

## Questões resolvidas no final

### Função Logarítmica

Exercícios: .....	1
Gráfico da função logarítmica.....	2
Construção de Gráficos da função logarítmica .....	2
Inequações Logarítmicas.....	4
Questões de Vestibular .....	5
Respostas:.....	11

Seja  $a$  um número positivo e diferente de 1. Chama-se função logarítmica de base  $a$ , a função  $f$  de  $R_+^*$  em  $R$ , definida por:  $f(x)=\log_a x$ .

Observação: O domínio da função logaritmo é  $R_+^*$  e o contradomínio é  $R$ .

### Exercícios:

1. Determine o domínio da função  $f(x)=\log_7(2x-26)$ .

Resolução:

$$f(x) = \log_7(2x - 26) \rightarrow 2x - 26 > 0 \rightarrow x > 13$$

$$Df = \{x \in R; x > 13\} \text{ ou } Df = ]13, +\infty[$$

2. Determine o domínio da função  $f(x)=\log_{(4-3x)}123$ .

3. Determine o domínio da função  $f(x)=\log_{(x-2)}(5x-x^2)$ .

4. Determine o domínio das seguintes funções:

a)  $f(x)=\log(3x-1)$

b)  $f(x)=\log_3 x^2$

c)  $f(x)=\log_{1/2}(x+2)+\log_{1/2}(3+x)$

d)  $f(x)=\log_{1/2}[(x+2).(3+x)]$

e)  $f(x) = \frac{\log_3(x+2)}{\log_5(3-x)}$

f)  $f(x)=\log(5-25^x)$

5. Determine o domínio das seguintes funções:

a)  $f(x)=\log_{(2x+5)} 5$

b)  $f(x)=\log_{(x^2-1)} x$

c)  $f(x) = \log_{(3x-4)}(x^2 - 9)$

d)  $f(x)=\log_{(12-x^2)}(2x-6)$

e)  $f(x)=\log_{(x^2-2)}(3-x^2)$

## Gráfico da função logarítmica

Examinemos dois exemplos:

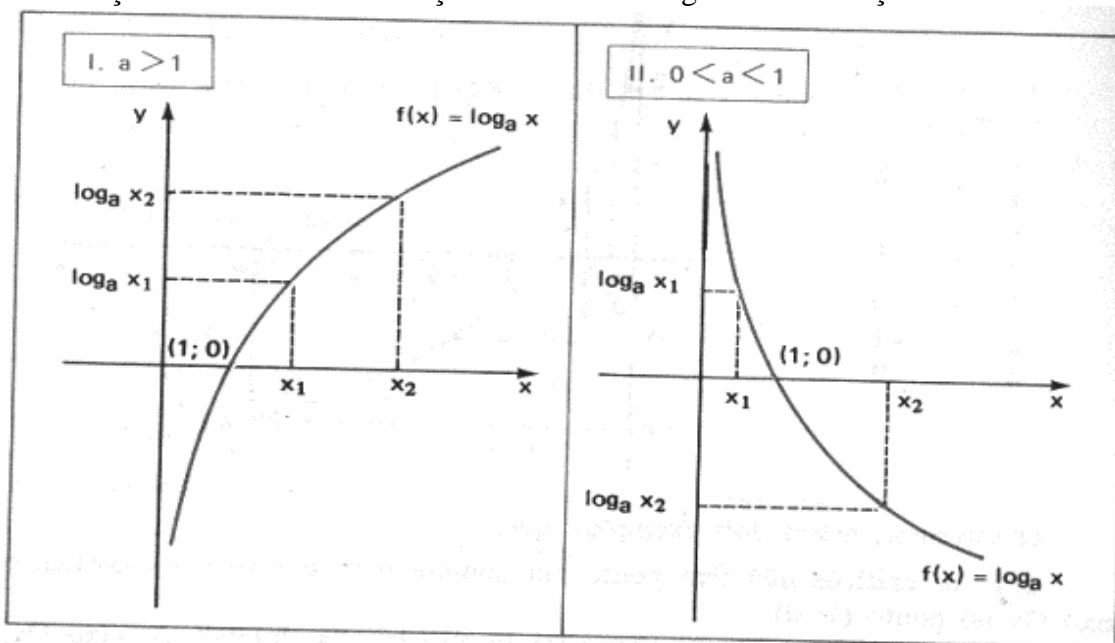
Exemplo 1: Fazer o gráfico da função  $f(x)=\log_2 x$ .

X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
Y	-2	-1	0	1	2

Exemplo 2: Fazer o gráfico da função  $f(x)=\log_{1/2} x$ .

X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
Y					

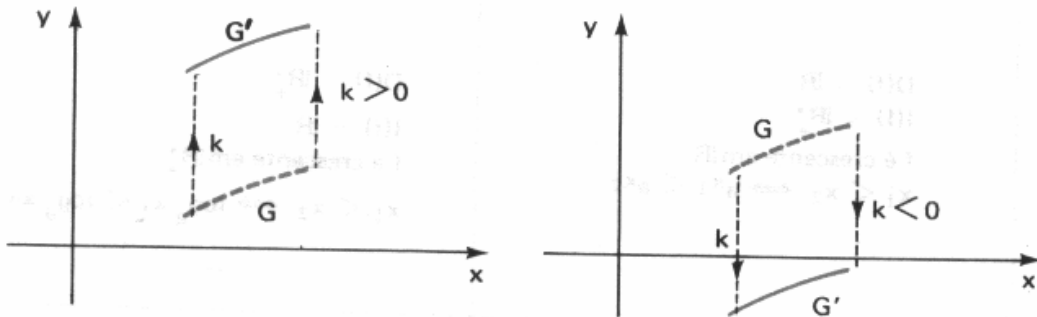
Observação: Gráfico I  $a > 1$  a função é crescente e o gráfico II a função é decrescente.



## Construção de Gráficos da função logarítmica

Seja G o gráfico da função definida por  $y=f(x)$  e seja  $k \neq 0$ .

- 1a) O gráfico  $G'$  da função  $y = f(x) + k$  pode ser obtido a partir de  $G$ , fazendo este sofrer uma *translação de  $k$  unidades*, na direção  $Oy$ , “para cima”, se  $k$  é positivo, ou “para baixo”, se  $k$  é negativo.



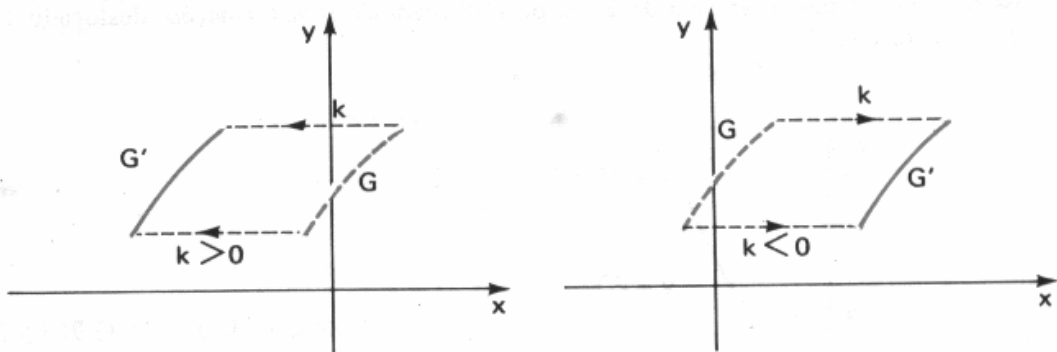
Exercícios

6. Esboce o gráfico das funções:

a)  $f(x) = 1 + \log_3 x$

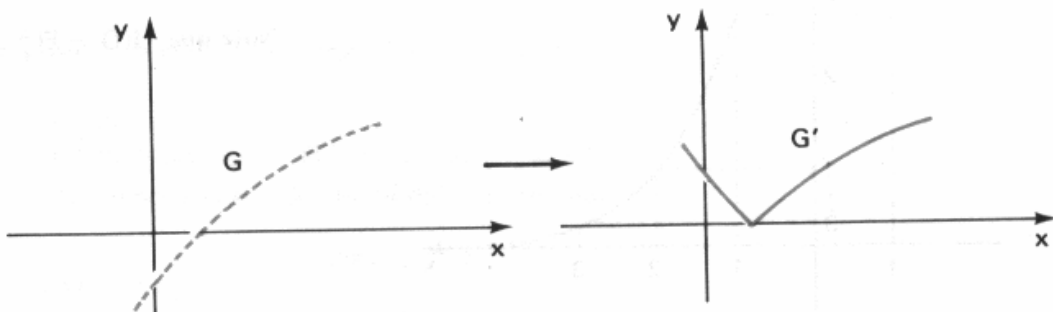
b)  $f(x) = -1 + \log_{1/3} x$

- 2a) O gráfico  $G'$  da função  $y = f(x + k)$  pode ser obtido a partir de  $G$ , fazendo este sofrer uma *translação de  $k$  unidades*, na direção  $Ox$ , “para a esquerda”, se  $k$  é positivo, ou “para a direita”, se  $k$  é negativo.



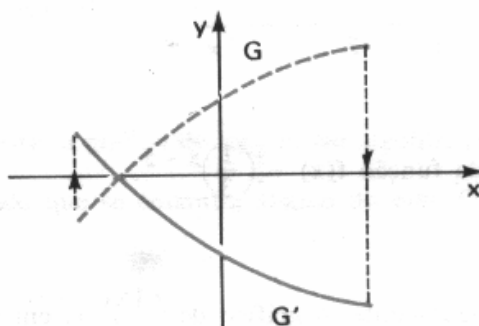
7. Esboce o gráfico da função  $f(x) = \log_2(x+1)$ .

- 4a) O gráfico  $G'$  da função  $y = |f(x)|$  pode ser obtido a partir de  $G$ , fazendo a *parte que está abaixo do eixo  $Ox$  sofrer uma reflexão em relação a  $Ox$* .



8. Esboce o gráfico da função  $f(x) = \log_3 |x|$ .
9. Esboce o gráfico da função  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ .
10. Esboce o gráfico da função  $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ .
11. Esboce o gráfico da função  $f(x) = |\log_2 |x||$ .
12. Esboce o gráfico da função  $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}}(x-1)| + 1$ .

3a) O gráfico  $G'$  da função  $y = -f(x)$  pode ser obtido a partir de  $G$ , fazendo este sofrer uma *reflexão em relação ao eixo  $Ox$* .



**Nota:** de modo análogo, o gráfico  $G'$  da função  $y = f(-x)$  pode ser obtido fazendo-se  $G$  sofrer uma *reflexão em relação ao eixo  $Oy$* .

13. Esboce o gráfico da função  $f(x) = -|\log_2 x|$ .

## Inequações Logarítmicas

Para aprendermos as **regras** de resoluções que envolvem logaritmos, lembremos inicialmente a definição:  $a^x = y$  equivale a dizer que  $\log_a y = x$ .

Do estudo da função exponencial, temos as equivalências:

$$\text{Se } a > 1 \rightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$\text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Para o estudo das inequações logarítmicas, temos:

$$\text{Se } a > 1 \rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

$$\text{Se } 0 < a < 1 \rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Exercícios

14. Resolva a inequação:  $\log_5(2x-3) < \log_5 7$ .

15. Resolva a inequação:  $\log_{\frac{1}{3}}(8-2x) \geq 3$ .

16. Resolva a inequação:  $\log_{12}(x-1) + \log_{12}(x-2) \leq 1$ .

17. Resolva a inequação:  $\log_{(x+4)} 3 > \log_{(x+4)} 7$ .

18. Resolva a inequação:  $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 8 - 7 \log_x \frac{1}{2}$ .

19. Resolva a inequação, sendo  $a > 1$  e  $a \neq 1$ :  $\log_a(2x-6) < \log_a(x+1)$ .

20. Determine o domínio da função  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)}$ .

21. Resolva a inequação  $3^{\frac{\log_1(x^2-5x+8)}{2}} > \frac{1}{3}$ .

## Questões de Vestibular

22. (FUVEST-SP) O número  $x > 1$  tal que  $\log_x 2 = \log_4 x$ , é:

a)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b)  $2^{\sqrt{2}}$

c)  $\sqrt{2}$

d)  $2\sqrt{2}$

e)  $4^{\sqrt{2}}$

23. (Uneb-BA) O número real  $x$ , tal que  $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$ , é:

a)  $-\frac{81}{16}$    b)  $-\frac{3}{2}$    c)  $\frac{81}{16}$    d)  $\frac{1}{2}$    e)  $\frac{3}{2}$

24. UF-ES) O valor da expressão  $m = \left[ \frac{\sqrt{0,25} + \frac{1}{3} \cdot (-6^2)}{\log_2\left(\frac{1}{64}\right)} \right]^{-\frac{1}{2}}$ , é:

a)  $\frac{1}{25}$    b)  $\frac{1}{2}$    c) 1   d)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$    e)  $2\sqrt{5}$

25. (F.Porto Alegre-RS) Se  $\log 8 = k$ , então  $\log 5$  vale:

a)  $k^3$

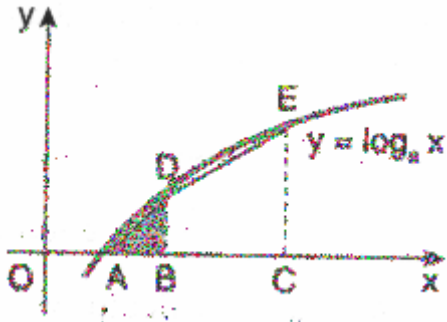
b)  $5k - 1$

c)  $\frac{2k}{3}$

d)  $1 + \frac{k}{3}$

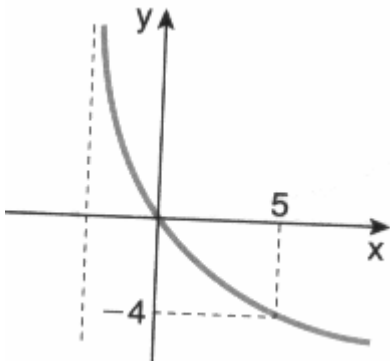
e)  $1 - \frac{k}{3}$

26. A curva da figura representa o gráfico da função  $y = \log_a x$  ( $a > 1$ ). Dos pontos  $B(2,0)$  e  $C(4,0)$  saem perpendiculares ao eixo das abscissas, as quais interceptam a curva em  $D$  e  $E$ , respectivamente. Se a área do trapézio retângulo  $BCED$  vale 3, prove que a área do triângulo  $ABD$ , onde  $A(1,0)$ , vale  $1/2$ .



27. (UF-MG) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função

$$f(x) = \log_2 \left( \frac{1}{ax + b} \right). \text{ Qual é o valor de } f(1)?$$



28. Determine  $m$  de modo que a equação de segundo grau (na variável  $x$ )  $x^2 - 4x + \log_2 m = 0$  apresente duas raízes reais e distintas.

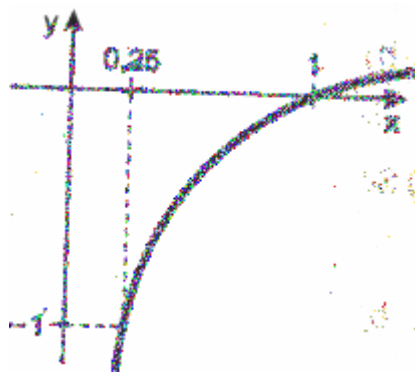
29. (UF-CE) Resolva a equação  $2 \cdot \log x + \log b - \log 3 = \log \left( \frac{9b}{x^4} \right)$ , onde  $\log$  representa o logaritmo decimal.

30. (VUNESP) Considere a função  $f$ , definida por  $f(x) = \log_a x$ . Se  $f(a) = b$  e  $f(a+2) = b+1$ , os respectivos valores de  $a$  e  $b$  são:

- a) 2 e 1
- b) 2 e 2
- c) 3 e 1
- d) 3 e 2
- e) 4 e 1

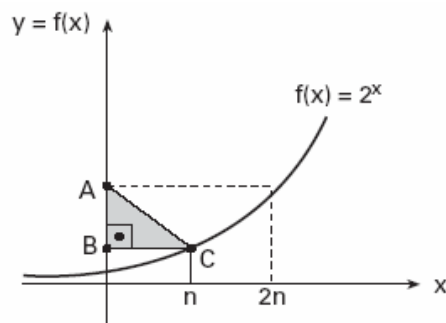
31. (FUVEST-SP) A figura abaixo mostra o gráfico da função logaritmo na base  $b$ . O valor de  $b$  é:

- a)  $\frac{1}{4}$
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 10



32. (ufscar 2004) Se a área do triângulo retângulo ABC, indicado na figura, é igual a  $3n$ , conclui-se que  $f(n)$

- a) 2  
 b)  $2\sqrt{2}$   
 c) 3  
 d)  $3\sqrt{2}$   
 e) 4



33. (ITA-73) O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece a função  $X(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$ , onde  $X(t)$  é o número de bactérias no tempo  $t \geq 0$ ;  $C$  e  $k$  são constantes positivas ( $e$  é a base do logaritmo neperiano). Verificando-se que o número inicial de bactérias  $X(0)$ , duplica em 4 horas, quantas se pode esperar no fim de 6 horas?

- a) 3 vezes o número inicial  
 b) 2,5 vezes o número inicial  
 c)  $2\sqrt{2}$  vezes o número inicial  
 d)  $2\sqrt[3]{2}$  vezes o número inicial  
 e) nenhuma das respostas anteriores

34. (CESGRANRIO-76) Uma substância radioativa esta em processo de desintegração, de modo que no instante  $t$ , a quantidade não desintegrada é  $A(t) = A(0) \cdot e^{-3t}$ , onde  $A(0)$  indica a quantidade de substância no instante  $t=0$ . O tempo necessário para que a metade da quantidade inicial se desintegre é:

- a)  $\frac{1}{3}$   
 b)  $2 \cdot e^{-3}$   
 c)  $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{e}$   
 d) *det er min ável somente se for conhecido o valor de  $A(0)$*   
 e)  $\frac{1}{3} \cdot \log_e 2$

35. //MACKENZIE 2005

O número  $N$  de bactérias de uma cultura é dado, em função do tempo  $t$ , em horas, por  $N(t) = 10^5 \cdot 2^{4t}$ . Supondo  $\log 2 = 0,3$ , o tempo necessário para que o número inicial de bactérias fique multiplicado por 100 é:

- a) 2 horas e 2 minutos  
 b) 2 horas e 12 minutos  
 c) 1 hora e 40 minutos  
 d) 1 hora e 15 minutos  
 e) 2 horas e 20 minutos

- 36.

Considere a equação em  $x$

$$a^{x+1} = b^{1/x},$$

onde  $a$  e  $b$  são números reais positivos, tais que  $\ln b = 2 \ln a > 0$ . A soma das soluções da equação é

- A) 0.
- B) -1.
- C) 1.
- D)  $\ln 2$ .
- E) 2.

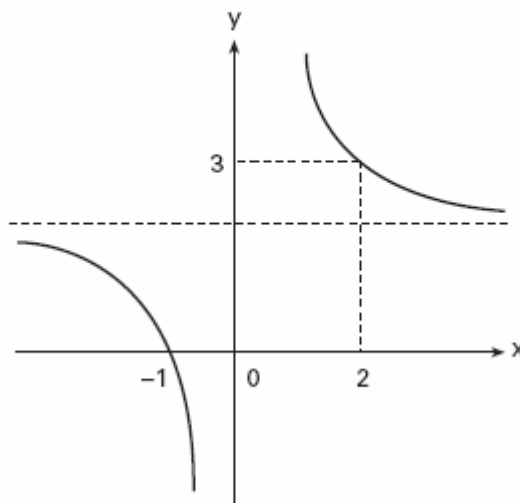
37. (MACKENZIE-2005)

Se  $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{x} = -1$ , então  $\log_4 x$  é igual a:

- a)  $\frac{1}{4}$
- b)  $\frac{1}{2}$
- c) -1
- d) 1
- e) -2

38. (MACKENZIE-2005)

Se a curva dada é o gráfico da função  $y = a + \frac{b}{x}$ , então o valor de  $ab$  é:



- a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- b)  $\sqrt{3}$
- c) 2
- d) 4
- e)  $\frac{1}{4}$

39. \\\

O valor real de  $x$ , tal que  $\log 2^x - \log 5^x - x - 1 = 0$ , pertence ao intervalo:  
**(Obs: Admita  $\log 2 = 0,3$ )**

- a)  $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$                       c)  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$                       e)  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$   
 b)  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$                       d)  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

40.

Se  $x$  e  $y$  são números reais positivos, tais que  $\begin{cases} x^4 \cdot y^{-2} = 81 \\ x^2 \cdot y^{-4} = 729 \end{cases}$ , então o produto  $x \cdot y$  é igual a:

- a) 3    d)  $\frac{1}{9}$   
 b)  $\frac{1}{3}$     e)  $\sqrt{3}$   
 c)  $3\sqrt{3}$

41. // MAKC 2005

O valor real de  $x$ , tal que  $\log_{\sqrt{5x+1}} - \log(1-5x) = 0$ , é um número:

- a) racional maior que zero.                      d) racional menor que zero.  
 b) irracional maior que zero.                      e) irracional menor que zero.  
 c) inteiro.

42.

Se  $\log_{a^2} \sqrt{5} + \log_{a^3} \sqrt{5} = \frac{5}{12}$ , então o valor de  $a$  é:

- a)  $\sqrt{5}$     c)  $\frac{1}{5}$     e)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
 b)  $5^2$     d) 5

43. MAKC 2005

Se os inteiros  $x$  e  $y$  satisfazem a equação  $3^{x+1} + 2^y = 2^{y+2} - 3^x$ , então o valor de  $3^x$  é:

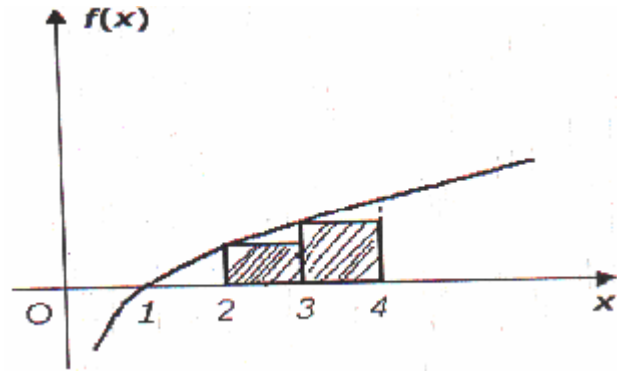
- a) 1    c)  $\frac{1}{9}$     e) 9  
 b)  $\frac{1}{3}$     d) 3

44. (ExPCex, out/2005, q08)

A curva da figura representa o gráfico da função  $f(x) = \log_2 x$ . Dados

$\log_{10} 2 = 0,30$  e  $\log_{10} 12 = 1,08$ . Com base nesses dados, a soma das áreas dos dois retângulos hachurados é, aproximadamente,

- ( ) 1,60
- ( ) 2,08
- ( ) 2,10
- ( ) 2,60 \*
- ( ) 3,60



45. (Vunesp-SP, bb48, page 54)

Se **a** e **b** são raízes da equação a seguir:

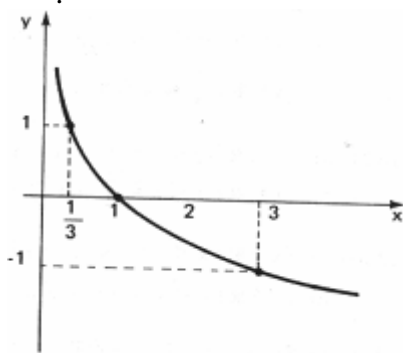
$$\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ com } x > 0, \text{ então } \mathbf{a+b} \text{ é igual a:}$$

Ⓜ c)

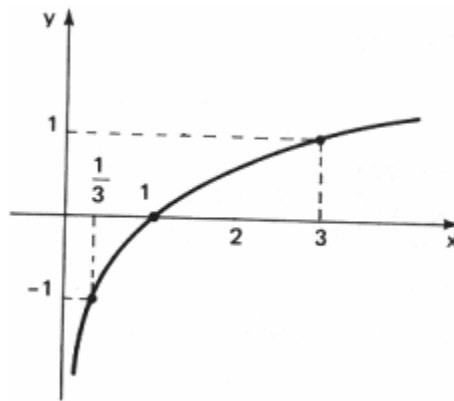
- a)  $\frac{2}{3}$
- b)  $\frac{3}{4}$
- c)  $\frac{3}{2}$
- d)  $\frac{4}{3}$
- e)  $\frac{4}{5}$

## Respostas:

- 1)  $Df = \{x \in \mathbb{R}; x > 13\}$  ou  $Df = ]13, +\infty[$
- 2)  $Df = (-\infty; \frac{4}{3}[ - \{1\}$
- 3)  $Df = ]2; 5[ - \{3\}$
- 4) a)  $x > 1/3$ ; b)  $\mathbb{R}^*$ ; c)  $x > -2$ ; d)  $x < -3$  ou  $x > -2$ ; e)  $-2 < x < 3$  e  $x \neq 2$ ; f)  $x < 1/2$
- 5) a)  $x > -5/2$  e  $x \neq -2$ ; b)  $x > 1$  e  $x \neq \sqrt{2}$ ; c)  $x > 3$ ; d)  $3 < x < 2\sqrt{3}$  e  $x \neq \sqrt{11}$ ; e)
- 6) /

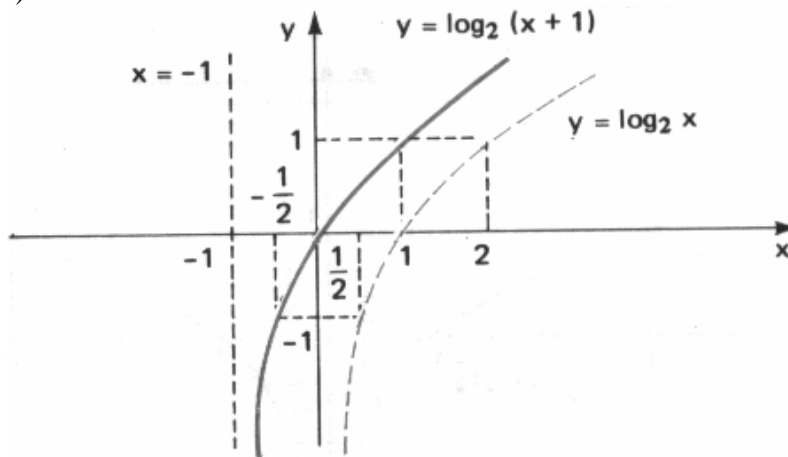


b)

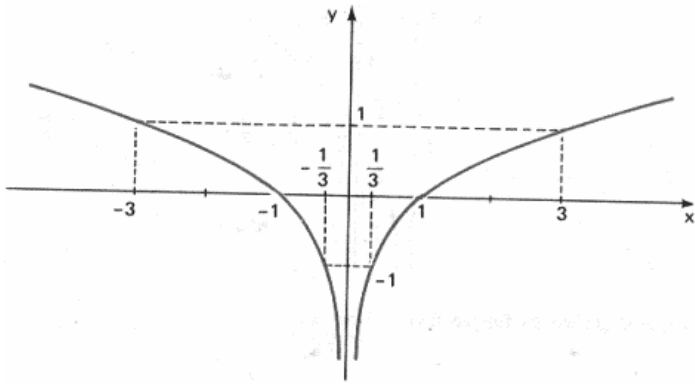


a)

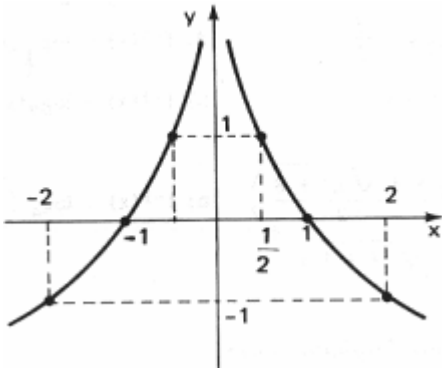
7)



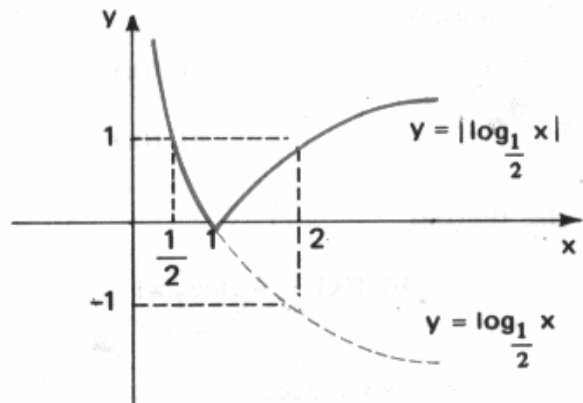
8)



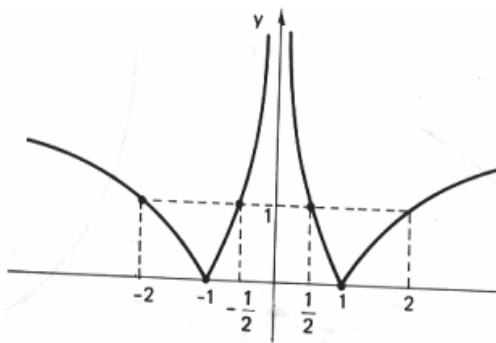
9)



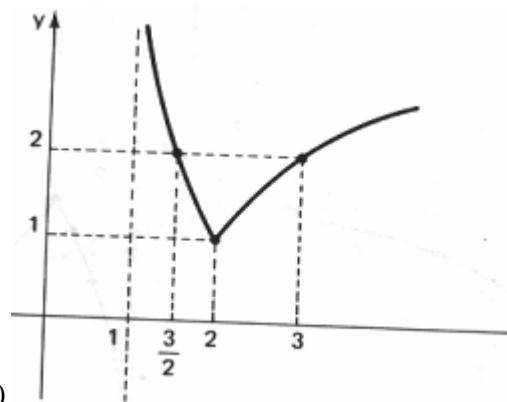
10)



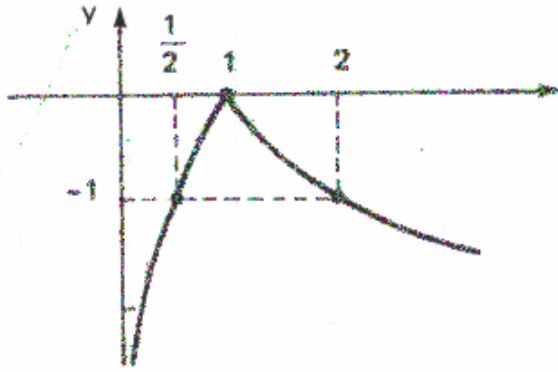
11)//



12)



13)/



14)  $\frac{3}{2} < x < 5$

15)  $\frac{215}{54} \leq x < 4$

16)  $2 < x \leq 5$

17) Como  $3 > 7$ , imponha:  $0 < x + 4 < 1$ .

18) Faça uma mudança de variável  $\log_{\frac{1}{2}} x = y$ , obtenha a inequação

$$\frac{y^2 - 8y + 7}{y} \geq 0 \text{ e resolva. Solução: } 0 < x \leq \frac{1}{128} \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

19)  $3 < x < 7$ , com  $0 < a < 1$ ;  $a > 1$ ,  $x > 7$

Encontre o domínio:  $x > 3$ ; e divida em dois casos: I.  $a > 1$ , resolva a inequação; II.  $0 < a < 1$  e resolva a inequação. Resposta: I.  $3 < x < 7$ ; II.  $x > 7$

20)  $1 < x \leq 2$

Condições de existência:  $\begin{cases} x > 0 \\ e \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$ , domínio da função:  $1 < x \leq 2$

21)  $2 < x < 3$

22)  $2^{\sqrt{2}}$

$$\log_x 2 = \log_4 x \rightarrow \frac{\log_4 2}{\log_4 x} = \log_4 x \rightarrow (\log_4 x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_4 x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 4^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = (2^2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{\sqrt{2}}$$

$$\log_4 x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 4^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = (2^2)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

Como no enunciado  $x > 1$ , segue que a resposta:  $2^{\sqrt{2}}$

23)  $\frac{81}{16}$

$$\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{9}{4} = x^{1/2} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^{1/2} \rightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

24) d)

$$\begin{aligned} m &= \left[ \frac{\sqrt{0,25} + \frac{1}{3}}{\log_2 \left(\frac{1}{64}\right)} \cdot (-6^2) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}}{\log_2 64^{-1}} \cdot (-36) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\log_2 (2^6)^{-1}} \cdot (-36) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \frac{\frac{3+2}{6}}{-6} \cdot (-36) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\frac{5}{6}}{-6} \cdot (-36) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{5}{-36} \cdot (-36) \right]^{-\frac{1}{2}} = [5]^{-1/2} = \left[\frac{1}{5}\right]^{+1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

25) e

$$\log 8 = k \rightarrow k = 3 \cdot \log 2 \rightarrow \log 2 = \frac{1}{3} k$$

$$\log 5 = ? \rightarrow \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{1}{3} k$$

26) A área do trapézio BCED =  $\frac{(\log_a 4 + \log_a 2) \cdot 2}{2} = 3$  e  $\log_a 2 = 1$ . A área do

triângulo ABD =  $\frac{1 \cdot \log_a 2}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ .

27) - 2

$$f(0) = \log_2 \left( \frac{1}{a \cdot 0 + b} \right) = \log_2 \frac{1}{b} = 0 \rightarrow \frac{1}{b} = 2^0 \rightarrow b = 1$$

$$f(5) = -4 \rightarrow f(5) = \log_2 \left( \frac{1}{a \cdot 5 + 1} \right) = -4 \rightarrow \frac{1}{5a + 1} = 2^{-4} \rightarrow 5a + 1 = 16$$

$$5a = 15 \rightarrow a = 3$$

$$f(1) = \log_2 \left( \frac{1}{3 \cdot 1 + 1} \right) = \log_2 4^{-1} = -2$$

28)  $0 < m < 16$

$$x^2 - 4x + \log_2 m = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot \log_2 m > 0 \rightarrow 16 - 4 \cdot \log_2 m > 0 \rightarrow 4 - \log_2 m > 0$$

$$\rightarrow -\log_2 m > -4 \rightarrow \log_2 m < \log_2 2^{-4} \rightarrow m < \frac{1}{6} \text{ e } m > 0$$

Resp:  $0 < m < \frac{1}{16}$

29)  $\sqrt{3}$

$$2. \log x + \log b - \log 3 = \log \left( \frac{9b}{x^4} \right) \rightarrow \log x^2 \cdot \frac{b}{3} = \log \left( \frac{9b}{x^4} \right) \rightarrow$$

$$x^2 \cdot \frac{b}{3} = \frac{9b}{x^4} \rightarrow x^6 = 27 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3}$$

30) a)

$$f(a) = \log_a a = 1 = b$$

$$f(a+2) = \log_2(a+2) = 1+1 \rightarrow a+2 = 2^2 \rightarrow a = 4-2 = 2$$

31) d) 4

$$f(0,25) = \log_b \frac{1}{4} = \log_b 2^{-2} = \log_b 2^{-2} = -1 \rightarrow \frac{1}{4} = b^{-1}$$

$$b = 4$$

32) 3

$$33) \begin{cases} X(t) = C \cdot e^{kt} \rightarrow X(0) = C \\ X(4) = C \cdot e^{4k} = 2 \cdot C \rightarrow k = \ln(2)^{1/4} \\ X(t) = C \cdot e^{t \cdot \ln(2)^{1/4}} = C \cdot e^{\ln 2^{t/4}} = C \cdot 2^{t/4} \\ X(6) = C \cdot 2^{6/4} = C \cdot 2^{3/2} = C \cdot \sqrt{2^3} = C \cdot 2\sqrt{2} \end{cases} \quad \textcircled{R} \quad 2\sqrt{2}$$

34) e)

35) /

Para obtermos o número inicial de bactérias, basta substituímos t por zero na função:

$$N(0) = 10^5 \cdot 2^4 \cdot 0 \quad \therefore \quad N(0) = 10^5.$$

Sendo t o tempo pedido, devemos ter:

$$10^5 \cdot 2^{4t} = 100 \cdot 10^5$$

$$2^{4t} = 100$$

$$\log 2^{4t} = \log 100$$

$$4t \log 2 = 2$$

$$4t \cdot 0,3 = 2$$

$$t = \frac{5}{3} \quad \therefore \quad t = \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \text{ horas}$$

Logo, t = 1 hora e 40 minutos.

Resposta: c

36) //

De  $\ln b = 2 \ln a$ , temos  $b = a^2$ .

De  $2 \ln a > 0$ , temos  $\ln a > 0$  e, portanto,  $a > 1$ .

Nessas condições, temos:

$$a^{x+1} = (a^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$x + 1 = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + x = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

As soluções dessa equação são reais e a soma delas é igual a  $-1$ .

**Resposta: B**

37)

De  $\log_2 \sqrt{x} + \log_2 \frac{1}{x} = -1$  e  $x > 0$ , temos:

$$\log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 x^{-1} = -1$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 x = -1$$

$$-\frac{1}{2} \log_2 x = -1$$

$$\log_2 x = 2 \quad \therefore \quad x = 4.$$

Portanto,  $\log_4 x = \log_4 4 = 1$ .

**Resposta: d**

38)//

Como  $(-1, 0)$  e  $(2, 3)$  pertencem à função, temos:

$$\begin{cases} 0 = a + \frac{b}{-1} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = a + \frac{b}{2} & (2) \end{cases}$$

Da igualdade em (1), temos  $a = b$ . Substituindo  $b$  por  $a$  em (2), temos:

$$3 = a + \frac{a}{2}$$

$$3 = \frac{3a}{2} \quad \therefore \quad a = 2.$$

Como  $a = b$ , temos  $b = 2$ , portanto  $a^b = 2^2 = 4$ .

**Resposta: d**

39)//

Do enunciado:

$$\log 2^x - \log 5^x - x - 1 = 0$$

$$x \cdot \log 2 - x \cdot \log 5 - x = 1$$

$$0,3x - x \log \frac{10}{2} - x = 1$$

$$-0,7x - x(\log 10 - \log 2) = 1$$

$$-0,7x - x(1 - 0,3) = 1$$

$$-1,4x = 1$$

$$\therefore x = -\frac{5}{7}.$$

Portanto  $x$  pertence ao intervalo  $[-1, -1/2]$ .

Resposta: b

40)

$$\begin{cases} x^4 \cdot y^{-2} = 81 \\ x^2 \cdot y^{-4} = 729 \end{cases} \therefore \frac{x^4 \cdot y^{-2}}{x^2 \cdot y^{-4}} = \frac{81}{729} \therefore x^2 y^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore xy = \frac{1}{3}$$

Resposta: b

41)//

Sendo  $\sqrt{5x+1} > 0$  e  $1-5x > 0$ , temos:  $\log \sqrt{5x+1} - \log(1-5x) = 0$

$$\log \sqrt{5x+1} = \log(1-5x)$$

$$\sqrt{5x+1} = 1-5x.$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa equação, temos:

$$5x+1 = 1-10x+25x^2$$

$$25x^2 - 15x = 0,$$

e, portanto,  $x = 0$  ou  $x = \frac{3}{5}$ .

Note-se agora que, para  $x = 0$ ,  $\sqrt{5x+1} = 1-5x$ ,  $\sqrt{5x+1} > 0$  e  $1-5x > 0$  são verdadeiras;

e, para  $x = \frac{3}{5}$ ,  $1-5x > 0$  é falsa.

Logo, 0 (zero) é solução e  $\frac{3}{5}$  não é solução.

Assim, o valor de  $x$  que satisfaz a equação é um número inteiro.

Resposta: c

42)//

De  $\log_{a^2} \sqrt{5} + \log_{a^3} \sqrt{5} = \frac{5}{12}$ , com  $a > 0$  e  $a \neq 1$ , temos:

$$\frac{1}{2} \log_a \sqrt{5} + \frac{1}{3} \log_a \sqrt{5} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{5}{6} \log_a \sqrt{5} = \frac{5}{12} \quad \therefore \log_a \sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

Assim,  $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$  e, portanto,  $a = 5$ .

**Resposta: d**

43) \

De  $3^{x+1} + 2^y = 2^{y+2} - 3^x$ , temos:

$$3 \cdot 3^x + 2^y = 2^2 \cdot 2^y - 3^x$$

$$3 \cdot 3^x + 3^x = 4 \cdot 2^y - 2^y$$

$$4 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^y$$

$$\frac{3^x}{2^y} = \frac{3^1}{2^2} \quad (*)$$

Uma possibilidade é  $(x, y) = (1, 2)$ , e nesse caso  $3^x = 3$ .

Vamos mostrar que essa solução é única, com  $x$  e  $y$  inteiros.

De (\*), temos:  $\frac{3^x}{3} = \frac{2^y}{2^2}$

$$3^{x-1} = 2^{y-2}$$

Com  $x - 1 \neq 0$  e considerando os logaritmos, na base 2, de ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$\log_2 3^{x-1} = \log_2 2^{y-2}$$

$$(x-1) \log_2 3 = y-2$$

$$\log_2 3 = \frac{y-2}{x-1}$$

Com  $x$  e  $y$  inteiros, essa equação não tem solução, pois  $\frac{y-2}{x-1}$  é um número racional, enquanto  $\log_2 3$  é um número irracional (vide nota!).

Nota:

Se  $\log_2 3$  fosse um número racional, poderíamos, sem perda de generalidade, afirmar que existiriam inteiros

positivos  $a$  e  $b$  tais que  $\log_2 3 = \frac{a}{b}$ . Teríamos:  $2^{\frac{a}{b}} = 3$   
 $2^a = 3^b$

Isto é absurdo, pois  $2^a$  é um número par, enquanto  $3^b$  é um número ímpar.

**Resposta: d**

$$??? - \sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$$

Referências bibliográficas

Bb48. Scipione di Pierro Neto, Sérgio Orsi Filho — *Quanta, Matemática em Fascículos para o Ensino Médio — Fascículo 5*, 1ª. Edição, Editora Saraiva, 2000