Siguiente término de una sucesión

Jorge Alonso[*]

Vigo, 10/2005 — v1.1.0
aparecido inicialmente en *Tio Petros*[**]

Índice

1. El juego

Un conocido pasatiempo consiste en, dada una serie de números, averiguar cuál es el siguiente, cumpliendo el orden lógico de la serie.

Por ejemplo, si la serie es

$$1,3,5,7,9$$

el siguiente término es 11, ya que se trata de una sucesión de números impares. El término general de esta serie puede escribirse como

$$f(n) = 2n - 1$$

valiendo n sucesivamente los valores $1,2,3,4...$ (Alternativamente, $f(n) = 2n+1$ si se toma n como $0,1,2,3...$)

Otro ejemplo es

$$0,1,1,2,3,5,8,13$$

en el que cada término es la suma de los dos precedentes, comenzando por 0 y 1. Puede expresarse esta serie como

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo más:

$$1,1,2,2,4,3,8,4,16,5$$

Parece más difícil, pero basta un truco para hallar la lógica: separar la serie en dos, tomando términos alternos:

$$\begin{array}{l} 1,2,4,8,16 \\ 1,2,3,4,5 \end{array}$$

Por tanto, el siguiente valor es 32. El término general es:

$$\begin{array}{ll} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{array}$$

Sin embargo, siempre puede encontrarse otra lógica distinta a los números de la serie, con lo que el siguiente término sería otro distinto. Y esto puede hacerse de forma que el siguiente término sea el que nosotros queramos que sea.

Sea, por ejemplo, la sucesión

$$0,1,\mathrm{e},\pi$$

queremos que el siguiente término de la serie sea i, ¿cómo podremos lograrlo?

2. El truco

En su libro *Érase una vez un número,* John Allen Paulos comenta de pasada un método para hayar una ley matemática que haga que el siguiente término de la sucesión sea el que queramos que sea. La clave se encuentra en que la serie de partida es una serie finita.

Veámoslo con detenimiento; pero para evitar una explicación farragosa, partamos de una serie inicial de tres términos

[*]Mi correo es `soidsenatas@yahoo.es`, y mi página web es `http://es.geocities.com/soidsenatas/`.
[**]`http://tiopetrus.blogia.com`

$$a, b, c$$

en la que queremos que el siguiente término sea d.

El término general será $f(n)$; comencemos con

$$f(n) = a + b + c$$

Cuando $n = 1$, esta expresión debe valer a, por lo que multiplicamos los valores b y c por unos ceros camuflados:

$$f(n) = a + b(n-1) + c(n-1)$$

Para $n = 2$, debe cumplirse que $f(2) = b$

$$f(n) = a(n-2) + b(n-1) + c(n-1)(n-2)$$

Y lo mismo para $n = 3$:

$$\begin{aligned} f(n) &= a(n-2)(n-3) + \\ &+ b(n-1)(n-3) + \\ &+ c(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

Aún no hemos acabado, ya que, por ejemplo, para $n = 2$ no obtenemos $f(2) = b$, sino

$$f(2) = b(2-1)(2-3)$$

por lo que hay que dividir cada término por factores correctores:

$$\begin{aligned} f(n) &= a\frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)} + \\ &+ b\frac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)} + \\ &+ c\frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)} \end{aligned}$$

Ahora sí, hemos obtenido una expresión $f(n)$ que cumple con todos los términos iniciales. De forma análoga, podemos añadir nuestro nuevo término d:

$$\begin{aligned} f(n) &= a\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \\ &+ b\frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \\ &+ c\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + \\ &+ d\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \end{aligned}$$

Conociendo este truco matemático, ya no habrá serie que se nos resista, ni siquiera las que aparecen en los test de inteligencia.

3. Apéndice

Como bien dice un lector, nada impide definir la sucesión pedida como:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= \mathrm{e} \\ f(3) &= \pi \\ f(n) &= \mathrm{i} \quad \text{para } n \geq 4 \end{aligned}$$