Criterios de divisibilidad

Jorge Alonso[*]

Vigo, 06/2005 — v1.1.0

Índice

[*] Mi correo es `soidsenatas@yahoo.es`, y mi página web es `http://es.geocities.com/soidsenatas/`.

1. Introducción

Este trabajo está basado en el artículo *Aritmética modular, criterios de divisibilidad y un pequeño truco de mentalismo* de Lola Cárdenas, publicado por entregas en *Tio Petros*[1].

2. El operador módulo

Sean a y $n \neq 0$ dos números naturales, al dividir a entre n se obtiene k de cociente y r de resto. Por lo tanto, $a = nk + r$. Se dice entonces que el módulo de a en base n es r, y se denota por:

$$a \bmod n = r$$

El valor r varía entre 0 y $n-1$.

Otra forma de indicarlo es diciendo que a es equivalente a r en módulo n:

$$a \equiv r \pmod{n}$$

2.1. Clases de equivalencia

Puede ampliarse la definición de módulo al conjunto de los números enteros. Las clases de equivalencia que entonces se forman son:

- La clase $[0]$: Todos los múltiplos de n.
- La clase $[1]$: Todos los múltiplos de n, a los que se les suma 1 (o lo que es lo mismo, se les resta $n-1$).
- La clase $[2]$: Todos los múltiplos de n, a los que se les suma 2 (o resta $n-2$).
- ...

[1] `http://tiopetrus.blogia.com`

- La clase $[n-1]$: Todos los múltiplos de n, a los que se les suma $n-1$ (o resta 1).

Por ejemplo, para el caso $n=4$:

$$\begin{array}{l} [0]=\{\ldots,-8,\quad -4,\quad 0,\quad 4,\quad 8,\ldots\} \\ [1]=\{\ldots,-7,\quad -3,\quad 1,\quad 5,\quad 9,\ldots\} \\ [2]=\{\ldots,-6,\quad -2,\quad 2,\quad 6,\quad 10,\ldots\} \\ [3]=\{\ldots,-5,\quad -1,\quad 3,\quad 7,\quad 11,\ldots\} \end{array}$$

2.2. Propiedades

Sean a, b y $n>0$; respecto a la suma, se cumple que *el módulo de una suma es igual al módulo de la suma de los módulos de los sumandos*:

$$(a+b) \text{ mód } n = \big((a \text{ mód } n)+(b \text{ mód } n)\big) \text{ mód } n$$

Y respecto al producto, que *el módulo de un producto es igual al módulo del producto de los módulos de los factores*:

$$(ab) \text{ mód } n = \big((a \text{ mód } n)(b \text{ mód } n)\big) \text{ mód } n$$

Estas relaciones se demuestran teniendo en cuenta que $a=nk+r$ y $b=nl+s$, con lo que:

$$\begin{array}{l} a+b=n(k+l)+r+s\equiv r+s \pmod{n} \\ ab=n(nkl+lr+ks)+rs\equiv rs \pmod{n} \end{array}$$

3. Criterios de divisibilidad

3.1. Generalidades

Se dice que a es divisible por $n\neq 0$ si y sólo si:

$$a \text{ mód } n = 0$$

O lo que es lo mismo:

$$a\equiv 0 \pmod{n}$$

La expresión decimal de a es:

$$a=a_0+10a_1+100a_2+1000a_3+\ldots+10^m a_m$$

Los a_i son las cifras $(0,1,2,\ldots,9)$ de a.

Entonces, para que a sea múltiplo de n ha de cumplirse que:

$$\sum_{i=0}^{m} 10^i a_i \equiv 0 \pmod{n}$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^{m} \left(10^i \text{ mód } n\right) a_i \equiv 0 \pmod{n}$$

Ésta es la expresión que se empleará para definir los criterios de divisibilidad de a entre n: Se estudia cada 10^i en módulo n, para simplificar la expresión decimal de a en otra equivalente en ese módulo.

Conociendo 10^i mód n, es fácil hayar 10^{i+1} mód n, ya que $10^{i+1}=10\cdot 10^i$.

3.2. Entre 2

Para el caso de divisibilidad entre $n=2$:

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 0 \\ 100 & =10\cdot 10\equiv 0\cdot 0= & 0 \\ 1000 & =10\cdot 100\equiv 0\cdot 0= & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 0 \end{array}$$

Con lo que:

$$a\equiv a_0 \pmod{2}$$

Un número es divisible entre 2 *si y sólo si su cifra de unidades es par.*

3.3. Entre 3

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 1 \\ 100 & =10\cdot 10\equiv 1\cdot 1= & 1 \\ 1000 & =10\cdot 100\equiv 1\cdot 1= & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 1 \end{array}$$

Entonces:

$$a\equiv a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots \pmod{3}$$

Un número es divisible entre 3 *si y sólo si lo es también la suma de sus cifras.*

3.4. Entre 4

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 2 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 2\cdot 2 = 4 \equiv & 0 \\ 1000 & = 10\cdot 100 \equiv 2\cdot 0 = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 + 2a_1 \pmod 4$$

Puede reinterpretarse este criterio como: *Un número es divisible entre* 4 *si y sólo si lo es también el número formado por sus dos últimas cifras.*

3.5. Entre 5

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 0 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 0\cdot 0 = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 \pmod 5$$

Un número es divisible entre 5 *si y sólo si su cifra de unidades es* 0 *o* 5.

3.6. Entre 6

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 4 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 4\cdot 4 = 16 \equiv & 4 \\ 1000 & = 10\cdot 100 \equiv 4\cdot 4 = 16 \equiv & 4 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 4 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 + 4(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \pmod 6$$

Más fácil que ese criterio, es tener en cuenta que $6 = 2\cdot 3$: *Un número es divisible entre* 6 *si y sólo si lo es por* 2 *y* 3.

3.7. Entre 7

$$\begin{array}{rlr} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 3 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 3\cdot 3 = 9 \equiv & 2 \\ 1000 & = 10\cdot 100 \equiv 3\cdot 2 = 6 \equiv & -1 \\ 10000 & = 10\cdot 1000 \equiv 3\cdot(-1) = & -3 \\ 100000 & = 10\cdot 10000 \equiv 3\cdot(-3) = -9 \equiv & -2 \\ 1000000 & = 10\cdot 100000 \equiv 3\cdot(-2) = -6 \equiv & 1 \\ 10000000 & = 10\cdot 1000000 \equiv 3\cdot 1 = & 3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

El ciclo se repite indefinidamente, tomando sucesivamente los valores $(1,3,2,-1,-3,-2)$:

$$a \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + \ldots \pmod 7$$

En vez de valores en negativo, pueden sumárseles 7 para pasarlos a positivos.

3.8. Entre 8

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 2 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 2\cdot 2 = & 4 \\ 1000 & = 10\cdot 100 \equiv 2\cdot 4 = 8 \equiv & 0 \\ 10000 & = 10\cdot 1000 \equiv 2\cdot 0 = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 + 2a_1 + 4a_2 \pmod 8$$

Puede reinterpretarse este criterio como: *Un número es divisible entre* 8 *si y sólo si lo es también el número formado por sus tres últimas cifras.*

3.9. Entre 9

$$\begin{array}{rll} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 1 \\ 100 & = 10\cdot 10 \equiv 1\cdot 1 = & 1 \\ 1000 & = 10\cdot 100 \equiv 1\cdot 1 = & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 1 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \pmod 9$$

Un número es divisible entre 9 *si y sólo si lo es también la suma de sus cifras.*

3.10. Entre 10

$$\begin{array}{rlr} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 0 \\ 100 & = 10 \cdot 10 \equiv 0 \cdot 0 = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \equiv & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv a_0 \pmod{10}$$

Un número es divisible entre 10 *si y sólo si su cifra de unidades es* 0*.*

3.11. Entre 11

$$\begin{array}{rlr} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & -1 \\ 100 & = 10 \cdot 10 \equiv (-1) \cdot (-1) = & 1 \\ 1000 & = 10 \cdot 100 \equiv (-1) \cdot 1 = & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ 10^m & \text{si } m \text{ es par} \Rightarrow & 1 \\ 10^m & \text{si } m \text{ es impar} \Rightarrow & -1 \end{array}$$

Entonces:

$$a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) \pmod{11}$$

Un número es divisible entre 11 *si y sólo si la suma de las cifras que están en posición impar menos la suma de las cifras que están en posición par es divisible por* 11. (Nótese que a_0 está en posición impar, y a_1 en posición par.)

3.12. Entre 12

$$a \equiv a_0 - 2a_1 + 4(a_2 + a_3 + \ldots) \pmod{12}$$

Más fácil que ese criterio, es tener en cuenta que $12 = 3 \cdot 4$: *Un número es divisible entre* 12 *si y sólo si lo es por* 3 *y* 4*.*

3.13. Entre 13

El ciclo se repite indefinidamente, tomando sucesivamente los valores $(1, -3, 9, -1, 3, -9)$:

$$a \equiv a_0 - 3a_1 + 9a_2 - a_3 + 3a_4 - 9a_5 + \ldots \pmod{13}$$

3.14. Entre 14

Excepto para a_0, para los demás se repite indefinidamente el ciclo $(-4, 2, 6, 4, -2, -6)$:

$$a \equiv a_0 - 4a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 - 2a_5 - 6a_6 \ldots \pmod{14}$$

También puede tenerse en cuenta que $14 = 2 \cdot 7$.

3.15. Entre 15 o 30

$$a \equiv a_0 + 10(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \quad (\text{mód } 15 \text{ o } 30)$$

También puede tenerse en cuenta que $15 = 3 \cdot 5$ y $30 = 3 \cdot 10$.

3.16. Entre 16

$$a \equiv a_0 - 6a_1 + 4a_2 + 8a_3 \pmod{16}$$

Puede reinterpretarse este criterio como: *Un número es divisible entre* 16 *si y sólo si lo es también el número formado por sus cuatro últimas cifras.*

3.17. Entre 18

$$a \equiv a_0 + 10(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \pmod{18}$$

También puede tenerse en cuenta que $18 = 2 \cdot 9$.

3.18. Entre 20, 25 o 50

$$a \equiv a_0 + 10a_1 \quad (\text{mód } 20 \text{ o } 25 \text{ o } 50)$$

Un número es divisible entre 20, 25 *o* 50 *si y sólo si lo es también el número formado por sus dos últimas cifras.*

3.19. Entre 22

$$a \equiv a_0 + 10(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots) \pmod{22}$$

También puede tenerse en cuenta que $22 = 2 \cdot 11$.

3.20. Entre 24

$$a \equiv a_0 + 10a_1 + 4a_2 - 8(a_3 + a_4 \ldots) \pmod{24}$$

También puede tenerse en cuenta que $24 = 3 \cdot 8$.

3.21. Entre 33

$$a \equiv a_0 + a_2 + \ldots + 10(a_1 + a_3 + \ldots) \pmod{33}$$

También puede tenerse en cuenta que $33 = 3 \cdot 11$.

3.22. Entre 36

$$a \equiv a_0 + 10a_1 - 8(a_2 + a_3 + \ldots) \pmod{36}$$

También puede tenerse en cuenta que $36 = 4 \cdot 9$.

3.23. Entre 40

$$a \equiv a_0 + 10a_1 + 20a_2 \pmod{40}$$

Un número es divisible entre 40 *si y sólo si lo es también el número formado por sus tres últimas cifras.*

3.24. Entre 75

$$a \equiv a_0 + 10a_1 + 25(a_2 + a_3 + \ldots) \pmod{75}$$

También puede tenerse en cuenta que $75 = 3 \cdot 25$.

3.25. Entre 100, 1000, etc.

Un número es divisible entre 10^k, *con* $k \geq 1$ *si y sólo si acaba en* k *ceros.*