El zoo de las bases de numeración

Jorge Alonso[*]

Vigo, 09/2006 — v1.0
publicado inicialmente en *Tio Petros*[**]

Imaginemos que existe un zoo en los que podemos contemplar los sistemas posicionales de bases de numeración. Demos un paseo por él.

Nada más empezar están los especímenes más conocidos, la base decimal, la binaria y la hexadecimal:

2	10	16
100000	32	20
10011111	159	9F

A continuación, están los sistemas basados en una base negativa, gracias a lo cual se pueden representar los números enteros sin tener que indicar su signo. Veamos la base -2:

10	-2
-4	1100
-3	1101
-2	10
-1	11
0	0
1	1
2	110
3	111
4	100

Observemos cómo los enteros negativos tienen un número par de dígitos, y los enteros positivos un número impar.

Seguimos, y nos encontramos con bases que no son números enteros.

Para comenzar tenemos la base racional 1/10, en la que para convertirla a decimal basta con invertir los dígitos:

10	1/10
12,345	543,21
5678,9	9,8765

Le sigue la base irracional $\sqrt{10}$, en la que los números son los mismos que en base 10, pero añadiéndoles ceros entre sus dígitos:

10	$\sqrt{10}$
1,2	1,02
12,34	102,0304
123,456	10203,040506

Y ahora, la base $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, en la que sólo empleamos los dígitos 0 y 1:

10	φ
1	1
2	10,01
3	100,01
4	101,01
5	1000,1001
6	1010,0001
7	10000,0001

Debido a su propiedad $\varphi + 1 = \varphi^2$, concluimos que en esta base $11 = 100$. Es decir, un mismo número puede representarse de dos formas distintas. Pero recordemos que eso mismo también ocurre en nuestra base diez: $1 = 0,9999\ldots$

Sigamos adentrándonos en el zoo, y vemos ahora la base imaginaria $2i$, que emplea los dígitos 0, 1, 2 y 3, y es capaz de representar cualquier número complejo sin ni siquiera tener que indicar su signo:

10	$2i$
7	10303
-7	201
$7i$	103000,2
$-7i$	1010,2
$7+2i$	10313
$7-2i$	11333
$-7+2i$	211
$-7-2i$	1231

[*]Mi correo es `soidsenatas@yahoo.es`, y mi página web es `http://es.geocities.com/soidsenatas/`.
[**]`http://tiopetrus.blogia.com`

Cambiando totalmente la dirección de nuestro paseo, llevamos nuestros pasos junto a la base de numeración más antigua y simple, la base 1:

10	1
0	
2	11
6	111111

El siguiente sistema posicional más antiguo conocido es el babilónico, de base 60.

Y cerca está la numeración maya. Utilizaban base 20, excepto en astronomía, en la que a partir del tercer dígito en adelante un 20 es cambiado por un 18 (es decir, los multiplicadores son 1, 20, 18×20, 18×20^2, 18×20^3...):

10	Maya astronómica
360	100
116125	$16_{20}2_{18}10_{20}5$

Seguimos, y podemos ver otro sistema de base múltiple, pero que empleamos diariamente: 4 semanas, 5 días, 9 horas, 26 minutos y 8 segundos, son

$$4_7 5_{24} 9_{60} 26_{60} 8 = 2885168$$

segundos.

Vemos también la base factorial:

10	!
$4! - 2$	3200 $(3_3 2_2 0_1 0_0)$
$4! - 1$	3210 $(3_3 2_2 1_1 0_0)$
$4!$	10000 $(1_4 0_3 0_2 0_1 0_0)$
$4! + 1$	10010 $(1_4 0_3 0_2 1_1 0_0)$

Volvemos a cambiar la dirección de nuestros pasos. Hasta ahora, en una base cualquiera b se usan los dígitos 0, 1, 2 y siguientes hasta $b - 1$; en caso de quedarse sin dígitos, se usan letras.

El siguiente espécimen es la base 10 sin cero, en la que para compensar esta carencia se utiliza A = 10:

10	A
0	
19	19
20	1A
21	21

La ya vista base 1 es otro caso de base sin cero.

Igualmente, podemos desplazar la serie de dígitos en sentido contrario, y tener algunos de ellos siendo negativos.

Para la base 3, podemos observar los especímenes basados en $(1,2,3)$, $(0,1,2)$, $(-1,0,1) = (\bar{1},0,1)$ y $(\bar{2},\bar{1},0)$. Fijémonos en el caso de base 3 balanceada:

10	$(\bar{1},0,1)$
-3	$\bar{1}0$
-2	$\bar{1}1$
-1	$\bar{1}$
0	0
1	1
2	$1\bar{1}$
3	10

Una aplicación común de este último es en balanzas de dos platillos, con pesas que sean múltiplos de 3.

En la base 4 con los dígitos $(\bar{2},\bar{1},0,1)$, los números $1\bar{2}\bar{2}$ y $-\bar{1}\bar{2}$ corresponden ambos al 6.

Después de esto, vienen las bases que emplean más cantidad de dígitos que lo que indica la propia base, que tienen el inconveniente de que los números pueden tener múltiples representaciones. Contemplemos la base 2 con $(\bar{1},0,1)$:

10	2 $(\bar{1},0,1)$
7	111
7	$10\bar{1}1$
7	$1\bar{1}11$
7	$100\bar{1}$

Lo siguiente son bases cuyos dígitos no son exclusivamente números enteros, pudiendo tener dígitos que representen números racionales, irracionales, complejos...

Llegamos al final de nuestro paseo y, llevando la vista atrás, sólo nos queda recordar que todos estos sistemas pueden mezclarse entre sí...

Fuentes documentales

- Artículos de la *Wikipedia* sobre *Non-standard positional numeral systems*[1].

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Non-standard_positional_numeral_systems`