Sistemas Lineares – Discussão

Regra de Cramer 1
Discussão de Sistemas Lineares 3
Exercícios 3
Respostas: 12

Regra de Cramer

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cramer.html

1. Vamos resolver o sistema a seguir pela regra de Cramer: $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$.

Resolvendo:

Faça $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$ e $D_x = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} = ...$ $D_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} =$ → após calcularmos D_x e D_y

podemos calcular x e y, assim: $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4+80}{19}$ $y = \frac{D_y}{D} = \frac{32+6}{19}$ Resposta: $S = \{(4,2)\}$

2. Determine x e y pela Regra de Cramer: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Solução: x=$\frac{D_x}{D}$, y=$\frac{D_y}{D}$. Fazendo D=$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, isso indica que esse sistema linear é possível e determinado, SPD. Calculando D_x=$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = ________ e

D_y=$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ =____________ . Logo x=.... e y= .... Resposta: S={(4, 2)}

3. Resolva o sistema linear pela regra de Cramer $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 = 13$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{3+36}{13} = \frac{39}{13} = 3; \quad y = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{13} = \frac{27-1}{13} = 2$$

Resp: S={(3, 2)}

4. Resolva o sistema linear pela regra de *Cramer* $\begin{cases} -2x + 5y = -20 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 15 - 11$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -20 & 5 \\ 19 & -2 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{40-95}{-11} = \frac{-55}{-11} \quad ; y = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -20 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-2.\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{-11} =$$

$$y == \frac{-2.\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 19 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-2(19-30)}{-11} = \frac{-2.(-11)}{-11}$$

$\text{Resp}: S = \{(5, -2)\}$

5. Resolva o sistema linear pela regra de Cramer $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = -3 \\ 4x + y + z = 2 \end{cases}$

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6-4-6-12+2+6}{-12} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-6+32-2-12-8-4}{-12}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{8-36+4-32+6-6}{-12}$$

6. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{6-3-6-3+3+6}{-5} = \frac{3}{-5}$$

$$y=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2&3&1\\1&6&1\\1&3&2\end{vmatrix}}{-5}=\frac{24+3+3-6-6-6}{-5}$$

$$z=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\2&-1&6\\1&-1&3\end{vmatrix}}{-5}=\frac{-3+6-6+3+6-6}{-5}$$

Discussão de Sistemas Lineares

Sistemas Lineares → $\begin{cases}Possível\begin{cases}\text{Determinado -- > SPD -- > uma única solução}\\\text{Indeterminado -- > SPI -- > infinitas soluções}\end{cases}\\\text{Impossível -- > SI -- > nenhuma solução}\end{cases}$

Dado um sistema linear de **n** equações e **n** incógnitas: $\begin{cases}a_{11}x_l+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_l+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\a_{31}x_l+a_{32}x_2+...+a_{3n}x_n=b3\\...\\a_{n1}x_l+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$, e

seja A= $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&...&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&...&a_{3n}\\...&...&...&...&...\\a_{n1}&a_{n2}&a_{n3}&...&a_{nn}\end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes. **O que vale:**

$\begin{cases}\text{Se }\det(\mathrm{A})\neq 0\text{, o sistema é possível e determinado}\\\text{Se }\det(\mathrm{A})=0\text{, o sistema não é determinado; logo, será possível e indeterminado}\\\text{ou impossível }(RPM\text{ 47 page 44})\end{cases}$

(RPM, Revista do Professor de Matemática)

Exercícios

7. Determine o valor de m para que o sistema linear $\begin{cases}2x-my=6\\3x+2y=9\end{cases}$, seja possível e indeterminado.

Resolução:

$$SPI\rightarrow\ \Delta=0\rightarrow\begin{vmatrix}2&-m\\3&2\end{vmatrix}=4+3.m=0\rightarrow m=-\frac{4}{3}\leftarrow \text{Re}\,sp$$

Discutindo o sistema linear:

a) Se $m=-\frac{4}{3}$, o sistema linear será possível e indeterminado.

$$\begin{matrix} 2 & \frac{4}{3} & 6 \\ 3 & 2 & 9 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=l_2-l_1} \begin{matrix} 2 & \frac{4}{3} & 6 \\ 1 & \frac{2}{3} & 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 2 & \frac{4}{3} & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x+\frac{2}{3}y=3 \rightarrow x=3-\frac{2}{3}y \\ S=\left\{\left(\frac{9-2y}{3},\ y\right)\right\} \end{matrix}$$

a) Se $m \neq -\frac{4}{3}$, o sistema linear possível e determinado.

$$\begin{matrix} 2 & -m & 6 \\ 3 & 2 & 9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 & -m & 6 \\ 1 & m+2 & 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & m+2 & 3 \\ 2 & -m & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & m+2 & 3 \\ 0 & -3m-4 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ y=\frac{0}{-3m-4}=0 \end{matrix} \rightarrow S=\{(3,0)\}$$

8. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 4x-my=5 \\ 8x+3y=10 \end{cases}$, seja possível e indeterminado.

Resolução: SPI → $\Delta = 0$

$$\begin{cases} 4x-my=5 \\ 8x+3y=10 \end{cases} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 12+8m=0 \rightarrow m=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2} \leftarrow \text{Re}\,sp$$

Discutindo o sistema linear:

a) Se $m=-\frac{3}{2}$, esse sistema linear será possível e indeterminado:

$\frac{4}{8}=\frac{3/2}{3}=\frac{5}{10}$.

$$\begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} & 5 \\ 8 & 3 & 10 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=l_2-2.l_1} \begin{matrix} 4 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow 4x+\frac{3}{2}y=5 \rightarrow x=\frac{5-\frac{3}{2}y}{4}=\frac{10-3y}{8} \rightarrow S=\left\{\left(\frac{10-3y}{8},y\right)\right\}$$

b) Se $m \neq -\frac{3}{2}$ →
$$\begin{matrix} 4 & -m & 5 \\ 8 & 3 & 10 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=l_2-2.l_1} \begin{matrix} 4 & -m & 5 \\ 0 & 3+2m & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4x-m.0=5 \rightarrow x=\frac{5}{4} \\ (3+2m).y=0 \rightarrow y=\frac{0}{3+2m} \end{matrix}$$

$$S=\left\{\left(\frac{5}{4};0\right)\right\}$$

9. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 3x+my=7 \end{cases}$, seja possível e determinado.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 2m+9 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{9}{2} \leftarrow \text{Re}\,sp.$$

Encontrando a solução:

$$\begin{matrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & m & 7 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=l_2-2.l_1} \begin{matrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & m+3 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{l_1=l_2} \begin{matrix} 1 & m+3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=l_2-2.l_1}$$

$$\begin{matrix} 1 & m+3 & -5 \\ 0 & -2m-9 & 16 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=-5+(m+3).\left(\frac{16}{2m+9}\right) \\ y=-\frac{16}{2m+9} \end{matrix} \rightarrow S=\left\{\left(\frac{6m+21}{2m+9},-\frac{4}{2m+9}\right)\right\}$$

Resolvendo pela Regra de *Cramer:*

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}6 & -3\\ 7 & m\end{vmatrix}}{2m+9}=\frac{6m+21}{2m+9}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 6\\ 3 & 7\end{vmatrix}}{2m+9}=\frac{14-18}{2m+9}=-\frac{-4}{2m+9}$$

10. Determine o valor de k para que o sistema linear $\begin{cases}5x-ky=10\\ 3x+2y=5\end{cases}$, seja possível e determinado.

Resolução: $\begin{cases}5x-ky=10\\ 3x+2y=5\end{cases}$; $SPD\to\Delta\neq 0\ \to\ \Delta=\begin{vmatrix}5 & -k\\ 3 & 2\end{vmatrix}=10+3k\neq 0\to k\neq-\frac{10}{3}$ ou

$\frac{5}{3}\neq\frac{-k}{2}\ \to\ k\neq-\frac{10}{3}$, pois são equações de duas retas.

a) Se

$k\neq-\frac{10}{3}\to$

$$k\neq-\frac{10}{3}\to\begin{matrix}3 & 2 & 5\\ 5 & -k & 10\end{matrix}\xrightarrow{l_1=l_1-2.l_2}\begin{matrix}3 & 2 & 5\\ -1 & -k-4 & 0\end{matrix}\xrightarrow{trocar\ l1\ por\ l2}\begin{matrix}-1 & -k-4 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}-1 & -k-4 & 0\\ 0 & -3k-10 & 5\end{matrix}\to\quad\begin{matrix}x=(k+4).\left(-\frac{5}{3k+10}\right)\\ (-3k-10).y=5\to\ y=-\frac{5}{3k+10}\end{matrix}$$

b) Se $k=-\frac{10}{3}\to\begin{matrix}5 & \frac{10}{3} & 10\\ 3 & 2 & 5\end{matrix}\xrightarrow{l_1=\frac{l_1}{5}}\to\begin{matrix}1 & \frac{2}{3} & 2\\ 3 & 2 & 5\end{matrix}\xrightarrow{l_2=l_2-3.l_1}\begin{matrix}1 & \frac{2}{3} & 2\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\to\ y=\frac{1}{0}$, esse sistema linear será impossível.

11. Discuta o sistema: $\begin{cases}x-2y=4\\ ax+y=1\end{cases}$.

Resolução:

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ a & 1\end{vmatrix}=1+2a$ ou $\frac{1}{a}=\frac{-2}{1}=\frac{4}{1}\ \to\ \frac{1}{a}\neq\frac{-2}{1}\ \to a\neq-\frac{1}{2}$

a) Se $1+2a\neq 0\to\ a\neq-\frac{1}{2}$; Esse sistema linear será SPD.

Resolvendo: $\begin{matrix}1 & -2 & 4\\ a & 1 & 1\end{matrix}\to\begin{matrix}1 & -2 & 4\\ 0 & 1+2a & 1-4a\end{matrix}\to\quad\begin{matrix}x=4+2.\left(\frac{1-4a}{1+2a}\right)=\frac{6}{1+2a}\\ y=\frac{1-4a}{1+2a}\end{matrix}$ → resposta:

$S=\left\{\left(\frac{6}{1+2a};\ \frac{1-4a}{1+2a}\right)\right\}$

Resolvendo pela Regra de *Cramer:*

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{1+2a}=\frac{4+2}{1+2a}=\frac{6}{1+2a}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ a & 1\end{vmatrix}}{1+2a}=\frac{1-4a}{1+2a}$$

b) Se $\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2\\ a & 1\end{vmatrix}=1+2a=0\rightarrow a=-\frac{1}{2}$ → $\begin{cases}x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}}{1+2a}=\dfrac{4-1}{0}=\dfrac{3}{0}\\ y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ -\frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}}{0}=\dfrac{1+2}{0}\end{cases}$, esse sistema linear será impossível.

12. Discuta o sistema $\begin{cases}2x-y=m\\ -x+2y=2m\end{cases}$

Resolução:

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$, esse sistema linear será sempre possível e determinado, para qualquer que seja o m pertencente a R.

13. Discuta o sistema $\begin{cases}x+y-az=-2\\ 2x-y+z=1\\ 3x+5y-3z=-6\end{cases}$

Resolução:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -a\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 5 & -3\end{vmatrix}\xrightarrow{escalonando}\begin{matrix}1 & 1 & -a\\ 0 & -3 & 2a+1=-9a+9-4a-2=-13a+7\\ 0 & 2 & 3a-3\end{matrix}$$

a) Se $-13a+7\neq 0\rightarrow a\neq\frac{7}{13}$, esse sistema linear será possível e determinado

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & -a\\ 1 & -1 & 1\\ -6 & 5 & -3\end{vmatrix}}{-13a+7}=\frac{-6-6-5a+6a+10+3}{-13a+7}=\frac{a-1}{-13a+7}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\ \end{vmatrix}}{-13a+7}=\frac{\ }{-13a+7}$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\ \end{vmatrix}}{-13a+7}=\frac{\ }{-13a+7}$$

b) Se $-13a+7=0 \rightarrow a=\frac{7}{13}$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{7}{13} & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 & -6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{7}{13} & -2 \\ 0 & -3 & \frac{27}{13} & 5 \\ 0 & 2 & -\frac{18}{13} & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & \frac{7}{13} & -2 \\ 0 & -1 & \frac{9}{13} & 5 \\ 0 & 2 & -\frac{18}{13} & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & \frac{7}{13} & -2 \\ 0 & -1 & \frac{9}{13} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{matrix} \rightarrow$$

temos sistema SI, sistema impossível.

c)

14. Discuta o sistema $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y-z=-2 \\ x+3ay+z=-4 \end{cases}$

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3a-1 & 0 \end{vmatrix} = 3.(3a-1) = 9a-3$$

a) Se $9a-3 \neq 0 \rightarrow a \neq \frac{3}{9} \neq \frac{1}{3}$, esse sistema linear será possível e determinado (SPD).

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3a & 1 & -4 \end{matrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3a-1 & 0 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{l_2=\frac{l_2}{-3}} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3a-1 & 0 & -3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x=-1 \\ \rightarrow y=\frac{-3}{3a-1} \\ z=\frac{3}{3a-1} \end{matrix} \rightarrow S=\left\{\left(-1, \frac{-3}{3a-1}, \frac{3}{3a-1}\right)\right\}$$

$9a-3=0 \rightarrow a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \rightarrow$

b) Se $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{matrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{matrix} \rightarrow y=\frac{-5}{0}$, esse sistema linear será impossível.

15. (UFRN) O sistema $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 3x+ay=6 \end{cases}$

a) Nunca é impossível.
b) Só tem solução se a=2
c) É impossível se a $\neq 2$
d) Tem infinitas soluções qualquer que seja a.
e) Tem solução única qualquer que seja a.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3a-6$$

a) Se $3a-6 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, o sistema linear será possível e determinado, SPD.
b) Se $3a-6=0 \rightarrow a=2$

$\begin{matrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow 3x+2y=6 \rightarrow x=\dfrac{6-2y}{3}$, o sistema linear será possível e $S=\left\{\left(\dfrac{6-2y}{3};\ y\right)\right\}$

indeterminado. Resposta: a)

16. (FMU-SP) O sistema linear $\begin{cases} x+2y=1 \\ ax+by=5 \end{cases}$ tem solução única para:

a) todo a$\neq$0 e b$\neq$0
b) b$\neq$2.a
c) b$\neq$a
d) todo a $\in R$ e b $\in R$
e) $a>0$ e $b>0$

Resolução:

Ter solução única então $\Delta \neq 0 \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} = b-2a \neq 0 \rightarrow b \neq 2.a$.

17. (UFPA) O sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x+a^2y=a \end{cases}$ admite solução se e somente se:

a) a = 0
b) a = 1
c) a = $\pm$1
d) a$\neq$1
e) a$\neq$-1

resolução: ®

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2-1 = (a-1).(a+1) \neq 0 \rightarrow a \neq \pm 1$

$Se\ \ a=1 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow x+y=1 \rightarrow x=1-y \rightarrow S=\{(1-y,\ y)\}$

$Se\ \ a=-1 \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \rightarrow y=\dfrac{-2}{0} \rightarrow sistema\ \ SI.$

18. (UM-SP) Em relação ao sistema $\begin{cases} 3x+2y=1-ky \\ 3y-2x=1-kx \end{cases}$, k$\in R$, podemos afirmar:

a) Se k=$\sqrt{13}$, o sistema é indeterminado
b) Se k=5, o sistema é incompatível
c) Se k=5, o sistema é determinado
d) Não existe k para o sistema ser determinado
e) Não existe k para o sistema ser incompatível

Resolução: ® c)

$\begin{cases} 3x+2y=1-ky \\ 3y-2x=1-kx \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3 & 2+k & 1 \\ k-2 & 3 & 1 \end{matrix} \rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2+k \\ k-2 & 3 \end{vmatrix} = 9-k^2+4 = -k^2+13$

a) Se $k \neq \pm\sqrt{13}$, esse sistema linear será SPD.

b) Se $k = \pm\sqrt{13}$ → $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2+\sqrt{13} \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{0} = \dfrac{3-2-\sqrt{13}}{0}$, esse sistema linear será impossível.

19. (UFGO) Para que o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$ seja compatível e indeterminado, devemos ter:

a) k = -3 e m ≠ -5
b) k ≠ -3 e m ≠ -5
c) k = -5 e m ≠ -3
d) k ≠ -5 e m = -3
e) k = -3 e m = -5

resolução: e)

$\Delta = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2k = 0 \rightarrow k = -3$

Se k= -3 → $\begin{matrix} 3 & -2 & m \\ -3 & 2 & 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 & -2 & m \\ 0 & 0 & m+5 \end{matrix} \rightarrow y = \dfrac{m+5}{0} \rightarrow m + 5 = 0 \rightarrow m = -5$

20. O valor de k para que o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + ky = -3 \end{cases}$ seja possível e determinado, é suficiente que:

a) $k = -\dfrac{3}{2}$
b) $k \neq -\dfrac{3}{2}$
c) $k \neq -\dfrac{2}{3}$
d) $k = -\dfrac{2}{3}$

Resolução: b)

Sistema SPD então $\Delta \neq 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2.k + 3 \neq 0 \rightarrow k \neq \dfrac{-3}{2}$

21. (CESCE-SP) Para que o sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + by = 1 \end{cases}$ seja possível e determinado, é suficiente que:

a) a -c ≠ 0
b) b ≠ 0
c) b(a – c) ≠ 0

d) a(a – c) $\neq 0$

resolução:

Sistema SPD então $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & b \end{vmatrix} = ab - bc \neq 0 \to b.(a-c) \neq 0$$

22. (UCP-PR) O valor de λ para que o sistema $\begin{cases} \lambda x + y - 1 = 0 \\ 2x + \lambda y - 2 = 0 \end{cases}$ seja determinado é:

a) $\pm\sqrt{2}$
b) –1
c) $\neq$ de $\pm\sqrt{2}$
d) $\neq$ de –1
e) 1

Resolução:

Sistema SPD então $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \neq 0 \to \lambda \neq \pm\sqrt{2}$$

23. (UFPR) Para que o sistema $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y + mz = 0 \end{cases}$ admita solução única, deve-se ter:

a) m $\neq$ 1
b) m $\neq$ 2
c) m $\neq$ -2
d) m $\neq$ 3
e) m $\neq$ -3

Resolução: d); Um sistema linear homogêneo tem a solução trivial (0,0,0) ou é indeterminado.

Se $\begin{matrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \\ 6 & -15 & m \end{matrix} = 20m - 60 + 15 + 60 - 60 - 5m = 0 \to 15m = 45 \to m = 3$, SPI.

24. (FCMSCSP) O sistema $\begin{cases} 2x - y - z = m \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ é impossível para:

a) m = 1
b) m = 0
c) m = -3
d) –1< m <1
e) m > 10

resolução: d)

$$a)\quad \Delta = 0 \to \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 4m + 2 + 3 + 2 - 4 + 3m = 0 \to 7m + 3 = 0 \to m = \frac{-3}{7}$$

$$b)\quad Se\ \ m \neq -\frac{3}{7} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{escalonando} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 2 \\ 0 & 5 & -3m-2 & -6 \\ 0 & 1 & -2m-1 & m-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 7m+3 & -5m+14 \\ 0 & 1 & -2m-1 & m-4 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{-5m+14}{7m+3}$$

25. Assinale a alternativa que nos dá o valor de λ para o qual o seguinte sistema não tem solução: $\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ y + \lambda z = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$

a) $\lambda = 0$
b) $\lambda = 1$
c) $\lambda = 2$
d) $\lambda = 5$
e) $\lambda = -1$

Resolução: e)

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ y + \lambda z = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases} \to \Delta = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{escalonando} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -6 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & -6-6\lambda \end{vmatrix} = -6 - 6\lambda = 0 \to \lambda = -1$$

26. Determine o valor de m para que o sistema abaixo admita infinitas soluções: $\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & -2 & -1 \\ 1 & -m & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 2 - 3m - 4m + 0 = 0 \to m = 2$$

$$\begin{matrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \to 2y + 3z = 0 \to \ y = -\frac{3z}{2} \qquad x = -3z + 2z$$

$$S = \left\{ \left(-z, -\frac{3z}{2},\ z \right) \right\}$$

27. (UFC-CE) Considere o sistema $\begin{cases} x.\cos a + y.\text{sen}\, a = \text{sen}(2a) \\ x.\text{sen}\, a - y.\cos a = -\cos(2a) \end{cases}$. Se a solução do (x_0, y_0) sistema satisfaz a igualdade $4.(x_o.y_o)$=1, determine a medida do ângulo a.

Resolução:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & sena \\ sena & -\cos a \end{vmatrix} = -\cos^2 a - sen^2 a = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} sen2a & sena \\ -\cos 2a & -\cos a \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-sen2a.\cos a + \cos 2a.sena}{-1} = sen2a.\cos a - sena.\cos 2a = sena = sena$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos a & sen2a \\ sena & -\cos 2a \end{vmatrix}}{-1} = -(-\cos 2a.\cos a - sen2a.sena) = \cos a$$

$$4; sena.\cos a = 1 \rightarrow 2.sen2a = 1 \rightarrow sen2a = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = \frac{\pi}{6} + 2k.\pi \rightarrow a = \frac{\pi}{12} + k.\pi$$

ou

$$2a = \frac{5\pi}{6} + 2.k.\pi \rightarrow a = \frac{5.\pi}{12} + k.\pi$$

Respostas:

1. x=4 e y=2
2. x=3 e y=2
3. x=3 e y=2
4. x=5 e y= -2
5. x= 1; y=0 e z= -2
6. $x = \frac{9}{5}$; $y = \frac{12}{5}$; $z = \frac{9}{5}$
7. $m = -\frac{4}{3}$
8. $m = -\frac{3}{2}$
9. $m \neq -\frac{9}{2}$
10. $k \neq -\frac{10}{3}$
11. $\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, & SI \\ a \neq -\frac{1}{2}, & SPD \end{cases}$
12. x=$\frac{4m}{3}$ e y=$\frac{5m}{3}$
13. Se $a \neq \frac{7}{13}$, SPD
14. $\begin{cases} a = \frac{1}{3}, & SI \\ a \neq \frac{1}{3}, & SPD \end{cases}$
15. a
16. b
17. b
18. c
19. e
20. b
21. c
22. c
23. d
24. a
25. b
26. d
27. m=2
28. $a = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou
    $a = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, com
    k$\in Z$

Resolver pelo Método do Escalonamento

Resolver os sistemas lineares pelo **Método do Escalonamento**: $\begin{cases} 6x+6y=5 \\ -6x+6y=-13 \end{cases}$

Resolução $\begin{array}{ccc} 6 & 6 & 5 \\ -6 & 6 & -13 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 6 & 6 & 5 \\ 0 & 12 & -7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 6x = 5 + 6.\dfrac{7}{12} \rightarrow x = \dfrac{17}{12} \\ 12.y = -7 \rightarrow y = -\dfrac{7}{12} \end{array}$

1. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y=3 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$ Resolução: $\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{l} x = 3-1-1 = 1 \\ y = 3-2 = 1 \\ 2.z = 2 \rightarrow z = 1 \end{array} \rightarrow S = \{(1,1,1)\}$$

2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -2x+y-z=0 \\ 3x-y-z=-7 \end{cases}$ Resolução:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & -16 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -4 & -16 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 3-1-3 = -1 \\ y = 4-3 = 1 \\ -2.z = -6 \rightarrow z = 3 \end{array} --> S = \{(-1\ ,\ 1,\ 3\ )\}$$

3. $\begin{cases} 3a-b-c=5 \\ -a+b+c=-3 \\ a-2b+3c=-4 \end{cases}$ Resolução:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & -7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 10 & -18 \end{array} \uparrow \begin{array}{l} x = \\ y = \\ 10.z = -18 \end{array}$$

4. $\begin{cases} 2a+2b+2c=1 \\ a+b+c=\dfrac{1}{2} \\ -a-b-c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ Resolução: $\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array} \xrightarrow{escalonando} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow a+b+c=\dfrac{1}{2}$

Sistema linear possível indeterminado: Resp: qualquer que seja a, b e c pertencentes a R, e b e c são ditos variáveis livres (não aparecem no início da equação).

5. $\begin{cases} 2a - b - c = -3 \\ a + b + c = 12 \\ -a + b + c = 6 \end{cases}$ Resposta:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -3 & -27 \\ 0 & 2 & 1 & 18 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 18 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = \\ b = \\ -3.c = 9 \rightarrow c = -3 \end{matrix}$$

6. $\begin{cases} 3x + y + z + w = 2 \\ x + y + z + w = 0 \\ -x + y - z + w = -4 \\ x - y - z - 3w = 4 \end{cases}$ Resolução:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & -3 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix} \rightarrow\rightarrow \begin{matrix} x + 3 + 1 - 3 = 0 \rightarrow x = -1 \\ y + z + w = 1 \rightarrow y = 3 \\ z = 1 \\ w = -3 \end{matrix} \rightarrow S = \{(-1, 3, 1, -3)\}$$

7. $\begin{cases} x - 2y + z + w = 7 \\ x + y + z + w = 4 \\ 2x - y - z - w = 2 \\ -x + y + z + 2w = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{11}{z} = -1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$ Resolução: fazendo

$$\begin{matrix} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \\ \frac{1}{z} = c \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -11 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -14 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{2}{3} \\ -8.c = -1 \rightarrow c = \frac{1}{8} \rightarrow z = 8 \\ b = -\frac{5}{8} \rightarrow y = -\frac{8}{5} \end{matrix}$$

9. $\begin{cases} 2^x.2^y.2^z = 8 \\ 3^x.3^z = 9.9^y \\ 125.5^x = 5^z \end{cases}$ Resolução:

$$\begin{matrix} 2^{x+y+z} = 2^3 \\ 3^{x+z} = 3^{y+1} \\ 5^{3+x} = 5^z \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{matrix} \rightarrow -2.y = -2 \rightarrow y = 1 \quad \begin{matrix} x = 3 - 1 - 4 = -2 \\ \\ z = 6 - 2 = 4 \end{matrix}$$

10. $\begin{cases} \log(x+y+z) = 0 \\ \log_y(x+z) = 1 \\ \log_3 5 + \log_3 x = \log_3(y-z) \end{cases}$ resolução:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{matrix} \rightarrow -2.y = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} x = \\ \\ z = \end{matrix}$$

11. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{cases}$ resolução

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \rightarrow \\ 0 & 0 & -3 & 5 \rightarrow \\ 0 & -1 & 1 & -3 \rightarrow \end{matrix} -3.z = 5 \rightarrow z = -\frac{5}{3} \quad \begin{matrix} y = \\ \\ x = \end{matrix}$$

12. O sistema $\begin{cases} (a-1).x + by = 1 \\ (a+1).x + 2by = 5 \end{cases}$ tem x=1 e y=2 como solução. Os valores de **a** e **b** são ...

Resolução: $\begin{cases} (a-1).1 + b2 = 1 \\ (a+1).1 + 2.b.2 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} a & 2b & 2 \\ a & 4b & 4 \end{matrix} --> \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{matrix} --> \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 2 - 2 = \rightarrow a = 0 \\ 2b = 2 \rightarrow b = 1 \end{matrix}$

13. (CESGRANRIO-83) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x = 2y \\ 2y = 3z \\ x + y + z = 11 \end{cases}$, vem que x+2y+3z=?

Resolução:

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2y = 3z \\ x + y + z = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} x = 3 \\ y = \frac{3}{2}.1 \\ -11.z = -22 \rightarrow z = 1 \end{matrix} \rightarrow \text{Resp}: x + 2y + 3z = 3 + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2}$$

14. O sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -12 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$, admite solução única (x,y,z). Então a soma x+y+z=?

Resolução:

$$\to \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -12 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \end{array} \to \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array} \xrightarrow{l_2=l_2-l_3} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{array} \to \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{l} x = 19-14 = 5 \\ y = -9+28 = 19 \\ z = 14 \end{array}$$

Resposta: x+y+z=5+19+14=38

15. (UFBA-81) No sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$, o valor de z-x.y=?

Resolução:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{l_1=l_1-l_2} \begin{array}{cccc} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{l_2=l_2+3.l_1} \begin{array}{cccc} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \to \begin{array}{cccc} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{cccc} -1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \to \begin{array}{l} x = 1-30 = -29 \\ y = 5 \\ z = -10 \end{array}$$

16. (UFPA-84) Dado o sistema $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+2y-z=-3 \\ 3x+4y+2z=-5 \end{cases}$, qual o valor de x+y+z?

Resolução:

$$\to \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{array} \xrightarrow{escalonando} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \end{array} \xrightarrow{l_2=l_2-2.l_3} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \end{array} \to$$

$$\xrightarrow{l3=l3-2.l2} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 19 & 16 \end{array} \to \begin{array}{l} x = -3-2.\left(-\frac{17}{19}\right)+\frac{16}{19} \quad x = -3+\frac{34}{19}+\frac{16}{19} = -3+\frac{50}{19} = \frac{47}{19} \\ y = 5-7.\frac{16}{19} = \frac{-17}{19} \\ 19.z = 16 \to z = \frac{16}{19} \end{array}$$

Resposta: $x+y+z = \frac{47}{19}-\frac{17}{19}+\frac{16}{19} = \frac{30}{19}+\frac{16}{19} = \frac{46}{19}$

Respostas:

1. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$
2. (1,1,1)
3. (-1,1,3)

4. (0,-1,-2)
5. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$
6. (3,4,5)
7. (1,-1,1,-1)
8. (2,-1,0,3)
9. S=$\left\{\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};1\right)\right\}$
10. (1;-2;4)
11. impossível
12. $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right)$
13. a=0 e b=1
14. 18
15. 2
16. 3
17. $-\frac{22}{19}$

28. Vamos resolver o sistema a seguir pela regra de Cramer: $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$.

Resolvendo:

Faça $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$ e $D_x = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} = ?$ $D_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} = ?$ → após calcularmos D_x e D_y

podemos calcular x e y, assim: $x = \dfrac{D_x}{D} = -$ $y = \dfrac{D_y}{D} = -$ Resposta:_______

29. Determine x e y pela Regra de Cramer: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

Solução: x=$\dfrac{D_x}{D}$, y=$\dfrac{D_y}{D}$. Fazendo D= $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, isso indica que esse sistema linear é possível e determinado. Calculando D_x=$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = ________ e D_y=$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ =___________ . Logo x=.... e y= ....

30. Resolva o sistema linear pela regra de Cramer $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$.

31. Resolva o sistema linear pela regra de Cramer $\begin{cases} -2x + 5y = -20 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$

32. Resolva o sistema linear pela regra de Cramer $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 2z = -3 \\ 4x + y + z = 2 \end{cases}$.

33. Resolva o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$.

Discussão de Sistemas Lineares

Exercícios

1. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 2x - my = 6 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$, seja possível e indeterminado.

Resolução:

$\begin{vmatrix} 2 & -m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3.m \rightarrow m \neq \frac{-4}{3}$, o sistema será SPD. Resposta: Se $m = -\frac{4}{3}$, o sistema será SPI.

2. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 4x - my = 5 \\ 8x + 3y = 10 \end{cases}$, seja possível e indeterminado.

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 4 & -m \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 8m = 0 \rightarrow m = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$

Substituindo no sistema dado: $\begin{matrix} 4 & 3/2 & 5 \\ 8 & 3 & 10 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 4 & 3/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow$ conclusão: esse sistema linear é SPI.

3. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + my = 7 \end{cases}$, seja possível e determinado.

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 2m + 9 \neq 0 \rightarrow m \neq -\frac{9}{2}$

4. Determine o valor de *m* para que o sistema linear $\begin{cases} 5x - ky = 10 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$, seja possível e determinado.

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 5 & -k \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3k \neq 0 \rightarrow k \neq -\frac{10}{3}$

5. Discuta o sistema: $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ ax + y = 1 \end{cases}$.

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a \begin{cases} Se\ a \neq -\dfrac{1}{2}, o\ sistema\ é\ SPD \\ Se\ a = -\dfrac{1}{2}, o\ sistema\ é ..... \end{cases}$, para a segunda hipótese vamos analisar o sistema:

$\begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{matrix}$ → resolvendo pelo método do escalonamento (multiplicando-se a primeira linha por ½ e somando-se a segunda linha): $\begin{matrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$, a segunda nos mostra que $y = \dfrac{3}{0}$ impossibilidade, ou seja, esse sistema linear é SI.

6. Discuta o sistema $\begin{cases} 2x - y = m \\ -x + 2y = 2m \end{cases}$

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ logo esse é SPD para qualquer que seja *m* pertencente a R.

7. Discuta o sistema $\begin{cases} x + y - az = -2 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 5y - 3z = -6 \end{cases}$

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 3 - 10a - 3a - 5 + 6 = 7 - 13a$

a) Se $-13a + 7 \neq 0 \rightarrow a \neq \dfrac{7}{13}$, o sistema é SPD

b) Se $a = \dfrac{7}{13}$, devemos analisar o sistema e verificar se ele é spi ou si.

$\begin{matrix} 1 & 1 & -7/13 & -2 \\ 0 & -3 & -1/13 & 5 \\ 0 & 2 & 44/13 & 0 \end{matrix}$

8. Discuta o sistema $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y - z = -2 \\ x + 3ay + z = -4 \end{cases}$

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3a & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 6a + 1 + 3a - 2 = 9.a - 3$$

c) Se $9a - 3 \neq 0 \rightarrow a \neq \frac{1}{3}$ o sistema é SPD.

d) Se $a = \frac{1}{3}$, vamos analisar o sistema. Substituindo o valor de a no sistema,

temos: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}$, a 3ª. Linha $z = \frac{-3}{0}$ indica que esse sistema é SI.

9. (UFRN) O sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$

a) nunca é impossível.
b) Só tem solução se a=2
c) É impossível se a $\neq$ 2
d) Tem infinitas soluções qualquer que seja a.
e) Tem solução única qualquer que seja a.

Resolução:

$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 3a - 6 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$, o sistema é SPD.

Ou

$\frac{3}{3} \neq \frac{2}{a} \rightarrow a \neq 2$; Se a=2, o sistema é SPI.

10. (FMU-SP) O sistema linear $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ ax + by = 5 \end{cases}$ tem solução única para:

a) todo a $\neq$ 0 e b $\neq$ 0
b) b $\neq$ 2.a
c) b $\neq$ a
d) todo a $\in R$ e b $\in R$
e) $a > 0$ e $b > 0$

Resolução:

$\frac{1}{a} \neq \frac{2}{b} \rightarrow b \neq 2.a$; ou $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 2a \neq 0 \rightarrow b \neq 2a$

34. (UFPA) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + a^2 y = a \end{cases}$ admite solução se e somente se:

a) a = 0
b) a = 1

c) a = ± 1
d) a $\neq 1$
e) a $\neq$ -1

resolução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0 \rightarrow a \neq \pm 1$$

O sistema terá solução se $a \neq -1$. Se a= -1 o sistema será SI.

35. (UM-SP) Em relação ao sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 - ky \\ 3y - 2x = 1 - kx \end{cases}$, k$\in R$, podemos afirmar:

a) Se k=$\sqrt{13}$, o sistema é indeterminado
b) Se k=5, o sistema é incompatível
c) Se k=5, o sistema é determinado
d) Não existe k para o sistema ser determinado
e) Não existe k para o sistema se incompatível

Resolução: c) k=5

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2+k \\ k-2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (k-2).(k+2)$$

a) Se $k^2 - 13 \neq 0 \rightarrow k \neq \pm\sqrt{13}$, o sistema é SPD.
b) Se $k = \pm\sqrt{13}$, o sistema SI.

36. (UFGO) Para que o sistema $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$ seja compatível e indeterminado, devemos ter:

a) k = -3 e m$\neq$-5
b) k$\neq$-3 e m$\neq$-5
c) k = -5 e m$\neq$-3
d) k$\neq$-5 e m = -3
e) k = -3 e m = -5

resolução: e)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ k & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2k = 0 \rightarrow k = -3$$

37. O valor de k para que o sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + ky = -3 \end{cases}$ seja possível e determinado, é suficiente que:

a) $k = -\dfrac{3}{2}$
b) $k \neq -\dfrac{3}{2}$

c) $k \neq -\frac{2}{3}$

d) $k = -\frac{2}{3}$

Resolução: b)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 2.k + 3 \neq 0 \rightarrow k \neq -\frac{3}{2}$$

38. (CESCE-SP) Para que o sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + by = 1 \end{cases}$ seja possível e determinado, é suficiente que:

a) a -c $\neq$ 0
b) b $\neq$ 0
c) b(a – c) $\neq$ 0
d) a(a – c) $\neq$ 0

resolução: c)

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & b \end{vmatrix} = a.b - b.c \neq 0 \rightarrow b.(a-c) \neq 0$$

39. (UCP-PR) O valor de λ para que o sistema $\begin{cases} \lambda x + y - 1 = 0 \\ 2x + \lambda y - 2 = 0 \end{cases}$ seja determinado é:

a) $\pm\sqrt{2}$
b) –1
c) $\neq$ de $\pm\sqrt{2}$
d) $\neq$ de –1
e) 1

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \neq 0 \rightarrow \lambda \neq \pm\sqrt{2}$$

40. (UFPR) Para que o sistema $\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ x + 10y - 2z = 0 \\ 6x - 15y + mz = 0 \end{cases}$ admita solução única, deve-se ter:

a) m $\neq$ 1
b) m $\neq$ 2
c) m $\neq$ -2
d) m $\neq$ 3
e) m $\neq$ -3

Resolução: d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \\ 6 & -15 & m \end{vmatrix} = 20m - 60 + 15 + 60 - 60 - 5m \neq 0 \rightarrow 15m - 45 \neq 0 \rightarrow m \neq 3$$

41. (FCMSCSP) O sistema $\begin{cases} 2x - y - z = m \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ é impossível para:

a) m = 1
b) m = 0
c) m = -3
d) –1< m <1
e) m > 10

Resolução: d)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = 4m + 2 + 3 + 2 - 4 + 3m = 0 \rightarrow m = -\frac{3}{7}$$

42. Assinale a alternativa que nos dá o valor de λ para o qual o seguinte sistema não tem solução: $\begin{cases} x + 3y + 4z = 1 \\ y + \lambda z = 2 \\ 2x + 2z = 3 \end{cases}$

a) $\lambda = 0$
b) $\lambda = 1$
c) $\lambda = 2$
d) $\lambda = 5$
e) $\lambda = -1$

Resolução: b)
Fazendo escalonamento do sistema

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1/6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 13/6 \end{matrix},$$

observando-se a 3ª. linha do último sistema da seqüência, notamos que $z = \dfrac{13/6}{\lambda - 1} \rightarrow \lambda = 1$, o torna o sistema impossível.

43. Determine o valor de m para que o sistema abaixo admita infinitas soluções: $\begin{cases} mx - 2y - z = 0 \\ x - my - 2z = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} m & -2 & -1 \\ 1 & -m & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 2 - 3m - 4m + 0 = 0 \rightarrow m = 2$$

44. (UFC-CE) Considere o sistema $\begin{cases} x.\cos a + y.\text{sen}\, a = \text{sen}(2a) \\ x.\text{sen}\, a - y.\cos a = -\cos(2a) \end{cases}$. Se a solução do (x_0, y_0) sistema satisfaz a igualdade $4.(x_o.y_o)$=1, determine a medida do ângulo a.

Resolução:
Resolvendo o sistema pelo método da adição encontramos x= -sena e y=cosa e pela condição dada $4.(x_o.y_o)$=1

$$4.(-sena).\cos a = 1 \rightarrow -2.2.sena.\cos a = -1 \rightarrow sen2a = -\frac{1}{2}$$

$$2a = \frac{7\pi}{6} + 2k.\pi, k \in Z \rightarrow a = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\ k \in Z$$

$$2a = \frac{11\pi}{6} + 2.k.\pi \rightarrow a = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in Z$$