

1. Usando a definição, ache as derivadas dadas abaixo:

a)  $f(x) = 4x^2 - 1$

Resolvendo:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x + \Delta x)^2 - (4x - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - (4x^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 4x^2 + 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x + 4(\Delta x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{8x + 4(\Delta x)}{1} = 8x$$

$f'(x) = 8x$

b)  $f(x) = 2x^3$

Resolvendo:

$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$\left\{ \begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - 2x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 2x^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6x^2 + 6x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6x^2 + 6x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2)}{1} = 6x^2 + 6x \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ f'(x) &= 6x^2 \end{aligned} \right.$$

c)  $f(x) = x^2 - 3x + 1$

resolução:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \hat{=} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x + 3\Delta x + 1 - (x^2 - 3x + 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = 2x + 3$$

2. Mostre que cada das funções dadas abaixo não tem derivadas no ponto indicado:

a)  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x_0 = 0$

Resolução:

Devemos calcular os limites laterais (derivadas)

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

Observamos que no ponto  $x_0=0$  as derivadas são diferentes, logo não existe derivada nesse ponto.

$$b) f(x) = |x-2| = \begin{cases} -x+2, & \text{se } x < 2 \\ x+2, & \text{se } x > 2 \end{cases} \rightarrow x_0 = 2$$

Resolução:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x+2}{x-2} = -1$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

Observamos que no ponto  $x_0=2$  as derivadas são diferentes, logo não existe derivada nesse ponto.

3. Determine as constantes  $a$  e  $b$  de modo que  $f$  seja derivável em  $x=1$ , sendo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Resolução:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax, & \text{se } x \leq 1 \\ -1x^{-2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Fazendo: } 2ax = -\frac{1}{x^2}, \rightarrow 2a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + b, & \text{se } x \leq 1 \\ x^{-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + b = (1)^{-1} \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

4. Ache as derivadas das funções abaixo, supondo que  $a$  e  $b$  são constantes:

$$4.1 f(x) = \frac{3}{x^4} + 2\sqrt[4]{x^3} - x + 3$$

Resolvendo:  $f(x) = 3x^{-4} + 2x^{3/4} - x + 3$  e sua derivada é

$$f'(x) = -12x^{-5} + 2x^{-1/4} - 1 = -\frac{12}{x^5} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}} - 1$$

$$4.2 f(x) = \frac{2}{x^5} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} \text{ resolvendo } f'(x) = \frac{-10x^4}{(x^5)^2} + \frac{6/5}{(\sqrt[5]{x^2})^2}$$

$$4.3 f(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x - 1 \rightarrow f'(x) = 24x^3 - 9x^2 + 2$$

A regra é  $f(x) = x^n$  a sua derivada é  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$4.4 f(x) = \frac{ax^6 + b}{a^2 + b^2} \rightarrow f'(x) = \frac{6ax^5}{a^2 + b^2}$$

$$4.5 f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x^3 \sqrt{x}} = a \cdot x^{-\frac{2}{3}} - b \cdot x \cdot x^{\frac{1}{3}} = a \cdot x^{-\frac{2}{3}} - b \cdot x^{\frac{4}{3}}$$

Derivada  $\rightarrow f'(x) = -\frac{2a}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} - b \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot x^{\frac{1}{3}}$

4.6  $f(x) = 3x\sqrt[5]{x^4} + 3e^x - 2 \ln x = 3x \cdot x^{\frac{4}{5}} + 3e^x - \ln x^2$  **à** encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{9}{5} \cdot x^{\frac{4}{5}} + 3e^x - \frac{2x}{x^2}$$

4.7  $f(x) = \frac{a}{2x-1} - \frac{1}{x} = 2 \cdot (2x-1)^{-1} - x^{-1}$

Resolução:  $f(x) = \frac{a}{2x-1} - \frac{1}{x} = a \cdot (2x-1)^{-1} - x^{-1}$

encontrando a primeira derivada  $f'(x) = -1 \cdot a \cdot (2x-1)^{-2} \cdot (2a) + x^{-2}$

$$= -\frac{2 \cdot a^2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}$$

4.8  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  Resolução: encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$$

4.9  $f(x) = \frac{4x}{x-1}$  Resolução: encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = -\frac{4 \cdot (x-1) - 4x \cdot 1}{(x-1)^2}$$

4.10  $f(x) = \frac{2-x^2}{4-x+x^2}$  **Resolução:** encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{-2x(4-x+x^2) - (2-x^2)(-1+2x)}{(4-x+x^2)^2}$$

4.11  $f(x) = \frac{x}{e^x}$  **à** Resolução: encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

4.12  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$  **à** Resolução: encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1 + \ln x}{(\ln x)^2}$$

4.13  $f(x) = \ln x - \log x - \ln a \cdot \log_a x$  encontrando a primeira derivada

1º. Modo  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \log_{10} e - \ln a \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot (1 - \log_{10} e - \ln a)$

2º. Modo: Aplicando as propriedades de logaritmos a função dada

$$f(x) = \ln x - \log x - \ln a \cdot \log_a x = \ln x - \frac{\ln x}{\ln 10} - \ln a \cdot \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{\ln 10} - \ln x = \ln x \cdot \left(1 - \frac{1}{\ln 10} - 1\right) = -\frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$$

A primeira derivada  $f'(x) = -\frac{1}{\ln 10} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$

4.14  $f(x) = 32^x + 2 \cdot \log_3 x$  Resolução: encontrando primeira derivada

$$f'(x) = 1 \cdot 32^x \cdot \ln 32 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_3 e$$

4.15  $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x \cdot \ln x - x}{(\ln x)^2} = \frac{x(2 \cdot \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

4.16  $f(x) = (3 + 2x^2)^4$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada  $f'(x) = 4 \cdot (3 + 2x^2)^3 \cdot (4x)$

4.17  $f(x) = (2x - x^3)^5$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada  $f'(x) = 5 \cdot (2x - x^3)^4 \cdot (2 - 3x^2)$

4.18  $f(x) = (2a + 3bx)$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada  $f'(x) = 2 \cdot (2a + 3b \cdot x) \cdot (3b)$

4.19  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/3}$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{-2/3} \cdot (2x) = \frac{2x}{3 \cdot (x^2 + 1)^{2/3}}$$

4.20  $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3} = (a + bx^3)^{1/3}$

**Resolução:** encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (a + b \cdot x^3)^{-2/3} \cdot (3bx^2) = \frac{3bx}{3 \cdot (a + bx^3)^{2/3}}$$

4.21  $f(x) = \frac{3}{56 \cdot (2x-1)^7} - \frac{3}{24 \cdot (2x-1)^6} - \frac{3}{40 \cdot (2x-1)^5}$

**Resolução:** Preparando a função

$$f(x) = \frac{3 \cdot (2x-1)^{-7}}{56} - \frac{3 \cdot (2x-1)^{-6}}{24} - \frac{3 \cdot (2x-1)^{-5}}{40} \text{ encontrando a primeira derivada}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (-7) \cdot (2x-1)^{-8} \cdot (2)}{56} - \frac{3 \cdot (-6) \cdot (2x-1)^{-7} \cdot (2)}{24} - \frac{3 \cdot (-5) \cdot (2x-1)^{-6} \cdot (2)}{40}$$

$$f'(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{3}{24(2x-1)^6} - \frac{3}{40(2x-1)^5}$$

4.22  $f(x) = 5.e^{3x} + \log(2x)$  encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 5.3.e^{3x} \cdot \ln e + \frac{2}{2x} \cdot \log_{10} e$$

4.23  $f(x) = 5.e^{-x^2}$  encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 5.(-2x).e^{-x^2} \cdot \ln e = -10.e^{-x^2}$$

4.24  $f(x) = x^2 \cdot 10^{2x}$  encontrando a primeira derivada ( $w=u \cdot v$ )

$$w' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad f'(x) = 2x \cdot 10^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot 10^{2x} \cdot \ln 10 = 2x10^{2x} \cdot (1 + x \cdot \ln 10)$$

4.25  $f(x) = \ln(2x + 7)$  encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+7)} \cdot \log_e e$$

4.26  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$  encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - x^2}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{x^2 + 2}{x^2(x+1)}$$

4.27  $f(x) = x^2 \cdot \ln(1-x)$ , encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(1-x) + x^2 \cdot \frac{-1}{1-x} = 2x \ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x}$$

4.28  $f(x) = 2^{3x^2+1} + \log(x^2 + 3)$ , encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = (6x) \cdot 2^{3x^2+1} + \frac{2x}{x^2 + 3} \cdot \log_{10} e$$

4.29  $f(x) = -3 \cdot \text{sen} x + 9 \sec x$ , encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = -3 \cos x + 9(1) \sec x \cdot \text{tg} x$$

4.30  $f(x) = x \cdot \text{sen} x + \cos x$ , encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 1 \cdot \text{sen} x + x \cdot \cos x - \text{sen} x = x \cdot \cos x$$

4.31  $f(x) = 2 \cdot \text{sen} x \cdot \cos x = \text{sen} 2x$  encontrando a primeira derivada

$$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x \quad \text{ou} \quad f'(x) = 2[\cos x \cdot \cos x - \text{sen} x \cdot \cos x] =$$

$$f'(x) = 2[\cos^2 x - \text{sen}^2 x] = 2 \cdot \cos 2x$$

$$4.32 \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \text{ encontrando a primeira derivada}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)[\operatorname{sen} x - \cos x - \operatorname{sen} x - \cos x]}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$$

5. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$

$$a) \quad f(x) = 2x^3 + 3x - 1 \rightarrow f'(x) = 6x^2 + 3 \rightarrow f'(1) = 9$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1 - 1 = 4$$

$$\text{Equação da reta tangente } y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{a} \quad y - 4 = 9 \cdot (x - 1)$$

$$\text{Equação da reta normal } y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} \quad y - 4 = -\frac{1}{9} \cdot (x - 1)$$

$$b) \quad f(x) = \operatorname{tg} x \text{ e } x_0 = \frac{p}{4} \hat{a} \quad f\left(\frac{p}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{p}{4}\right) = 1$$

$$\text{Derivada da função } \begin{cases} f(x) = \operatorname{tg} x \text{ em } x_0 = \frac{p}{4} \\ f'\left(\frac{p}{4}\right) = \left(\sec \frac{p}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Equação da reta tangente } y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{a} \quad y - 1 = 2 \cdot \left(x - \frac{p}{4}\right)$$

$$\text{Equação da reta normal } y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} \quad y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{p}{4}\right)$$

6. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 4$  que è

a) Horizontal

**Resolução**

$$\text{Derivada da função } f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 4 \hat{a} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$

A reta tangente ao gráfico de uma nos pontos em que essa função atinge um máximo ou um mínimo, ou seja, primeira derivada igual a zero  $\hat{a} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$$\text{Raízes dessa última equação } x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = -2$$

$$\text{Resposta } f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \text{ ou } f(-2) = 0$$

b) Paralela à reta  $2y + 8x - 5 = 0$

Resolução

$$\begin{cases} 2y = -8x + 5 \rightarrow y = -4x - \frac{5}{2} \\ f'(x) = -4 = 3x^2 + 4x - 4 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} f(0) = ? \\ f\left(\frac{4}{3}\right) = ? \end{cases}$$

$$\text{Equação da reta tangente } y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{=} \begin{cases} y - f(0) = -4(x - 0) \\ y - f\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(x - \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

7. Ache a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2 - 3x$  que é perpendicular à reta  $2y + x = 3$ .

Resolução

$$f(x) = x^2 - 3x \text{ primeira derivada } f'(x) = 2x - 3$$

$$\text{coeficiente da reta dada } 2y = -x + 3 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{coeficiente da reta perpendicular a reta dada } a_p = +2$$

$$\text{Igualando a primeira derivada ao coeficiente } a_p = +2, \text{ temos } 2x - 3 = 2 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Equação da reta tangente } y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{=} \begin{cases} y - f\left(\frac{5}{2}\right) = -2\left(x - \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

8. Caso exista, determine o(s) ponto(s) da curva  $f(x) = \frac{1}{x}$ , no qual a reta tangente è

Paralela à

$$\text{a) } 2^{\text{a}}. \text{ Bissetriz } \hat{=} y = -x \text{ coeficiente } a = -1$$

$$\text{Resolução } f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Igualando a primeira derivada ao coeficiente da reta  $y = -x$

$$\text{Temos } f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Para } x = 1 \hat{=} f(1) = 1 \text{ e ponto } P(1, 1)$$

$$\text{Para } x = -1 \hat{=} f(-1) = -1 \text{ e ponto } Q(-1, -1)$$

$$\text{b) } 1^{\text{a}}. \text{ Bissetriz } \hat{=} \text{ è a reta } y = x \text{ e seu coeficiente } a = +1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Igualando a primeira derivada ao coeficiente da reta  $y = x$ , isto è,  $a = +1$

$$\text{Temos } f'(x) = -\frac{1}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = -1$$

Resposta não reta tangente e paralela a reta  $y = x$ .

9. Ache  $\frac{dy}{dx}$  nos casos abaixo

a)  $3x+4y=8$  à resolução, derivando implicitamente  $3 + 4\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$

b)  $x^2 + y^2 = 25$  resolução, derivando implicitamente  $2xdx + 2y.dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

c)  $x^3 + y^3 = x.y \rightarrow$

Resolução

$$3x^2 dx + 3y^2 dy = dx.y + x.dy \quad \text{à} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-3x^2}{3y^2-x}$$

d)  $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$

Resolução

$$y^2 + 2xy^2 - 3x = -1 \rightarrow 2ydy + 2(x.dx.y^2 + x.2y.dy) - 3dx = 0$$

Fazendo as simplificações necessárias  $\frac{dy}{dx} = \frac{3-2.y^2}{2y+4x.y}$

10. Achar a equação da reta tangente a cada curva abaixo, no ponto da mesma de abscissa  $x_0$

a)  $y=2x^3+x^2-x$  em  $x_0=1$

resolução

$$y=2x^3+x^2-x \text{ em } x_0=1, \text{ sua derivada e } \dots \begin{cases} f'(x) = 6x^2 + 2x - 1 \\ f'(1) = 6 + 2 - 1 = 7 \\ f(1) = 2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}$$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$  à  $y - 2 = 7.(x - 1)$

b)  $y=2.e^x$

resolução:

$$\begin{cases} f(x) = 2.e^x \rightarrow f'(x) = 2.e^x \\ f(1) = 2.e^1 \rightarrow f'(1) = 2.e^1 \end{cases}$$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$  à  $y - 2.e = 2.e.(x - 1)$

Equação da reta normal  $y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1}.(x - x_0)$  à  $y - 2.e = -\frac{1}{2.e}.(x - 1)$

c)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  em  $x_0 = 1$

Resolução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \quad f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad \text{à}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3} \quad e \quad f(1) = 1$$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$  à  $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

Equação da reta normal  $y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 1 = -\frac{3}{1} \cdot (x - 1)$

d)  $x^2 \cdot y^3 = 0$  em  $x_0 = 8$

resolução:

Derivando implicitamente, temos:

$$2x \cdot dx - 3 \cdot y^2 \cdot dy = 0 \rightarrow 2x \cdot dx = 3 \cdot y^2 \cdot dy \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

Para  $x_0 = 8 \hat{e} y^3 = 8^2 = (2^3)^2 \rightarrow y = 4 e$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 4^2} = \frac{1}{3}$$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 4 = \frac{1}{3} \cdot (x - 8)$

Equação da reta normal  $y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 4 = -\frac{3}{1} \cdot (x - 4)$

e)  $(1 - x + y)^3 = x + 7$

Resolução:

Derivando implicitamente  $3 \cdot (1 - x + y)^2 \cdot \left(-1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{3 \cdot (1 - x + y)}$

Para  $x_0 = 1 \hat{a} y_0 = ?$

$$(1 - 1 + y)^3 = 1 + 7 \rightarrow y_0 = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{3 \cdot (1 - 1 + 2)} = \frac{7}{6}$$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 2 = \frac{7}{6} \cdot (x - 1)$

Equação da reta normal  $y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 2 = -\frac{6}{7} \cdot (x - 1)$

f)  $x \cdot y = 2$  em  $x_0 = 2$

resolução:

Para  $x_0 = 2 \hat{a} y_0 = 1$

derivando  $1 \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$

Equação da reta tangente  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)$

Equação da reta normal  $y - y_0 = -[f'(x_0)]^{-1} \cdot (x - x_0) \hat{a} y - 1 = -\frac{2}{1} \cdot (x - 2)$

11. /

12. /

13. Um foguete de brinquedo é disparado verticalmente no ar e, no instante  $t$ , sua altura é dada por  $s(t) = 160t - 16t^2$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $s$  em metros. Determine:

a) a velocidade média no intervalo de tempo  $[2; 4]$ ;

resolução:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{160 \times 4 - 16 \times 4 - (160 \times 2 - 16 \times 2)}{4 - 2}$$

b) sua velocidade inicial;

resolução:

$$s'(t) = 160 - 32t \rightarrow s'(0) = 160 - 0 = 160 \text{ m/s}$$

c) sua velocidade, 2 segundos após o lançamento;

resolução:

$$s'(t) = 160 - 32t \rightarrow s'(2) = 160 - 32 \times 2 = 96 \text{ m/s}$$

d) a altura máxima que o foguete atingirá;

resolução:

$$\text{altura máxima: } \begin{cases} s'(t) = 0 \rightarrow s'(t) = 160 - 32t \rightarrow 160 - 32t = 0 \rightarrow t = 5 \\ s(5) = 160 \times 5 - 16 \times 25 = 400 \text{ metros} \end{cases}$$

e) quantos segundos levará o foguete para retornar ao solo;

resolução:

$$\text{alcance máximo: } s(t) = 0 \rightarrow s(t) = 160t - 16t^2 \rightarrow 160t - 16t^2 = 0 \rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 10$$

f) qual será sua velocidade ao atingir o solo;

resolução:

$$s'(t) = 160 - 32t \rightarrow s'(10) = 160 - 32 \times 10 = -160 \text{ m/s}$$

14. Numa certa fábrica, o custo total de fabricação de  $q$  unidades é

$$c(q) = 0,2 \cdot q^2 + q + 900 \text{ reais. Sabe-se que, aproximadamente,}$$

$q(t) = t^2 + 100t$  unidades, são produzidas durante as  $t$  primeiras horas de jornada de trabalho. Qual será a taxa de variação, em relação ao tempo, do custo total de fabricação, uma hora após o início do trabalho diário?

Resolução:

$$\begin{cases} c(q) = 0,2 \cdot q^2 + q + 900 \rightarrow c'(q) = 0,4 \cdot q + 1 \\ q(t) = t^2 + 100t \rightarrow q'(t) = 2t + 100 \rightarrow q'(1) = 2 + 100 = 102 \\ q(1) = 1 + 100 = 101 \\ c'(q(1)) = \frac{4}{10} \cdot 101 \cdot 102 + 102 = 4.192,20 \end{cases}$$

15. Quando um certo produto é vendido por  $p$  reais cada, os consumidores locais

compram  $D(p) = \frac{8000}{p}$  unidades por mês. Estima-se que daqui a  $t$  meses o preço de

cada unidade será  $p(t) = 0,04 \cdot t^{3/2}$  reais. Daqui a 20 meses, qual será a taxa de variação da demanda mensal do produto em relação ao tempo?

Resolução:

$$\left\{ \begin{array}{l} D(p) = \frac{8000}{p} \rightarrow D(t) = \frac{8000}{\frac{4}{100}t^{3/2}} = \frac{800000}{4}t^{-3/2} \\ p(t) = \frac{4}{100}t^{3/2} \\ D'(t) = -\frac{3}{2} \cdot 200000t^{-5/2} \rightarrow D'(20) = -\frac{3}{2} \cdot 200000 \cdot (20)^{-5/2} \end{array} \right.$$

16. Um importador de café brasileiro calcula que consumidores locais comprarão aproximadamente  $D(p) = \frac{4374}{p^2}$  quilogramas de café por semana, quando o preço do café brasileiro for de  $p$  dólares por quilograma. Estima-se que daqui a  $t$  semanas o preço do café brasileiro importado será de  $p(t) = 0,02.t^2 + 0,1.t + 6$  dólares por quilograma. Qual será a taxa de variação da demanda semanal de café daqui a 10 semanas ?

**Resolução:**

$$D(p) = \frac{4374}{p^2} = 4374.p^{-2} \rightarrow \frac{Dp}{dt} = -8748.p^{-3} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$p(t) = 0,02.t^2 + 0,1.t + 6 \rightarrow \frac{dp}{dt} = 0,04.t + 0,1$$

$$\frac{dp}{dt} = 0,04 \cdot 10 + 0,1 = \frac{1}{2}$$

$$p(10) = 2 + 1 + 6 = 9$$

$$\frac{Dp}{dt} = -8748 \cdot \frac{1}{9^3} \cdot \frac{1}{2} = -6$$

17. Calcule os limites a seguir usando a regra de L'Hospital

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(px)}{\text{sen}(3px)}$

**Resolução:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(px)}{\text{sen}(3px)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \cdot \cos(p \cdot x)}{3 \cdot p \cdot \cos(3px)} = \frac{p}{3 \cdot p} = \frac{1}{3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(2x)}{x + \text{sen}(3x)}$

**Resolução:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen}(2x)}{x + \text{sen}(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos(2x)}{1 + 3 \cos(3x)} = \frac{1 - 2}{1 + 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\text{sen}(e^x)}$

**Resolução:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\text{sen}(e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x \cdot \cos(e^x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(e^x)} = 1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \cos ec(p \cdot x)$

**Resolução:**  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \operatorname{cosec}(p \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2)}{\operatorname{sen}(p \cdot x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{p \cdot \cos(p \cdot x)} = -\frac{2}{-p} = \frac{2}{p}$

18. /

19. /

20. /

21. Em que ponto da curva  $y=2+x^2$ , a reta tangente tem ângulo de inclinação  $\frac{p}{3}$  rad ?

$$y = 2 + x^2 \rightarrow y' = 2x = \operatorname{tg} \frac{p}{3} = \sqrt{3}$$

**Resolução:**

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = 2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{11}{4} \quad \text{resposta: } P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{11}{4}\right)$$

22. Seja  $f(x) = b - \frac{x^4}{16}$ . Determine a constante **b**, de modo que a reta que passa pelos pontos M(0, 5) e N(5/2, 0), seja tangente ao gráfico de *f*.

**Resolução:**  $f(x) = b - \frac{x^4}{16} \rightarrow f'(x) = -\frac{4}{16}x^3$

Coefficiente angular da reta r:  $\operatorname{tg} q = f'(x)$

Equação da reta r:  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 5/2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y = -2x + 5 \rightarrow \operatorname{tg} q = f'(x) = -2 = -\frac{x^3}{4}$

x=2

Interseção da reta tangente com a curva:  $f(x) = b - \frac{x^4}{16} = -2x + 5 \rightarrow b = 2$

23. /digitar

24. /digitar

25. Uma epidemia de gripe atinge uma cidade do Nordeste do país. Os funcionários da saúde pública calcularam que o número de pessoas atingidas pela gripe no tempo *t* (medido em dias a partir do dia da epidemia) foi de aproximadamente,

$$P(t) = 60t^2 - t^3, \text{ no intervalo, } 0 \leq t \leq 40. \text{ Qual a razão da expansão da gripe em } t=30?$$

**Resolução:**

26. Uma análise da produção diária de uma linha de montagem, mostra que cerca de

$$\left(60t + t^2 - \frac{t^3}{12}\right) \text{ unidades são produzidas após } t \text{ horas de trabalho, } 0 \leq t \leq 8. \text{ Qual a}$$

razão de produção (em unidades por hora) quanto  $t=2$ ? @ 63 unidades por hora

**Resolução:**

$$u(t) = 60t + t^2 - \frac{t^3}{12} \rightarrow u'(t) = 60 + 2t - \frac{t^2}{4} \rightarrow u'(2) = 60 + 4 - 1$$

27. Um líquido goteja em um grande recipiente. Após  $t$  horas, há  $(5t - t^{1/2})$  litros no recipiente. Qual a razão de gotejamento de líquido no recipiente ( em litros por hora) quando  $t=4$ ?  $\textcircled{R}$   $(19/4)$  litros/hora.

**Resolução:**

$$q(t) = 5t - t^{1/2} \rightarrow q'(t) = 5 - \frac{1}{2t^{1/2}}$$

$$q'(4) = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

28. Suponha que o peso em gramas de um tumor canceroso no tempo  $t$  é  $w(t) = 0,1.t^2$ ; onde  $t$  é medido em semanas. Qual a razão do crescimento do tumor ( em gramas por semana) quanto  $t=5$ ?  $\textcircled{R}$  1 grama por dia

**Resolução:**

$$w(t) = 0,1.t^2 \rightarrow w'(t) = 0,2.t \rightarrow w'(5) = 1$$

29. Após uma campanha publicitária as vendas de um produto inicialmente cresceram e depois decresceram. Suponha que  $t$  dias após o fim da campanha publicitária as vendas diárias eram  $(-3t^2 + 30.t + 100)$  unidades. A que razão ( em unidades por dia) as vendas mudavam quanto  $t=2$ ?  $\textcircled{R}$  18 unidades por dia

**Resolução:**

$$v(t) = (-3t^2 + 30.t + 100) \rightarrow v'(t) = -6t + 30$$

$$\text{Para } t=2 \rightarrow v'(2) = -6.2 + 30 = 18$$

30. Suponha que  $t$  horas após ser sido colocada num freezer, a temperatura de uma peça de carne seja dada por  $C(t) = 70 - 12.t + \frac{4}{t+1}$  graus, onde  $0 \leq t \leq 5$ . Qual a velocidade de redução de sua temperatura após um hora?  $\textcircled{R}$   $v_t = -13$

**Resolução:**

$$C(t) = 70 - 12.t - \frac{4}{t+1} = 70 - 12.t - 4.(t+1)^{-1}$$

$$C'(t) = -12 - \frac{4}{(t+1)^2} \rightarrow C'(1) = -12 - \frac{4}{(1+1)^2} = -12 - 1 = -13$$