Hiper-operaciones

Jorge Alonso[*]

Vigo, 02/2006 — v1.0.0

Índice

1. Introducción

Como matemático aficionado, también redescubrí y coqueteé con la operación llamada *tetración* (también conocida como *hiper 4* y *torre de potencias*).

Por otro lado, creo ser el primero en definir lo que he llamado *hiper-integración.*

2. Hiper-exponenciación

2.1. Enfoque clásico

La multiplicación es una suma iterada:

$$a \times b = \underbrace{a + a + ... + a + a}_{b \text{ veces}}$$

La exponenciación es una multiplicación iterada:

$$a^b = \underbrace{a \times a \times ... \times a \times a}_{b \text{ veces}}$$

¿Por qué detenerse ahí? Puede continuarse definiendo otras operaciones, explorando nuevos territorios desconocidos.

El siguiente paso es reiterar la exponenciación:

$${}^{b}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^{a}}}}}}}_{b \text{ veces}}$$

Nótese que la expresión anterior no es igual a:

$$\underbrace{(((a^a)^a)^{\cdots})^a}_{b \text{ veces}} = a^{a(b-1)}$$

De esta manera se define la operación *tetración.* Y, sucesivamente, la *pentación,* la *hexación...,* y, en el infinito, la *circulación.*

No acaba ahí el tema, sino que incluso se llega a definir la *ceración,* cuya iteración crea la suma: $a \circ b = b \circ a$ y si $a \geq b$ entonces

$$a \circ b \begin{cases} a+2 & \text{si} \quad a = b \\ a+1 & \text{si} \quad a > b \\ a & \text{si} \quad b = -\infty \end{cases}$$

Por supuesto, así como de las potencias se derivan sus inversas, las raíces y los logaritmos, de estas nuevas operaciones se derivarán nuevas funciones inversas.

Más información en *Ackermann's function and new arithmetical operations,*[1] por Constantin A. Rubtsov y Giovanni F. Romerio.

2.2. Mi enfoque

Con fecha 01/06/2004 imaginé una función

$$\Psi_p(a, b)$$

a la que se le pueden añadir parámetros extras, según la siguiente relación:

$$\Psi_p(a_1, a_2, ..., a_n) = \Psi_p(a_1, \Psi_p(a_2, a_3, ..., a_n)))$$

[*]Mi correo es soidsenatas@yahoo.es, y mi página web es http://es.geocities.com/soidsenatas/.

[1]http://www.rotarysaluzzo.it/filePDF/Iperoperazioni%20(1).pdf

Y la relación entre diferentes valores del subíndice p es:

$$\Psi_{p+1}(a,b) = \Psi_p(\underbrace{a,a,a,....,a}_{b \text{ veces}})$$

Entonces, defino:

$$\Psi_1(a,b) = a+b$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} \Psi_0(a,b) & = & a \circ b \\ \Psi_2(a,b) & = & a \times b \\ \Psi_3(a,b) & = & a^b \\ \Psi_4(a,b) & = & {}^b a \end{array}$$

Si hubiésemos definido una función ψ de la forma

$$\psi_p(a,b,c) = \psi_p(\psi_p(a,b),c)$$

entonces $\psi_4(a,b)$ valdría $a^{a(b-1)}$, surgiendo un nuevo tipo de operaciones.

¿Y si quisiésemos despejar la x de la ecuación $c = \Psi_x(a,b)$? ¿Y si este valor de x no resultase un número entero?

3. Hiper-integración

La integración es, digámoslo así, una suma de infinitos ceros:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

El 13/02/2006 di un paso más, y creé la hiper-integración, que es un producto de infinitos unos (dado que no existe símbolo, *robemos* $\oint$):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \prod_{x=a}^{b} [f(x)]^{\Delta x} = \oint_a^b [f(x)]^{dx}$$

Lo que hay que hacer ahora es estudiar la convergencia de este límite, y hallar las hiper-integrales de las funciones más comunes.

Después, podría pasarse a definir la operación recíproca: la hiper-derivación.

Pero, lo más importante es: ¿qué representan la hiper-integración y la hiper-derivación?

Resolución

Cuando quise calcular las primeras hiper-integrales, bastó con aplicar logaritmos a la definición para obtener:

$$\ln\left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \prod_{x=a}^{b} [f(x)]^{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} \Delta x \ln[f(x)]$$

es decir:

$$\ln\left\{ \oint_a^b [f(x)]^{dx} \right\} = \int_a^b \ln[f(x)]dx$$

Con lo que la integración y la hiper-integración quedan estrechamente relacionadas.