x^2-3x+7$ nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) então os valores de y_1 e y_2 são respectivamente

a) 1 e 2

b) 2 e 3

c) 3 e 5

- d) 5 e 7
e) 7 e 9

Resolução

Equação da reta tangente: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x + 1$

Como essa reta intercepta a função $g(x)$, temos: $2x + 1 = x^2 - 3x + 7$ à $x = 2$ ou $x = 3$

Os pontos de intersecção: $\begin{cases} y_1 = g(2) = 5 \\ y_2 = g(3) = 7 \end{cases}$

7. (AMAN- 1997, q07cod_1)

Considere os conjuntos

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \frac{2x-3}{5x-2} \geq 0 \right\}$ e $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0 \right\}$. O conjunto $A \cap B$ é

Resolução

$$\frac{2x-3}{5x-2} \geq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ x - \frac{2}{5} \end{pmatrix} \geq 0 \text{ à } A = \left(-\infty, \frac{2}{5} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0 \right\} \rightarrow (x-1)(x-4) < 0 \rightarrow B = (1, 4)$$

Fazendo a intersecção $A \cap B = \left[\frac{3}{2}, 4 \right[$

8. AMAN- 1997, q08cod_3)

O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen} x^2}$ é

- () -1
() 0
() 1
() 2
() $+\infty$

Resolução:

$$1. \text{ Usando artifício: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen} x}{x} \cdot \frac{\text{sen} x}{x}}{\frac{\text{sen} x^2}{x^2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

$$2. \text{ Pela regra de L'Hospital: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \text{sen} x \cdot \cos x}{2 \cdot \text{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$$

Obs.: Lembrando que o limite fundamental: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

9. AMAN- 1997, q09cod_5) O valor de $\int_0^{p/8} \tan^2(2x) dx = ?$ é

() $\frac{1}{3}$

() $\frac{1}{6}$

() $-1 + \sqrt{2}$

() $\frac{8\sqrt{2} - 3p}{24}$

() $\frac{4-p}{8}$

Resolução: da trigonometria: $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$$\begin{aligned} \int_0^{p/8} \tan^2(2x) dx &= \int_0^{p/8} (-1 + \sec^2(2x)) dx = \int_0^{p/8} (-1) dx + \frac{1}{2} \int_0^{p/8} (\sec^2(2x)) (2 dx) \\ &= \left(-x + \frac{1}{2} \tan(2x) \right) \Big|_0^{p/8} = -\frac{p}{8} + \frac{1}{2} \tan 2 \cdot \frac{p}{8} = -\frac{p}{8} + \frac{1}{2} = \frac{4-p}{8} \end{aligned}$$

10. (AMAN- 1997, q13cod_2) Seja x a solução da equação

$$\log_7 \sqrt{x+1} + \log_7 \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \log_7 3. \text{ O valor de } \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} + \log_x 128 \text{ é}$$

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

e) 0

Resolução

Condições de existência

$$\log_7 \sqrt{x+1} + \log_7 \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \log_7 3 \quad \text{à} \quad x+1 > 0 \text{ e } x-1 > 0 \rightarrow x > 1$$

$$\text{Resolvendo a equação } \log_7 \sqrt{x+1} + \log_7 \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \log_7 3$$

$$\log_7 \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \cdot \log_7 3 \rightarrow \log_7 \sqrt{(x+1)(x-1)} = \log_7 3^{1/2}$$

$$\rightarrow \log_7 \sqrt{(x^2 - 1)} = \log_7 3^{1/2} \rightarrow x^2 - 1 = 3 \rightarrow (x-2)(x+2) = 0$$

$x = 2$ ou $x = -2$ Como só $x=2$ pertence às condições de existência (domínio), agora

$$\text{podemos encontrar o valor da expressão pedida: } \log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{64} + \log_x 128$$

$$\text{à } \frac{\log_2 64^{-1}}{\log_2 2\sqrt{2}} + \log_2 128 = \frac{\log_2 2^{-6}}{\log_2 \sqrt{2^3}} + \log_2 2^7 = \frac{-6}{3/2} + 7 = \frac{-12}{3} + 7 = -4 + 7 = 3$$

11. (AMAN- 1997, q14cod_2) Sendo **i** a unidade imaginária dos números complexos, o valor do número natural **n** tal que $(2.i)^2 + (1+i)^{2n} = 64.i$ é

- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 9

Resolução:

$$\begin{aligned} (2.i)^2 + (1+i)^{2n} &= 64.i \rightarrow (2.i)^2 + [(1+i)^2]^n = 64.i \rightarrow \\ (2.i)^2 + [(1+2i-1)]^n &= 64.i \rightarrow (2.i)^2 + (2i)^n = 64.i \rightarrow \\ 2.(2i)^n &= 64.i \rightarrow (2i)^n = 32.i \rightarrow (2i)^n = 2^5.i \rightarrow n = 5 \end{aligned}$$

12. (AMAN- 1997, q19cod2) O valor de “**a**” para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ a, & \text{se } x = 3 \end{cases}, \text{ seja contínua em } x=3, \text{ é}$$

- () $\sqrt{3}$
- () $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- () $\frac{1}{3}$
- () $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- () $\frac{1}{6}$

Resolução:

Calculando-se o limite da função

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

13. (AMAN- 1997, q21cod_3) A derivada da função $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$

É:

$$(\) \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$(\) \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(\) \frac{-1}{x^2 + 1}$$

$$(\) \frac{-1}{x^2(x^2 + 1)}$$

$$(\) \frac{1}{x}$$

Resolução:

A derivada da função arco tangente: $y = \arctg u(x)$ à $y' = \frac{u'}{1+u^2}$

A derivada da função $f(x) = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ à $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^{-2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$ à

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

14. (AMAN- 1997, q23cos_3) Podemos observar que o gráfico de $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

- a) cresce em $] - \infty, -2[\cup] 0, 1[$
- b) tem (0, -1) como ponto de inflexão.
- c) Tem assíntota horizontal em $y=1$ e assíntota vertical em $x=1$ e $x=-1$.
- d) Tem concavidade voltada para cima para qualquer $x \in] -1, 1[$
- e) Está definido para todo x real.

Resolução letra c)

c) O domínio dessa função $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, são $x \neq 1$ ou $x \neq -1$, que são as duas assíntotas verticais.

Assíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, logo a assíntota horizontal é $y=1$.

Respondendo as outras

- a) Crescimento ou decrescimento (máximo ou mínimo): estudo do sinal da primeira derivada

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \rightarrow y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$y' > 0$ em $(-\infty, 0)$ e $y' < 0$ em $(0, +\infty)$ logo a função $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ tem máximo quando

$$x=0 \text{ à } y_{\max} = f(0) = \frac{0^2 + 1}{0^2 - 1} = -1$$

- 1) de menos infinito até 0, a função é crescente sinal +, com assíntota vertical em $x = -1$.
- 2) De 0 até mais infinito a função é decrescente sinal -, com assíntota vertical em $x = 1$.

b) Ponto de inflexão, estudo do sinal da segunda derivada

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4(x^2 - 1)(x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-4(x^2 - 1)(-3x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} \\ = \frac{4(x^2 - 1)(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$y'' > 0$ logo essa curva tem a concavidade voltada para cima para todo $x \neq 1$ ou $x \neq -1$

c) Resolvida

d) Respondida no b)

e) Domínio $x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$