

Matrizes _____	2
Definição _____	2
Notação de uma matriz _____	2
Matriz Quadrada _____	2
Matriz Diagonal _____	2
Matriz linha _____	2
Matriz coluna _____	2
Matrizes iguais _____	2
Exercício _____	3
Matriz Transposta _____	3
Propriedades da matriz transposta _____	3
Matriz Oposta _____	3
Matriz Nula _____	3
Matriz identidade ou Matriz unidade _____	4
Adição de Matrizes _____	4
Exercício _____	4
Produto de Matrizes _____	4
Exercícios _____	4
Matriz inversa A^{-1} de uma matriz _____	5
Ambiente e Preservação _____	6

Matrizes

Definição

- São números dispostos em linhas (filas horizontais) e colunas (filas verticais), formando uma tabela.
- Matriz **mxn** é uma tabela de **m.n** números reais dispostos em *m* linhas (filas horizontais) e *n* colunas (filas verticais).

Notação de uma matriz

1. Uma matriz de ordem 2x3: $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Exemplo: $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2/5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2x3, com 6 elementos, onde $a_{11}=4$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=2/5$, $a_{13}=0$, $a_{22}=1$, $a_{23}=6$.

2. Uma matriz genérica de ordem mxn: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ são

os elementos da primeira linha e $a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{n2}$ são os elementos da segunda coluna, etc.

Matriz Quadrada

— é toda matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo:

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2x2;

- b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3x3.

Matriz Diagonal

— É a matriz quadrada na qual os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos: $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz linha

— é toda matriz do tipo 1xn. Exemplo: $C = (3 \ 0 \ 1 \ 8)$, matriz de ordem 1x4.

Matriz coluna

— é toda matriz do tipo mx1. Exemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 40 \end{pmatrix}$, matriz de ordem 3x1.

Matrizes iguais

— duas matrizes A e B são iguais, se e somente se, os elementos da mesma posição são iguais.

Exemplo: $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ logo $D=E$.

Exercício

1. Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} x+y & m-n \\ x-2y & 3m+n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, achar os valores de x, y, m e n para que se tenha $A=B$.
 ® $x=5; y=3; m=4$ e $n=-2$.

Resolução:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m-n=6 \\ 3m+n=10 \end{cases}$$

2. Determine x e y, sabendo que as matrizes $\begin{pmatrix} 2x+5y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ são iguais. ® $x = -\frac{4}{7}$ e $y = \frac{3}{7}$

3. Se $\begin{pmatrix} x+y & a+b \\ x-y & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determine x, y, a e b. ® $x=3; y=2; a=1$ e $b=2$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, encontre as X e Y do sistema

$$\begin{cases} X+Y=A \\ X-Y=B \end{cases} \quad \text{® } X = \begin{pmatrix} 5/2 & 2 \\ 5 & 7/2 \end{pmatrix} \text{ e } Y=?$$

Matriz Transposta

— quando se troca ordenadamente as linhas pelas colunas de uma matriz, a nova matriz é dita uma matriz transposta.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a sua transposta é $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Encontrar a matriz transposta A^t da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$. ® $A=?$

Propriedades da matriz transposta

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(a.A)^t = a.A^t$

Matriz Oposta

— matriz oposta de uma matriz A é uma que somada com a matriz A, resulta na matriz Nula.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ a sua oposta é: $-A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz Nula

— É a matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo:

$$\text{a) } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade ou Matriz unidade

— de ordem $n \geq 2$, é a matriz quadrada de ordem n que tem os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais elementos iguais a zero.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ matriz identidade de ordem 2; } \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ matriz identidade de ordem 3;}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ matriz identidade de ordem 4.}$$

Adição de Matrizes

— A soma de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ é a matriz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, ambas do mesmo tipo $m \times n$, (ambas da mesma ordem).

Exercício

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcular:

a) $A + B - C$

$$\text{Resolução: } \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +3 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -18 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$

b) $A - B - C$ ® $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

7. Determinar x , y e z sabendo que: $\begin{pmatrix} x-2 & 4 \\ y+1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2z-3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & z \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. ® 4, 4 e -1

Produto de Matrizes

Requisito: O número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

Assim: a) $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 4} \hat{=} P_{2 \times 4}$;

b) $M_{3 \times 4} \cdot A_{4 \times 1} \hat{=} D_{3 \times 1}$

Exercícios

8. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine $A \cdot B$.

Resolução:

$$AxB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x(-2) + 2x4 + (-1)x2 & 1x5 + 2x(-3) + (-1)x1 \\ 3x(-2) + 1x4 + 4x2 & 3x5 + 1x(-3) + 4x1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$

(Regra: Primeira linha com a primeira coluna; primeira linha com a segunda coluna; segunda linha com a primeira coluna; segunda linha com a segunda coluna).

9. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule os produtos de matrizes abaixo::

a) A.B

b) B.A

c) A.B=B.A ? V ou F.

d) A^2 e) B^2

Respostas: a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) não vale a propriedade comutativa d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz inversa A^{-1} de uma matriz

Definição: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se A^{-1} é a matriz inversa da matriz A então o produto $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$.

10. Encontrar a matriz inversa A^{-1} da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Usando o escalonamento.

Resolução: coloca-se à direita da matriz dada, a matriz identidade; faz-se o escalonamento de modo que a matriz identidade passe a ocupar a posição da matriz dada.

Solução: $\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \hat{a} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \hat{a} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$

$\hat{a} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$, observe que a posição da matriz A foi ocupada pela matriz identidade e na

posição da matriz identidade encontra-se a matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Usando a definição. (obs: faça $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)

11. Encontrar a matriz inversa A^{-1} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ usando o escalonamento. ®

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

12. Encontrar a matriz inversa A^{-1} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ usando o escalonamento.

$$\textcircled{R} \begin{pmatrix} 5/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

13. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, encontre a matriz X , tal que

a) $A.X = B$

b) $B.X^{-1} = A$

Resolução:

$$B.X^{-1} = A \rightarrow B.X^{-1}.X = A.X \rightarrow B.I = A.X \rightarrow A.X = B$$

Ambiente e Preservação

(bb18, page 198) Um modelo matricial em um estudo ecológico

Os professores *Bem Noble e James W. Daniel*, no livro *Álgebra Linear Aplicada*, apresentam um modelo **matricial** para o estudo do equilíbrio entre o crescimento de duas populações: uma de 1000 galinhas e outra de 100 raposas, predadoras das galinhas. Admitindo certas taxas de variação para o número de indivíduos das duas populações, em n unidades de tempo, os autores obtiveram a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} R_n \\ G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -k & 1,2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix}, \text{ em que } R_n \text{ e } G_n \text{ são, respectivamente, o número de}$$

raposas e o número de galinhas na n -ésima unidade de tempo, e k é a taxa de predação (razão do número de galinhas mortas para o número total de galinhas em cada unidade de tempo).

A partir dessa equação, os professores mostram que, mantendo-se a taxa de predação dentro de certos limites, as duas populações crescem indefinidamente; mas, para taxas altas além do limite superior, as duas populações desaparecem.

Esse exemplo mostra o quanto a Matemática pode ajudar no equilíbrio ecológico. Resta saber o quanto a ambição desmedida e a sede de poder do homem, como predador da natureza, pode interferir na taxa de predação.

Referências Bibliográficas

Bb18. Paiva, Manoel — Matemática, volume único — 2ª. Edição, Editora Moderna, 2003, Volume 2, Atual Editora, 1994, São Paulo.