

<b>Produto de Matrizes</b>	<b>1</b>
Exercício:	1
<b>Matriz Involutiva</b>	<b>1</b>
Exercício	1
<b>Matriz Simétrica</b>	<b>2</b>
Exercício	2
<b>Matriz anti-simétrica:</b>	<b>2</b>
Exercício	2
<b>Determinante de uma matriz de ordem 2</b>	<b>2</b>
<b>Determinante de uma matriz de ordem 3 — Regra de Sarrus</b>	<b>3</b>
Definição	3
Exercício:	3
<b>Respostas:</b>	<b>4</b>

## Produto de Matrizes

### Exercício:

1. Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , determine

a) a matriz polinomial,  $2.A^2 + 3.A + 5.I$ .

b) A matriz inversa  $A^{-1}$  usando a fórmula  $A^{-1} = -\frac{1}{17}A^2 + \frac{5}{17}A + \frac{3}{17}.I$ .

## Matriz Involutiva

Uma matriz  $A$  quadrada é involutiva quando  $A^2 = I$

### Exercício

2. Uma matriz diagonal  $A$ , de ordem 2, é involutiva. Determine-a.      Sugestão: faça  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .

### Matriz Simétrica

— é uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , diz-se **simétrica** quando  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i, 1 \leq i \leq n$ , para todo  $j, 1 \leq j \leq n$ .

Obs: Se A é simétrica então  $A = A^t$ .

#### Exercício

3. Determine o número  $b \in \mathbb{R}$ , para que a matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{pmatrix}$ , seja simétrica.

4. Seja a matriz  $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ , para a qual  $\begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} = i + j, \text{ se } 1 \leq i < j \leq 4 \end{cases}$ . Determine A e  $A^t$ . A é simétrica?

5. Se  $\begin{pmatrix} \sin 2a & (\sin a + \cos a)^2 \\ \cos 4a & |\sin^3 a + \cos^3 a| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & c \end{pmatrix}$ , determine os números a, b e c.

### Matriz anti-simétrica:

— é uma matriz quadrada  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , diz-se **anti-simétrica** quando  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i, 1 \leq i \leq n$ , para todo  $j, 1 \leq j \leq n$ .

Obs: Se A é anti-simétrica então  $A = -A^t$ ; os elementos da diagonal principal são todos nulos.

#### Exercício

6. A matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$  é anti-simétrica.

7. Determine os números reais a, b, c, x, y e z para que a matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -3 \\ x-1 & b & 2y-4 \\ z & 4 & c \end{pmatrix}$  seja anti-simétrica.

### Determinante de uma matriz de ordem 2

A toda matriz **quadrada** está associado um número real chamado determinante.

Exemplos: Calcular os determinantes das matrizes:

a)  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$  o determinante dessa matriz é:  $\det A = 4 \cdot 7 - 6(-2) = 28 + 12 = 40$

b)  $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  o determinante dessa matriz é:  $\det B = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$

c) Calcule o polinômio característico  $\det(A - x \cdot I) = 0$ , onde  $x \in \mathbb{R}$ ;

### Determinante de uma matriz de ordem 3 — Regra de Sarrus

8. Calcular os determinantes das matrizes pela regra de *Sarrus*:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

9. Calcule os determinantes

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \log_2 8 & \operatorname{tg} \frac{p}{4} & \sec(-p) \\ 4^{\frac{1}{2}} & \operatorname{sen} 8p & 3^0 \\ -1^2 & \ln e & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \frac{p}{2} & -1^2 & 1 \\ \log 1 & 0 & -1 \\ \cos \frac{3p}{2} & 2^{-1} & 3^0 \end{vmatrix}$$

### Matriz Inversa

#### Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz quadrada B, de ordem n, diz-se uma inversa de A, se e somente se:  $A.B = B.A = I_n$ .

Propriedade:

A inversa de uma matriz A existe se o  $\det A \neq 0$ .

#### Exercício:

10. Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ , pede-se:

a) verificar se existe a inversa  $A^{-1}$  da matriz A,  $\det A \neq 0$ .

b) A inversa da  $A^{-1}$  usando a definição.

Resolução:

$$A.A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Determine  $A^{-1}$ , se existir.

12. Encontrar a matriz inversa  $B^{-1}$  da matriz  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

a) usando a definição.

b) usando o “artifício”.

c) usando escalonamento

d) a partir da equação  $B^2 = 2.B - 3.I$ , determine a matriz inversa  $B^{-1}$ , (obs:  $2=2+0$  e  $3=\det B$ ).

Resolução:

$$B^2 = 2 \cdot B - 3 \cdot I \hat{a}$$

13. Encontre a matriz inversa  $C^{-1}$  da matriz  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , usando o escalonamento.

**Respostas:**

1)  $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$

2)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3) 0 ou 2

4)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ , A é uma matriz simétrica.

5)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$  e  $c = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

6) Quaisquer que sejam a, b e c pertencente a R.

7) a=b=c=0; x=-1 e y=0; z=3

8) a) -47 b) 1 c) -2

9) a) -8 b) 1/2

10)  $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$

11) Não existe, pois a matriz é singular.

12)  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}$

$1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$

13)  $0 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \hat{a}$

$2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$