¿Quién puede nombrar el mayor número?

Scott Aaronson, 1999
http://www.scottaaronson.com/writings/bignumbers.html

Traducido por Jorge Alonso*
Vigo, 2–3/2006 — v1.1.2
publicado inicialmente en *Tio Petros***

En un viejo chiste, dos nobles compiten en nombrar el mayor número. El primero, después de rumiar durante horas, proclamó triunfantemente “¡Ochenta y tres!”. El segundo, poderosamente impresionado, contestó “Tú ganas”.

El desafío por el mayor número claramente no tiene sentido cuando los contendientes lo hacen por turnos. Pero ¿qué pasaría si los contendientes escribiesen sus números simultáneamente, ninguno conociendo el del otro? Para presentar una charla sobre “números grandes”, invité a dos voluntarios de la audiencia a intentar precisamente eso. Les dije las reglas:

> *Tenéis quince segundos. Utilizando la notación matemática normal, palabras, o ambas, nombrar un único número entero (no un infinito) en una tarjeta en blanco. Ser lo suficientemente precisos para que cualquier matemático moderno pueda determinar exactamente qué número habéis nombrado, consultando únicamente tu tarjeta y, si es necesario, la literatura publicada.*

Así que los contendientes no pueden decir “el número de granos de arena en el Sahara”, porque la arena fluctúa hacia dentro y hacia fuera del Sahara con regularidad. Tampoco pueden decir “el número de mi oponente más uno”, o “el mayor número que nadie jamás pensó más uno”; de nuevo, están mal definidos, dado lo que nuestro razonable matemático tiene disponible. Dentro de las reglas, el contendiente que nombre el mayor número gana.

¿Estáis listos? Preparados. Ya.

Los resultados de la contienda nunca son lo que yo esperaría. Una vez, un chico de séptimo grado llenó su tarjeta con una cadena de sucesivos nueves. Como muchos otros principiantes de los grandes números, buscó maximizar su número poniendo un 9 en cada posición decimal. Si hubiera elegido el 1, más fácil de escribir que el curvado 9, su número podría haber sido millones de veces mayor. Sin embargo, todavía sería diezmado por la chica con la que se enfrentaba, que escribió una cadena de nueves seguida por un superíndice ^{999}. ¡Ajá! Una potencia: un número multiplicado por sí mismo 999 veces. Dándome cuenta de su innovación, declaré la victoria de la chica sin preocuparme en contar los nueves de las tarjetas.

E incluso el número de la chica podría haber sido mucho mayor todavía, si ella apilase el poderoso exponencial más de una vez. Coge 9^{9^9}, por ejemplo. Este behemot, igual a $9^{387\,420\,489}$, tiene 369 693 100 dígitos. Por comparación, el número de partículas elementales en el universo observable tiene escasamente 85 dígitos, más o menos. Tres nueves, cuando se apilan exponencialmente, ya nos elevan incomprensiblemente más allá de toda la materia que podemos observar... en un factor de aproximadamente $10^{369\,693\,015}$. Y no hemos dicho nada sobre $9^{9^{9^9}}$ o $9^{9^{9^{9^9}}}$.

Notación decimal, potencias, exponentes apilados: cada uno puede expresar los ilimitados grandes números, y en este sentido son todos ellos equivalentes. Pero los sistemas de notación difieren dramáticamente en los números que pueden expresar *concisamente.* Eso es lo que los quince segundos de tiempo límite ilustran. Lleva la misma cantidad de tiempo escribir 9999, 99^{99} y $9^{9^{9^9}}$, siendo el primer número cotidiano, el segundo astronómico, y el tercero hiper-mega astronómico. La clave al desafío de los mayores números no una rápida escritu-

*Mi correo es soidsenatas@yahoo.es, y mi página web es http://es.geocities.com/soidsenatas/.

**http://tiopetrus.blogia.com

ra, sino más bien un potente paradigma para la captura concisa de la gargantúa.

Tales paradigmas son rarezas históricas. Encontramos agitación en la antigüedad, otra agitación en el siglo veinte, y no mucho en medio. Pero cuando una nueva forma de expresar concisamente grandes números emerge, es a menudo como un subproducto de una revolución científica mayor: matemáticas sistematizadas, lógica formal, informática. Revoluciones importantes, como cualquier kuhniano[1] puede decirte, sólo ocurren bajo las correctas condiciones sociales. Así, la historia de los grandes números es la historia del progreso humano.

Y aquí yace un paralelismo con otra historia matemática. En su notable e infravalorado libro *Una historia de π,* Petr Beckmann argumenta que la razón entre la circunferencia y el diámetro es "un singular espejo de la historia del hombre". En las raras sociedades donde la ciencia y la razón encontraron refugio (la temprana Atenas de Anaxágoras e Hippias, la Alejandría de Eratóstenes y Euclides, la Inglaterra del siglo diecisiete de Newton y Wallis) los matemáticos dieron tremendos pasos en el cálculo de π. En Roma y en la Europa medieval, por constraste, el conocimiento de π se estancó. Rudas aproximaciones como el 25/8 de los babilónicos y el 3 de la biblia se mantenían alternantes.

Pienso que este mismo patrón se aplica a los grandes números. La curiosidad y la franqueza llevan a la fascinación por los grandes números, y al boyante punto de vista de que ninguna cantidad, sea el número de estrellas en la galaxia o el número de manos posibles en el bridge, es demasiado inmensa para que la mente lo enumere. Recíprocamente, la ignorancia y la irracionalidad llevan al fatalismo respecto a los grandes números. La biblia, por ejemplo, se refiere veintiuna veces a la supuesta incontabilidad de la arena. Mira en génesis 32:13 "Sin embargo tú me dijiste: Yo te haré el bien y haré tu descendencia como la arena del mar, tan numerosa que no se puede contar." O hebreos 11:12 "numerosa como las estrellas del cielo e incontable como la arena de la orilla del mar". Esta noción de que la multitud de granos de arena bien podría ser infinita, que es para la pasmada estupefacción pero no para la cuantificación, es antigua. El historiador Ilan Vardi cita la antigua palabra griega $\psi\alpha\mu\mu\kappa o\sigma\iota o\iota$, o *ciento-arena,* de significado coloquial *tropecientos millones*[2]; así como un pasaje de la *Oda olímpica II* de Píndaro afirmando que "la arena escapa de ser contada".

◊

Pero la arena no escapa de ser contada, como Arquímedes reconoció en el tercer siglo A.C. Así es como él empezó *El contador de arena,* una especie de artículo de ciencia popular enviado al rey de Siracusa:

> Hay algunos... que piensan que el número de arenas es infinito en multitud... y hay algunos otros que, sin considerarlo infinito, todavía piensan que ningún número ha sido nombrado que sea suficientemente grande para exceder su multitud... Pero yo intentaré mostraros [números que] exceden no sólo el número de la masa de arena igual en magnitud a la Tierra... sino también en una masa igual en magnitud al universo.

Este Arquímedes procedió a hacer, esencialmente mediante el uso del antiguo término griego *miríada,* que significa diez mil, la base de los exponenciales. Adoptando el presciente modelo cosmológico de Aristarco, en el cual la "esfera de las estrellas fijas" es inmensamente mayor que la esfera en la que la Tierra gira alrededor del sol, Arquímedes obtuvo un límite superior de 10^{63} del número de granos de arena necesarios para llenar el universo. (Supuestamente 10^{63} es el mayor número con un nombre lexicográfico estándar americano: *vigintillion.*[3] Pero el serio *vigintillion* tiene que velar para no ser usurpado por el más caprichosamente nombrado *googol,* o 10^{100}, y *googolplex,* o $10^{10^{100}}$.) Vasto es, por supuesto, pero 10^{63} no es elevado a los altares del mayor número de todos los tiempos. Seis siglos después, Diofanto desarrolló una notación más simple para los exponenciales, permitiéndole sobrepasar $10^{10^{10^{10^{10}}}}$. Entonces, en la edad media, el alzamiento de los numerales árabes y el posicionamiento decimal hicieron fácil apilar exponenciales todavía mayores. Pero el paradigma de Arquímedes para expresar grandes números no fue fundamentalmente superado hasta el siglo veinte. E incluso hoy, los exponenciales dominan la discusión popular de lo inmenso.

Considera, por ejemplo, la a menudo repetida leyenda del gran visir de Persia que inventó el ajedrez. El rey, como dice la leyenda, quedó encantado con el nuevo juego, e invitó al visir a pedir su propia recompensa. El visir replicó que, siendo un hombre modesto, sólo

[1] Partidario de Thomas Kuhn

[2] *Zillion* en el original

[3] En inglés americano un m-illón, en vez de ser 10^{6m}, es 10^{3m+3}.

deseaba un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo, cuatro por el tercero, y así sucesivamente, con dos veces más granos por cuadro que el anterior. El anumérico rey consintió, sin darse cuenta que el número total de granos por todas las 64 casillas sería $2^{64} - 1$, or 18,4 trillones... equivalente a la actual producción mundial de trigo durante 150 años.

Apropiadamente, es este crecimiento exponencial lo que hace al propio ajedrez tan difícil. Hay solamente sobre 35 elecciones lícitas en cada movimiento ajedrecístico, pero las elecciones se multiplican exponencialmente hasta producir sobre 10^{50} posibles posiciones en el tablero... demasiados incluso para que un ordenador las busque exhaustivamente. Eso es por lo que se tardó hasta 1997 que un ordenador, *Deep Blue,* derrotase al campeón mundial humano de ajedrez. Y en el Go, que tiene un teblero de 19×19 y sobre 10^{150} posibles posiciones, incluso un humano aficionado todavía puede derrotar los programas número uno del mundo. El crecimiento exponencial infecta los ordenadores también en otras guisas. El problema del viajero pregunta por la ruta más corta que conecte un conjunto de ciudades, dada la distancia entre cada par de ciudades. Lo irritante es que el número de rutas posibles crece exponencialmente según el número de ciudades. Cuando hay, digamos, un ciento de ciudades, hay sobre 10^{158} rutas posibles, y, aunque son posibles varios atajos, ningún algoritmo computacional conocido es fundamentalmente mejor que probar una a una cada ruta. El problema del viajero pertenece a una clase llamada NP-completa, que incluye cientos de otros problemas de interés práctico. (NP representa el término técnico 'tiempo polinomial no determinístico'.) Es sabido que si hay un algoritmo eficiente para cualquier problema NP-completo, entonces hay algoritmos eficientes para todos ellos. Aquí 'eficiente' significa usando una cantidad de tiempo proporcional al tamaño máximo del problema elevado a alguna potencia fija, por ejemplo, el número de ciudades al cubo. Sin embargo, se conjetura que no existe ningún algoritmo eficiente para los problemas NP-completos. La prueba de esta conjetura, llamada P$\neq$NP, ha sido un gran problema irresuelto de la informática durante treinta años.

Aunque los ordenadores probablemente nunca resolverán los problemas NP-completos eficientemente, hay más esperanza por otro grial de la informática: la replicación de la inteligencia humana. El cerebro humano tiene aproximadamente cien mil millones de neuronas conectadas mediante cien billones de sinapsis. Y aunque la función de una neurona individual es sólo parcialmente entendida, se piensa que cada neurona despide impulsos eléctricos según reglas relativamente simples hasta mil veces por segundo. Así que lo que tenemos es un ordenador altamente interconectado capaz de quizá 10^{14} operaciones por segundo; en comparación, el más rápido superordenador paralelo del mundo, el *9200-Pentium Pro teraflops machine* en *Sandia National Labs,* puede ejecutar 10^{12} operaciones por segundo. Contrariamente a la creencia popular, la materia gris no sólo está cableada para la inteligencia: sobrepasa al silicio incluso en puro poder computacional. Pero es improbable que esto permanezca cierto durante mucho tiempo. La razón es la ley de Moore, que, en su formulación de 1990, expresa que la cantidad de información almacenable en un chip de silicio crece exponencialmente, doblándose aproximadamente una vez cada dos años. La ley de Moore finalmente quedará fuera de juego, cuando los componentes del microchip alcancen la escala atómica y la litografía convencional vacile. Pero radicales nuevas tecnologías, tales como ordenadores ópticos, ordenadores de ADN, o incluso ordenadores cuánticos, podrían concebiblemente usurpar el lugar del silicio. El crecimiento exponencial en la potencia computacional no puede continuar para siempre, pero podría durar lo suficiente para que los ordenadores (al menos en poder de procesamiento) sobrepasen al cerebro humano.

Para los pronosticadores de la inteligencia artificial, la ley de Moore es un glorioso heraldo del crecimiento exponencial. Pero los exponenciales también tienen su lado más sombrío. Recientemente la población humana pasó de los seis mil millones y se duplica cada cuarenta años aproximadamente. A esta razón exponencial, si una persona media pesa setenta kilos, entonces en el año 3750 la Tierra entera estará compuesta de carne humana. Pero antes de que inviertas en desodorantes, date cuenta de que la población parará de incrementarse mucho antes de esto ocurra, ya sea por hambrunas, epidemias, calentamiento global, extinciones en masa de especies, aire irrespirable, o, entrando en el reino de la especulación, control de natalidad. No es difícil comprender porqué el físico Albert Bartlett afirma que "la mayor limitación de la raza humana" es "nuestra incapacidad de entender la función exponencial". O porqué Carl Sagan nos aconseja "nunca subestimar una exponencial". En su libro *Miles de millones,*[4] Sagan da otras deprimentes consecuencias del crecimiento exponencial. Al porcentaje inflacionario del cinco por ciento al año, un

[4] *Billions & Billions*

dólar valdría sólo 37 centavos después de veinte años. Si un núcleo de uranio emite dos neutrones, y ambos colisionan con otros dos núcleos de uranio, haciéndoles emitir dos neutrones, y así en adelante... bueno, ¿mencioné el holocausto nuclear como un posible fin del crecimiento poblacional?

◊

Los exponenciales son familiares, relevantes, íntimamente conectados con el mundo físico y los miedos y esperanzas humanos. Usando el sistema notacional que discutiré a continuación, podremos nombrar concisamente números que hacen insignificantes por comparación a los exponenciales, que subjetivamente hablando exceden a $9^{9^{9^9}}$ tanto como éste excede al 9. Pero estos nuevos sistemas podrían parecer más abstrusos que los exponenciales. En su ensayo *Sobre el entumecimiento numérico,*[5] Douglas Hofstadter lleva a sus lectores al precipicio de estos sistemas, pero entonces asegura que:

> Si continuásemos nuestra discusión sólo un milisegundo[6] más, nos encontraríamos justo en medio de la teoría de funciones recursivas y complejidad algorítmica, y eso sería demasiado abstracto. Así que dejemos el tema aquí mismo.

Pero dejar el tema es abandonar, no sólo el desafío del mayor número, sino cualquier esperanza de entender cómo los más fuertes paradigmas llevan a los más vastos números. Y así llegamos al temprano siglo veinte, cuando una escuela de matemáticos llamados formalistas buscan colocar toda la matemática sobre rigurosas bases axiomáticas. La pregunta clave para los formalistas fue qué significa la palabra 'computable'. Es decir, ¿cómo podemos decir si una secuencia de números puede ser listada por un procedimiento mecánico definido? Algunos matemáticos pensaban que 'computable' coincidía con una noción técnica llamada 'recursiva primitiva'. Pero en 1928 Wilhelm Ackermann los refutó construyendo una sucesión de números que es claramente computable, aunque crece demasiado rápidamente para ser una recursiva primitiva.

La idea de Ackermann fue crear una procesión sin fin de operaciones aritméticas, cada una más potente que la anterior. Primero viene la suma. Segundo viene la multiplicación, que podemos pensarla como una suma repetida: por ejemplo, 5×3 significa 5 sumado a sí mismo 3 veces, o $5+5+5=15$. Tercero viene la potenciación, que podemos pensarla como una multipliación repetida. Cuarto viene... ¿qué? Bueno, tenemos que inventar una rara operación nueva, para la potenciación repetida. El matemático Rudy Rucker la llama 'tetración'. Por ejemplo, '5 tetrado a 3' significa 5 elevado a sus propia potencia 3 veces, o 5^{5^5}, un número con 2185 dígitos. Podemos continuar. Quinto llega la tetración repetida: ¿podemos llamarla 'pentación'? Sexto llega la pentación repetida: ¿'hexación'? Las operaciones continúan infinitamente, con cada una soportada por su predecesora para asomarse incluso más alta hacia el firmamento de los grandes números.

Si cada operación fuese un sabor dulce, entonces la sucesión de Ackermann sería el catálogo de muestras, mezclando un número de cada sabor. Primero en la secuencia está $1+1$, o (no contengas la respiración) 2. Segundo está 2×2, o 4. Tercero es 3 elevado a la tercera potencia, o 27. ¡Eh, estos números no son tan grandes!

Fi. Fi. Fo. Fum.

Cuarto es 4 tetrado a 4, o $4^{4^{4^4}}$, que tiene 10^{154} dígitos. Si estás planeando escribir este número, mejor que empieces ahora. Quinto es 5 pentado a 5, o $5^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^5}}}}$ con '5 tetrado a 4' numerales en la pila. Este número es demasiado colosal para describirlo en cualquier término ordinario. Y los números se vuelven mucho mayores a partir de aquí.

Esgrimiendo la sucesión de Ackermann, podemos dar palizas a oponentes sin estudios en el desafío de los mayores números. Pero necesitamos ser cuidadosos, dado que hay varias definiciones de la sucesión de Ackermann, no todas idénticas. Bajo el límite de tiempo de quince segundos, aquí está lo que yo podría escribir para evitar la ambigüedad:

```
A(111), suc. Ackermann,
A(1)=1+1, A(2)=2x2, A(3)=3^3,
etc.
```

Profunda como parece, la sucesión de Ackermann tiene algunas aplicaciones. Un problema en un área llamada la teoría de Ramsey pregunta por la mínima dimensión de un hipercubo que satisface una cierta propiedad. La dimensión correcta se piensa que es 6, pero la más baja dimensión que nadie ha sido capaz de probar es tan enorme que sólo puede ser expresada utilizando la misma 'aritmética rara' que fundamenta la sucesión de Ackermann. En verdad, el *Libro Guinness de los récords* una vez listó esta dimensión como el mayor número jamás usado en una demostración matemática.

[5] *On number numbness*

[6] *Zillisecond* en el original.

(Otro contendiente para el título fue una vez el número de Skewes, sobre $10^{10^{10^{10^3}}}$, que surge en el estudio de cómo los números primos están distribuidos. El famoso matemático G. H. Hardy dijo sarcásticamente que el número de Skewes era "el mayor número que jamás ha servido para algún propósito definido en matemáticas".) Lo que es más, la cabalgata vivamente ascendente de Ackermann hace un cameo ocasional en la informática. Por ejemplo, en el análisis de una estructura de datos llamada 'Union-Find', un término se multiplica por la inversa de la sucesión de Ackermann, significando, para cada número entero x, el primer número n tal que el n-ésimo número de Ackermann es mayor que x. La inversa crece tan lentamente como la sucesión de Ackermann original crece rápidamente; para todos los propósitos prácticos, la inversa es como máximo 4.

◊

Los números de Ackermann son bastante grandes, pero no son todavía lo suficientemente grandes. La búsqueda por todavía mayores números nos lleva de vuelta a los formalismos. Después de que Ackermann demostrase que 'recursiva primitiva' no es lo que queremos decir con 'computable', la pregunta todavía permanece: ¿Qué *queremos* decir con 'computable'? En 1936, Alonzo Church y Alan Turing respondieron independientemente esta pregunta. Mientras Church respondió utilizando un formalismo lógico llamado el cálculo lambda, Turing respondió utilizando una máquina de cómputo idealizada (la máquina de Turing) que, en esencia, es equivalente a cada Compaq, Dell, Macintosh y Cray del mundo moderno. El artículo de Turing que describía su máquina, "Sobre los números computables", es debidamente celebrado como el documento fundador de la informática.

"Computar," dice Turing,

> "es hecho normalmente escribiendo ciertos símbolos en un papel. Podemos suponer este papel dividido en cuadrados como un libro infantil de aritmética. En la aritmética elemental el carácter bidimensional del papel es algunas veces útil. Pero tal uso es siempre evitable, y pienso que se estará de acuerdo en que el carácter bidimensional del papel no es indispensable en la computación. Asumo entonces que la computación se lleva a cabo en un papel unidimensional, en una cinta dividida en cuadrados."

Turing continúa explicando su máquina utilizando ingeniosos razonamientos desde los primeros principios. La cinta, dice Turing, se extiendo infinitamente en ambas direcciones, para que la máquina teórica no esté restringida por limitaciones físicas de recursos. Además, hay un símbolo escrito en cada cuadrado de la cinta, como el '1' y el '0' en la memoria de los ordenadores modernos. Pero ¿cómo son manipulados los símbolos? Bueno, hay un 'cabezal' moviéndose adelante y atrás a lo largo de la cinta, examinando un cuadrado de cada vez, escribiendo y borrando símbolos de acuerdo a reglas definidas. Las reglas están en el programa del cabezal: cámbialos, y cambiarás lo que hace el cabezal.

La augusta perspicacia de Turing fue que podemos programar el cabezal para llevar a cabo *cualquier* computación. Las máquinas de Turing pueden sumar, multiplicar, extraer raíces cúbicas, ordenar, buscar, comprobar la ortografía, analizar, jugar al tres en raya, listar la sucesión de Ackermann... Si representamos la entrada de datos por el teclado, la salida de datos por la pantalla, y demás como símbolos en la cinta, incluso podríamos ejecutar Windows en una máquina de Turing. Pero hay un problema. Dispón un cabezal sobre una secuencia de símbolos, y eventualmente podría parar, o podría ejecutarse para siempre... como el legendario programador que se queda atrancado en la ducha porque las instrucciones del bote de champú dicen "enjabonar, enjuagar, repetir". Si la máquina va a funcionar por siempre, estaría bien saberlo de antemano, para que no gastemos una eternidad esperando que acabe. Pero ¿cómo podemos determinar, en una cantidad de tiempo finita, si algo va a continuar indefinidamente? Si apuestas con un amigo que tu reloj nunca parará de hacer tictac, ¿cuándo declararás victoria? Pero quizá haya algún ingenioso programa que pueda examinar a otros programas y decirnos, infaliblemente, si pararán alguna vez de funcionar. No lo habíamos pensado todavía.

No hay. Turing probó que este problema, llamado el problema de la detención, es irresoluble por las máquinas de Turing. La demostración es un bello ejemplo de autoreferencia. Formaliza un viejo argumento sobre por qué nunca puedes tener una introspección perfecta: porque si pudieses, entonces podrías determinar qué estarías haciendo diez segundos después, y entonces hacer otra cosa distinta. Turing imaginó que hay una máquina especial que podría resolver el problema de la detención. Entonces mostró cómo podemos tener a esta máquina analizándose a sí misma, de tal forma que tiene que parar si se ejecutaría para siempre, y se ejecutaría para siempre si se para. Como un sabueso que finalmente se coge su cola y se devora a sí mismo, la mítica máquina se desvanece en una furia de contradicción. (Que es la clase de cosas que nunca dirías en un artículo de investigación.)

◇

"Muy bien", dices (o quizá dices "no muy bien"). "¿Pero qué tiene todo esto que ver con los grandes números?" ¡Ajá! La conexión no fue publicada hasta mayo de 1962. Entonces, en el *Bell System Technical Journal,* acurrucado entre artículos dispuestos pragmáticamente sobre "Estructuras multipuerto" y "Sellos de presión dirigidos por ondas", aparecía el modestamente titulado "Sobre funciones no computables" por Tibor Rado. En este artículo, Rado presentaba los mayores números que nadie jamás había imaginado.

Su idea era simple. Como nosotros clasificamos las palabras según cuantas letras contengan, podemos clasificar las máquinas de Turing mediante cuántas reglas tienen en su cabezal. Algunas máquinas tienen sólo una regla, otras tienen dos reglas, todavía otras tienen tres reglas, y así sucesivamente. Pero por cada número entero fijo n, así como hay sólo un número finito de palabras con n letras, así también hay sólo un número finito de máquinas con n reglas. Entre estas máquinas, algunas pararán y otras funcionarán por siempre cuando comiencen con una cinta en blanco. De las que paran, pregunta Rado, ¿cuál es el máximo número de pasos que cualquier máquina hace *antes* de que pare? (Realmente, Rado preguntaba principalmente sobre el máximo número de símbolos que cualquier máquina puede escribir en la cinta antes de pararse. Pero el máximo número de pasos, que Rado llamaba $S(n)$, tiene la mismas propiedades básicas y es más fácil razonar sobre él.)

Rado llamó a este máximo el n-ésimo número del "castor atareado".[7] (Ah sí, los tempranos 1960 eran una edad más inocente.) Él visualizó cada máquina de Turing como un castor bullendo ocupadamente a lo largo de la cinta, escribiendo y borrando símbolos. El desafío, entonces, es encontrar el castor *más ocupado* con exactamente n reglas, aunque no uno infinitamente ocupado. Podemos interpretar este desafío como la búsqueda del "más complicado" programa de ordenador de n bits de tamaño: el que hace la mayor cantidad de material, pero no una infinita cantidad.

Ahora, supón que conocemos el n-ésimo número del castor ocupado, que llamaremos $B(n)$. Entonces podríamos decidir si cualquier máquina de Turing con n reglas se para partiendo una cinta en blanco. Sólo tenemos que ejecutar la máquina: si se para, bien; pero si no se para en $B(n)$ pasos, entonces sabemos que *nunca* se parará, puesto que $B(n)$ es el máximo número de pasos que podría hacer antes de parar. De igual manera, si sabes que todos los mortales murieron antes de cumplir 200 años, entonces si Sally vivió para cumplir 200, podrías concluir que Sally era inmortal. Así que ninguna máquina de Turing puede listar los números del castor atareado... porque si pudiese, podría resolver el problema de la detención, que ya sabemos que es imposible.

Pero hay un hecho curioso. Supón que podemos nombrar un número *mayor* que el n-ésimo castor atareado $B(n)$. Llamémosle a este número d de dique, ya que como un dique de castor, es un techo para el castor atareado que está debajo. Con d en mano, computar el propio $B(n)$ se vuelve fácil: sólo necesitamos simular todas las máquinas de Turing con n reglas. Las que no se hayan parado en d pasos (las que quiebran el tejado del dique) nunca pararán. Así que podemos listar exactamente qué máquinas paran, y entre ellas, el máximo número de pasos que cualquier máquina emplea antes de parar es $B(n)$.

¿Conclusión? La secuencia de números del castor atareado, $B(1)$, $B(2)$, y sucesivos, crece más rápido que *cualquier* secuencia computable. Más rápido que los exponenciales, los exponenciales apilados, y la sucesión de Ackermann, ya que la nombras. Porque si una máquina de Turing pudiese computar una sucesión que crece más rápido que el castor atareado, entonces podríamos usar esa secuencia para obtener las d, el dique del castor. Y con esas d, se podría listar los números del castor atareado, lo cual (¿te suena familiar?) ya sabemos que es imposible. La sucesión del castor atareado es no computable, exclusivamente porque crece estupendamente rápido ...demasiado rápido para que cualquier ordenador pueda seguir con ella, incluso en principio.

Esto significa que ningún programa de ordenador puede listar todos los castores atareados uno por uno. Esto no significa que castores atareados específicos necesiten permanecer eternamente desconocidos. Y de hecho, fijarlos ha sido un pasatiempo de la informática desde que Rado publicó entonces su artículo. Es fácil verificar que $B(1)$, el primer número del castor atareado, es 1. Eso es porque si una máquina de Turing de una regla no para después del primer paso, continuará moviéndose a lo largo de la cinta interminablemente. No hay lugar para cualquier otro comportamiento más complejo. Con dos reglas podemos hacer más, y un pequeño trabajo determinó que $B(2)$ es 6. Seis pasos. ¿Y sobre

[7] Expresión coloquial inglesa que significa *persona laboriosa.*

el tercer castor atareado? En 1965 Rado, junto con Shen Lin, provó que $B(3)$ es 21. La tarea fue ardua, requiriendo análisis humano de muchas máquinas para probar que no paraban... ya que, recuérdese, no hay algoritmo para listar los número del castor atareado. Después, en 1983, Allan Brady probó que $B(4)$ es 107. ¿Poco impresionante hasta ahora? Bueno, como con la sucesión de Ackermann, no nos dejemos engañar por los primeros números.

En 1984, A. K. Dewdney, dedicó una columna de *Scientific American*[8] a los castores atareados, los cuales inspiraron al matemático aficionado George Uhing a construir un dispositivo especial para simular las máquinas de Turing. El dispositivo, que le costó a Uhing menos de 100$, encontró una máquina de cinco reglas que ejecutaba 2 133 492 de pasos antes de parar... estableciendo que $B(5)$ debe ser al menos tan grande. Entonces, en 1989, Heiner Marxen y Jürgen Buntrock descubrieron que $B(5)$ es al menos 47 176 870. Hasta hoy, $B(5)$ no ha sido fijado con precisión, y podría resultar ser todavía mucho mayor. Para $B(6)$, Marxen y Buntrock establecieron otro récord en 1997 probando que es al menos 8 690 333 381 690 951. Una conclusión formidable, todavía Marxen, Buntrock, y los otros cazadores de castores atareados meramente vadean en las orillas de lo desconocido. La humanidad nunca podrá saber el valor de $B(6)$ con certeza, dejemos en paz a $B(7)$ o cualquier otro número mayor de la sucesión.

Verdaderamente, ya los primeros competidores de cinco y seis reglas nos eluden: no podemos explicar como 'trabajan' en términos humanos. Si la creatividad imbuye su diseño, no es porque los humanos la pusieran ahí. Una manera de entender esto es que incluso pequeñas máquinas de Turing pueden codificar profundos problemas matemáticos. Tomemos la conjetura de Goldbach, de que todo número par mayor o igual a 4 es la suma de dos números primos: $10 = 7 + 3$, $18 = 13 + 5$. La conjetura ha resistido demostración desde 1742. Todavía podríamos diseñar una máquina de Turing con, oh, digamos 100 reglas, que prueben cada número par para ver si es una suma de dos primos, y parase sólo si encuentra un contraejemplo a la conjetura. Entonces conociendo $B(100)$, podríamos en principio ejecutar este máquina durante $B(100)$ pasos, viendo si para, y así resolver la conjetura de Goldbach. No necesitamos aventurarnos lejos en la sucesión para entrar en la guarida del basilisco.

Pero como Rado acentúa, incluso si no podemos listar los números del castor atareado, ellos están perfectamente bien definidos matemáticamente. Si alguna vez retas a un amigo al desafío del mayor número, te sugiero que escribas algo como esto:

```
B(11111), suc. castor
atareado, 1, 6, 21, etc.
```

Si tu amigo no conoce las máquinas de Turing o similares, pero sólo conoce, digamos, los números de Ackermann, entonces tú ganas el desafío. Tú incluso ganarías si concedes a tu amigo un *handicap,* y le permites todo el tiempo de existencia del universo para escribir su número. La clave al desafío del mayor número es un potente paradigma, y la teoría de Turing de computación es en verdad potente.

◊

Pero ¿y si tu amigo también conoce las máquinas de Turing? ¿Hay un sistema notacional para grandes números más poderosos incluso que los castores atareados?

Supón que podemos dotar a una máquina de Turing con la habilidad mágica de resolver el problema de la detención. ¿Qué podríamos conseguir? Tendríamos una 'super-máquina de Turing': una con habilidades más allá de cualquier máquina ordinaria. Pero ahora, ¿cómo de difícil es decidir si una *super-máquina* se detiene? Hmm. Produce que incluso las super-máquinas no pueden resolver su 'super-problema de la detención', por la misma razón que las máquinas ordinarias no pueden resolver el problema ordinario de la detención. Para resolver el problema de la detención para las super-máquinas, necesitamos una máquina incluso *más* poderosa: una 'super-hiper-máquina'. Y para resolver el problema de la detención para la super-hiper-máquina, necesitamos una 'super-hiper-mega-máquina'. Y así sucesivamente sin fin. Esta jerarquía infinita fue formalizada por el lógico Stephen Kleene en 1943 (aunque él no usó el término 'super-hiper-mega').

Imagina una novela, la cual está encajada en una novela mayor, la cual está encajada en una novela incluso *mayor,* y así hasta el infinito. Dentro de cada novela, los personajes pueden debatir los méritos literarios de cualquier subnovela. Pero, por analogía con las categorías de máquinas que no pueden analizarse a sí mismas, los personajes nunca podrían criticar la novela en la que ellos *mismos* están. (Esto, pienso, hace mofa de nuestra experiencia ordinaria de las novelas.) Para entender completamente algo de la realidad, necesitamos salir de

[8] Llamada en España *Investigación y ciencia.*

esa realidad. Esa es la esencia de la jerarquía de Kleene: que para resolver el problema de la detención para alguna categoría de máquinas, todavía necesitamos una categoría más poderosa de máquinas.

Y no hay escapatoria. Supón una máquina de Turing con una habilidad mágica de resolver el problema de la detención, *y* el super-problema de la detención, *y* el super-hiper-problema de la detención, *y* el super-hiper-mega-problema de la detención, y así sucesivamente sin fin. ¿Sin duda ésta será la reina de las máquinas de Turing? No realmente. Tan pronto como queramos decidir si una 'reina de las máquinas de Turing' para, necesitaremos una máquina todavía más poderosa: una 'emperatriz de las máquinas de Turing'. Y la jerarquía de Kleene continúa.

Pero ¿cómo es esto relevante para los grandes números? Bueno, cada nivel de la jerarquía de Kleene genera una sucesión de castores atareados de crecimiento más rápido que todos los niveles previos. Verdaderamente, cada nivel de la sucesión crece tan rápidamente que sólo puede ser computada por una de mayor nivel. Por ejemplo, define $B_2(n)$ como el máximo número de pasos que una super-máquina con n reglas puede hacer antes de parar. Si esta super-sucesión de castores atareados fuese computable por super-máquinas, entonces esas máquinas podrían resolver el super-problema de la detención. Así que los super-números de los castores atareados crecen demasiado rápidamente para ser computados, *incluso* si pudiésemos computar los números ordinarios de los castores atareados.

Podrías pensar que ahora, en el desafío del mayor número, podrías borrar del mapa incluso a un oponente que usase la sucesión del castor atareado escribiendo algo como esto:

```
B2(11111)
```

Pero no realmente. El problema es que nunca he visto esos "castores atareados de mayor nivel" definidos en ningún lado, probablemente porque, para la gente que conoce la teoría de computabilidad, son una bastante obvia extensión de los números ordinarios del castor atareado. Así que nuestro razonable matemático moderno no sabría qué número estás nombrando. Si quieres usar los números del castor atareado de mayor nivel en el desafío del mayor número, aquí está lo que sugiero. Primero, publica un artículo formalizando el concepto en algún periódico oscuro de bajo prestigio. Entonces, durante el desafío, cita el artículo en tu tarjeta.

Para exceder los castores atareados de mayor nivel, necesitamos presumiblemente algún modelo informático superior incluso a las máquinas de Turing. No puedo imaginar a qué se parecería ese modelo. Todavía de algún modo dudo que la historia de los sistemas notacionales para los grandes números esté acabada. Quizá algún día los humanos seamos capaces de nombrar concisamente números que hagan parecer al castor atareado 100 tan pueril y divertidamente pequeño como nuestro ochenta y tres del noble. O si jamás nombramos tales números, quizás otras civilizaciones lo hagan. ¿Está en marcha un desafío del mayor número por toda la galaxia?

♢

Podrías preguntarte porqué no podemos transcender el desfile completo de paradigmas, y nombrar números mediante un sistema que los abarque y aventaje a todos ellos. Supón que escribes lo siguiente en el desafío del mayor número:

```
El mayor número entero
nombrable con 1000 letras.
```

Sin duda este número existe. Usando 1000 letras, podemos nombrar sólo una cantidad finita de números, y entre esos números tiene que haber un mayor. Y todavía no hemos hecho referencia a cómo se nombra el número. El texto podría invocar los números de Ackermann, o del castor atareado, o castores atareados de mayor nivel, o incluso un concepto todavía más radical que nadie pensó aún. Así que a menos que tu oponente utilice el mismo truco, le hemos dado una paliza. ¡Qué idea más brillante! ¿Porqué no lo pensamos antes?

Desafortunadamente esto no funciona. También podríamos haber escrito:

```
Uno más el mayor número entero
nombrable con 1000 letras.
```

Este número necesita al menos 1001 letras para nombrarlo. ¡Pero lo hemos nombrado con sólo 47 letras! Como una serpiente que se traga a sí misma por entero, nuestro colosal número se disuelve en un tumulto de contradicción. ¿Qué queda?

La paradoja que acabo de describir fue primero publicada por Bertrand Russell, que la atribuyó a un bibliotecario llamado G. G. Berry. La paradoja de Berry surge no de las matemáticas, sino de la ambigüedad inherente del lenguaje. No hay manera segura de convertir una frase en el número que nombra (o para decidir si de todas formas nombra a un número), lo cual es por lo que yo invoqué a un "razonable matemático moderno" en las reglas del desafío del mayor número. Para burlar la paradoja de Berry, necesitamos nombrar números utilizando un sistema notacional matemático preciso, tal como las máquinas de Turing ...que es exactamente la idea detrás de la sucesión de los castores atareados. Así que en resumen, no hay ningún truco astuto del lenguaje con el que aventajar a Arquímes, Ackermann, Turing y Rado, ninguna escalera regia de grandes números.

También podrías preguntar porqué no podemos utilizar el infinito en el desafío. La respuesta es: por la misma razón por la que no podemos utilizar un coche-cohete en una carrera de bicicletas. El infinito es fascinante y elegante, pero no es un número entero. Tampoco podemos 'restar al infinito' para producir un número entero. Infinito menos 17 todavía es infinito, mientras que infinito menos infinito es indefinido: puede ser 0, 38, o incluso infinito de nuevo. Realmente debería hablar de infinitos, en plural. Durante el siglo diecinueve tardío, Georg Cantor probó que hay diferentes niveles de infinito: por ejemplo, el infinito de los puntos de una línea es mayor que el infinito de los números enteros. Lo que es más, así como no hay el número más grande, tampoco hay el infinito más grande. Pero la búsqueda de grandes infinitos es más abstrusa que la búsqueda de grandes números. Y envuelve, no una sucesión de paradigmas, sino esencialmente uno: el de Cantor.

◊

Así que aquí estamos, en la frontera del conocimiento de los grandes números. Como se supone que el discípulo de Euclides preguntó, "¿para qué *sirve* todo esto?" Hemos visto que el progreso en sistemas notacionales para grandes números es un espejo del progreso en reinos más amplios: matemáticas, lógica, informática. Y todavía, aunque un espejo refleja la realidad, no necesariamente la influencia. Incluso dentro de las matemáticas, los grandes números son a menudo considerados trivialidades, su estudio un entretenimiento ocioso sin implicaciones más amplias. Quiero argumentar una visión contraria: que el entendimiento de los grandes números es una clave para entender el mundo.

Imagina intentar explicar la máquina de Turing a Arquímedes. El genio de Siracusa escucha pacientemente como discutes sobre la cinta de papiro extendiéndose infinitamente en ambas direcciones, los pasos, estados, y entradas y salidas de secuencias. Por fin explota.

"¡Tonterías!" declara (o el antiguo equivalente griego). "Todo lo que me das es una elaborada definición, sin ningún valor fuera de sí misma."

¿Cómo responder? Arquímedes nunca ha oído hablar de los ordenadores, esos quisquillosos dispositivos que, veintitrés siglos después, llevan a cabo los asuntos del mundo. Así que no puedes reclamar aplicaciones prácticas. Ni puedes apelar a Hilbert y al programa de formalismo, ya que Arquímedes no ha oído hablar de ambos. Pero entonces caes en la cuenta: la sucesión del castor atareado. Defines la secuencia para Arquímedes, convenciéndolo que $B(1000)$ es más que 10^{63} granos de arena llenando el universo, más incluso que 10^{63} elevado a su propia potencia 10^{63} veces. Le desafías a nombrar un número mayor sin invocar las máquinas de Turing o algún equivalente. Y así como él pondera este desafío, el poder del concepto de la máquina de Turing le ilumina. Aunque su intuición nunca podría aprehender los números del castor atareado, su razón lo compele a reconocer su inmensidad. Los grandes números tienen una forma de imbuir las nociones abstractas de realidad.

En verdad, uno podría definir la ciencia como el esfuerzo de la razón para compensar nuestra incapacidad para percibir grandes números. Si pudiésemos correr a 280 000 000 metros por segundo, no habría necesidad para una teoría especial de la relatividad: sería obvio para cualquiera que cuanto más rápido fuésemos, más pesados y achaparrados nos volveríamos, y más rápido pasa el tiempo en el resto del mundo. Si pudiésemos vivir durante 70 000 000 de años, no habría ninguna teoría de la evolución, y *ciertamente* ningún creacionismo: podríamos mirar la especiación y la adaptación con nuestros ojos, en lugar de reconstruir esmeradamente los eventos a partir de fósiles y ADN. Si pudiésemos hornear pan a 20 000 000 grados Kelvin, la fusión nuclear no sería el dominio esotérico de físicos sino el conocimiento familiar ordinario. Pero no podemos hacer ninguna de esas cosas, así que tenemos ciencia, para deducir sobre la gargantúa que nosotros, con nuestras facultades infinitesimales, jamás sentiremos. Si la gente teme a los grandes números, ¿es una sorpresa que también teman a la ciencia y giren al solaz de la confortable pequeñez del misticismo?

Pero *¿teme* la gente a los grandes números? Ciertamente sí. He encontrado gente que no sabe la diferencia entre millón y mil millones,[9] y no les preocupa. Jugamos una lotería con '¡seis formas de ganar!', pasando

[9] Entre *million* y *billion* en el original.

por alto las veinte millones de formas de perder. Bostezamos a seis mil millones de toneladas de dióxido de carbono soltado en la atmósfera cada año, y hablamos de 'desarrollo sostenible' en las mandíbulas del crecimiento exponencial. Tales casos, me parece, transcienden la ignorancia aritmética y representan la poca disposición básica de agarrar lo inmenso.

Entonces ¿de dónde viene el encogerse de miedo ante los grandes números? ¿Tiene un origen biológico? En 1999, un grupo guiado por el neuropsicólogo Stanislas Dehaene reportó evidencia en *Science* de que dos sistemas separados del cerebro contribuyen al pensamiento matemático. El grupo entrenó a bilingües ruso-inglés en resolver un conjunto de problemas, incluyendo suma de dos dígitos, suma en base ocho, raíces cúbicas y logaritmos. Algunos sujetos fueron entrenados en ruso, otros en inglés. Cuando pidieron entonces a los sujetos resolver problemas aproximadamente (elegir la más próxima de dos estimaciones) lo hicieron igualmente bien en ambos lenguajes. Pero cuando les pidieron resolver problemas exactamente, lo hicieron mejor en el lenguaje de su entrenamiento. Lo que es más, las imágenes cerebrales mostraron que los lóbulos parietales de los sujetos, implicados en el razonamiento espacial, fueron más activos durante los problemas de cálculo aproximado; mientras que los lóbulos frontal inferior izquierdos, implicados en el razonamiento verbal, fueron más activos durante los problemas de cálculo exacto. Estudios de pacientes con lesiones cerebrales dibujan el mismo cuadro: aquellos con lesiones parietales algunas veces no pueden decidir si 9 está más próximo a 10 o a 5, pero recuerdan la tabla de multiplicación; mientras que aquellos con lesiones en el hemisferio izquierdo algunas veces no pueden decidir si $2+2$ es 3 o 4, pero saben que la respuesta está más cerca de 3 que de 9. Dehaene *et al.* conjeturan que los humanos representamos los números de dos formas. Para cálculo aproximado usamos una 'línea numérica mental', que evolucionó hace mucho tiempo y que probablemente compartimos con otros animales. Pero para el cómputo exacto usamos símbolos numéricos, que evolucionaron recientemente y que, siendo dependientes del lenguaje, son únicos en los humanos. Esta hipótesis explica aseadamente los resultados del experimento: la razón de los sujetos se desempeñen mejor en el lenguaje de su entrenamiento para el cálculo pero no para problemas de aproximación, ya que lo primero invoca al lóbulo de orientación verbal frontal inferior izquierdo, y lo segundo al lóbulo parietal de orientación espacial.

Si la hipótesis de Dehaene *et al.* es correcta, entonces ¿qué representación utilizamos para los grandes números? Ciertamente la simbólica; para nadie la línea numérica mental puede ser larga suficiente para contener 9^{9^9}, 5 pentado a 5, o $B(1000)$. Y aquí, sospecho, está el problema. Cuando pensamos sobre 3, 4 o 7, estamos guiados por nuestra intuición espacial, afilada en millones de años de percibir 3 gacelas, 4 compañeros o 7 miembros de un clan hostil. Pero cuando pensamos sobre $B(1000)$, sólo contamos con el lenguaje, esa evolución neófita. Los caminos neurales usuales para representar números llevan a un callejón sin salida. Y esto, quizá, es por lo que la gente está temerosa de los grandes números.

¿Podría una intervención temprana mitigar nuestra fobia a los grandes números? ¿Qué pasaría si los profesores de matemáticas de segundo grado tomasen un hiato de una hora de su aburridas tareas para preguntar a sus estudiantes "cómo nombrarías un número muy, pero que *muy* grande"? Y entonces les contaría sobre las potencias y los exponentes apilados, la tretración y la sucesión de Ackermann, y quizá incluso los castores atareados: una cornucopia de números más vasta que cualquiera que ellos jamás concibieron, e ideas ensanchando los límites de su imaginación.

¿Quién puede nombrar el mayor número? Quienquiera que tenga el paradigma más profundo. ¿Estás listo? Prepárate. Ya.

Referencias

Petr Beckmann, *A History of Pi,* Golem Press, 1971.

Allan H. Brady, "The Determination of the Value of Rado's Noncomputable Function Sigma(k) for Four-State Turing Machines", *Mathematics of Computation,* vol. 40, nº 162, abril de 1983, pág. 647–665.

Gregory J. Chaitin, "The Berry Paradox", *Complexity,* vol. 1, nº 1, 1995, pág. 26–30. En `http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/unm2.html`.

A.K. Dewdney, *The New Turing Omnibus: 66 Excursions in Computer Science,* W.H. Freeman, 1993.

S. Dehaene, E. Spelke, P. Pinel, R. Stanescu y S. Tsivkin, "Sources of Mathematical Thinking: Behavioral and Brain-Imaging Evidence", *Science,* vol. 284, nº 5416, 7 de mayo de 1999, pág. 970–974.

Douglas Hofstadter, *Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern,* Basic Books, 1985. Capítulo 6, "On Number Numbness", pág. 115–135.

Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan,* Washington Square Press, 1991.

Stephen C. Kleene, "Recursive predicates and quantifiers", *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 53, 1943, pág. 41–74.

Donald E. Knuth, *Selected Papers on Computer Science,* CSLI Publications, 1996. Capítulo 2, "Mathematics and Computer Science: Coping with Finiteness", pág. 31–57.

Dexter C. Kozen, *Automata and Computability,* Springer-Verlag, 1997.

Dexter C. Kozen, *The Design and Analysis of Algorithms,* Springer-Verlag, 1991.

Shen Lin y Tibor Rado, "Computer studies of Turing machine problems", *Journal of the Association for Computing Machinery,* vol. 12, nº 2, abril de 1965, pág. 196–212.

Heiner Marxen, Busy Beaver, en `http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/`.

Heiner Marxen y Jürgen Buntrock, "Attacking the Busy Beaver 5", *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science,* nº 40, febrero de 1990, pág. 247–251.

Tibor Rado, "On Non-Computable Functions", *Bell System Technical Journal,* vol. XLI, nº 2, mayo 1962, pág. 877–884.

Rudy Rucker, *Infinity and the Mind,* Princeton University Press, 1995.

Carl Sagan, *Billions & Billions,* Random House, 1997.

Michael Somos, "Busy Beaver Turing Machine". En `http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/bb.html`.

Alan Turing, "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of* *the London Mathematical Society,* Series 2, vol. 42, pág. 230–265, 1936. Reimpreso en Martin Davis (ed.), *The Undecidable,* Raven, 1965.

Ilan Vardi, “Archimedes, the Sand Reckoner”, en `http://www.ihes.fr/~ilan/sand_reckoner.ps`.

Eric W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics,* CRC Press, 1999. Entrada sobre “Large Number” en `http://www.treasure-troves.com/math/LargeNumber.html`.