การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

(Solution of Differential Equations)

ในการหาพฤติกรรมของระบบทางกายภาพ(Physical Systems) นั้นส่วนมากมักจะหาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกายภาพนั้น ๆ เช่นในวงจรโครงข่ายไฟฟ้า (Electric Network) ถ้าเราต้องการหากระแสที่ไหลผ่านอุปกรณ์หนึ่งในวงจร ในทางปฏิบัติก็ใช้ แอมป์มีเตอร์วัดโดยการต่ออนุกรมกับอุปกรณ์นั้น แล้วอ่านค่าเอา แต่ในทางทฤษฎีจะต้องหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของวงจรโครงข่ายนั้นก่อน จากนั้นจึงคำนวณหาค่าต่าง ๆ ตามต้องการ

ระบบต่าง ๆ เช่นระบบทางกล (Mechanical System) ระบบทางไฟฟ้า (Electrical System) ระบบการส่งผ่านความร้อน (Heat Transfer System) ระบบของไหล (Fluid-System) รวมทั้งระบบทางสังคม (Social System) ฯลฯ เมื่อหาจากแบบจำลองทาง-คณิตศาสตร์ของระบบแล้วผลที่ได้ส่วนมากมักจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้นการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์จึงมีความจำเป็นเพื่อที่จะทำให้รู้ถึงพฤติกรรมของระบบนั้น ๆ

การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ สามารถหาได้หลายวิธี เช่น การใช้เทคนิคการอินทิเกรต(Integrating Technique) การใช้การแปลงลาปลาส และการแปลงกลับลาปลาส (Laplace Transform and Inverse Laplace Transform) และโดยการใช้สมการไดนามิกส์(Dynamic Equation) แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะเช่น การใช้เทคนิคการอินทิเกรต ส่วนวิธีอื่น ๆ จะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไป

สมการเชิงอนุพันธ์ แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ

- สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบปกติ (Ordinary Linear Differential Equation : ODE)
- สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบพาเชียล (Linear Partial Differential Equation : PDE)

ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์แบบปกติ เท่านั้น

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่ง(First Order Differentiation)

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

จัดให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์จะได้

$$dy = f(t)dt$$

อินทิเกรตทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\int dy = \int f(t)dt$$

คำตอบที่ได้คือ

$$y = \int f(t)dt$$

รูปแบบทั่ว ๆ ไป (General Form of Ordinary Linear Differential Equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$\frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

หรือเขียนอีกแบบหนึ่งจะเป็น

$$y' + ky = f(t) \qquad \text{เมื่อแทน } \frac{dy}{dt} \text{ ด้วย } y'$$

ขั้นตอนในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

- ใช้ตัวปฏิบัติการเอส (S-Operator) แทนในสมการเชิงอนุพันธ์ ในตำราบางเล่มใช้ตัว P (P-Operator) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

  1. $sy = y' = \dfrac{dy}{dt}$
  2. $s^2 y = y'' = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$
  3. $s^n y = y^n = \dfrac{d^n y}{dt^n}$
  4. $\dfrac{y}{s} = \int y dt$

- จากการใช้ตัวปฏิบัติการเอส จะทำให้ได้สมการคุณสมบัติ (Characteristic Equation)
- หาคำตอบชองสมการคุณสมบัติ
- แทนค่าในคำตอบแบบทั่ว ๆ ไป (General Solution)
- นำค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเพื่อแทนหาคำตอบ

1. การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบเนื้อเดียว

(Solution of Homogeneous First Order Differential Equation)

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเนื้อเดียว หมายถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันบังคับ (Force Function) หรือบางครั้งเรียกว่า ฟังก์ชันอินพุต(Input Function) มีค่าเท่ากับศูนย์ เช่น $\dfrac{dy}{dt} + ky = 0$ นั่นคือ $f(t) = 0$ นั่นเอง

จาก $\frac{dy}{dt} + ky = 0$ (1.1)

เมื่อ k เป็นค่าคงที่ ใช้ S-Operator จะได้

$$sy + ky = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad y(s+k) = 0 \tag{1.2}$$

สมการที่ (1.2) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$ เพราะว่าถ้าให้ $y = 0$ แล้วคำตอบจะเป็น 0 ดังนั้นจากเงื่อนไขดังกล่าวจะได้

$$s + k = 0 \tag{1.3}$$

สมการที่ (1.3) เรียกว่า **สมการคุณสมบัติ** ซึ่งหาคำตอบได้คือ $s = -k$

s เรียกว่า โหมด (Mode) หรือโพล (Pole) ของสมการ

คำตอบแบบทั่ว ๆ ไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเนื้อเดียวคือ

$$y = Ce^{st} \tag{1.4}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่ของการอินทิเกรตและ e^{st} เรียกว่าตัวประกอบของการอินทิเกรต (Integrating Factor) การหาค่า C สามารถหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการ

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $y' + 3y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 2$

วิธีทำ ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$sy + 3y = 0$$

$$y(s+3) = 0 \tag{1.5}$$

แต่สมการที่ (1.5) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s + 3 = 0$$

หรือ $s = -3$

ดังนั้นโหมดหรือโพล ของสมการคือ –3 แทนค่าในคำตอบแบบทั่ว ๆ ไปจะได้

$$y = Ce^{-3t} \tag{1.6}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 2$

แทนค่า $t = 0$ ในสมการที่ (1.6) เพื่อหาค่า $y(0)$

$$y(0) = Ce^{0t} = C$$

แต่จากเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้ $y(0) = 2$

ดังนั้น $C = 2$ นำค่า C ที่ได้แทนค่าในสมการที่ (1.6) เพื่อหาคำตอบที่แท้จริงจะได้

$$y = 2e^{-3t} \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $2y' - 4y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 10$

วิธีทำ จัดสมการใหม่**ให้สัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์สูงสุดเป็น 1** จะได้

$$y' - \frac{4}{2}y = 0 \quad \text{หรือ} \quad y' - 2y = 0$$

ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$sy - 2y = 0$$

$$y(s-2) = 0 \tag{1.7}$$

แต่สมการที่ (1.7) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ $s - 2 = 0$ หรือ $s = 2$

ดังนั้นโหมดหรือโพล ของสมการคือ 2 แทนค่าในคำตอบแบบทั่ว ๆ ไปจะได้

$$y = Ce^{2t} \tag{1.8}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 10$

แทนค่า $t = 0$ ในสมการที่ (1.8) เพื่อหาค่า $y(0)$

$$y(0) = Ce^{0t} = C$$

แต่จากเงื่อนไขเริ่มต้นกำหนดให้ $y(0) = 2$

ดังนั้น $C = 10$ นำค่า C ที่ได้แทนค่าในสมการที่ (1.8) เพื่อหาคำตอบที่แท้จริงจะได้

$$y = 10e^{2t}$$ **ตอบ**

**** จากทั้ง 2 ตัวอย่างเราพอจะจับประเด็นอะไรได้บางอย่างคือ ****

- ค่าคงที่ C คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่โจทย์กำหนดให้
- ค่าโหมดหรือโพล ของสมการคือค่าคงที่ของ y

ซึ่งในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเนื้อเดียวทำให้เรานำข้อสังเกตนี้ใช้ตอบในใจได้เลยเช่น

- $2y' + 3y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = -2$ คำตอบคือ $y = -2e^{-\frac{3}{2}t}$
- $y' - 6y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 4$ คำตอบคือ $y = 4e^{6t}$

2. การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเนื้อเดียว

(Solution of Homogeneous Second Order Linear Differential Equation)

รูปแบบทั่ว ๆ ไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเนื้อเดียว คือ

$$y'' + gy' + ky = 0 \tag{2.1}$$

เมื่อ g และ k คือค่าคงที่

ใช้ S-Operator จะได้

$$s^2 y + gsy + ky = 0$$

หรือ
$$y(s^2 + gs + k) = 0 \tag{2.2}$$

สมการที่ (2.2) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$ จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + gs + k = 0 \tag{2.3}$$

จากสมการคุณสมบัติสามารถหารากของสมการได้จากสูตรคือ

$$s = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4k}}{2} \tag{2.4}$$

จากสมการที่ (2.3) ซึ่งเป็นสมการกำลังสอง ดังนั้น ราก(Roots) หรือโหมด(Modes) หรือโพล (Poles) จะมี 2 ค่าเสมอ

ราก(Roots) หรือโหมด(Modes) หรือโพล (Poles) ของสมการกำลังสองจะมี 3 ลักษณะคือ

1. **กรณีที่** $g^2 - 4k > 0$ ซึ่งหมายความว่า $\sqrt{g^2 - 4k}$ จะเป็นตัวเลขจริง(Real Number) และมีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งรากลักษณะนี้เรียกว่า”รากจริงไม่ซ้ำ” (Distinct Real Roots) คำตอบทั่ว ๆ ไป ของสมการลักษณะนี้คือ

$$y = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \tag{2.5}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $y'' + 3y' + 2y = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -2$

วิธีทำ ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$s^2 y + 3sy + 2y = 0$$

หรือ
$$y(s^2 + 3s + 2) = 0 \tag{2.6}$$

สมการที่ (2.6) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$ ดังนั้น

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

หารากของสมการคุณสมบัติจากสูตร $s = \dfrac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4k}}{2}$

จะได้ $s = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

จะได้รากตัวที่ 1 คือ $s_1 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = \dfrac{-2}{2} - 1$

จะได้รากตัวที่ คือ $s_2 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{-3-1}{2} = \dfrac{-4}{2} - 2$

ดังนั้น ราก หรือโหมด หรือ โพล ของสมการคือ

$$s_1 = -1 \quad \text{และ} \quad s_2 = -2$$

ซึ่งเป็นกรณีที่มีรากเป็นรากจริงไม่ซ้ำ นำไปแทนค่าในสมการคำตอบทั่ว ๆ ไปคือ

$$y = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

จะได้
$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \tag{2.7}$$

หาค่า C_1 และ C_2 จากเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 1$ และ $y'(0) = -2$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (2.7) จะได้

$$y' = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \tag{2.8}$$

ให้ $t = 0$ ในสมการที่ (2.7) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 1 จะได้

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1$$

หรือ
$$C_1 + C_2 = 1 \tag{2.9}$$

ให้ $t = 0$ ในสมการที่ (2.8) เพื่อหาค่า $y'(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ -2 จะได้

$$y'(0) = -C_1 e^0 - 2C_2 e^0 = -2$$

หรือ
$$-C_1 - 2C_2 = -2 \tag{2.10}$$

แก้สมการที่ (2.9) และ (2.10) เพื่อหาค่า C_1 และ C_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

แทนค่าในสมการที่ (2.7) เพื่อหาคำตอบจะได้

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$$

$$y = 0 \times e^{-t} - 1 \times e^{-2t}$$

หรือ $y = -e^{-2t}$ **ตอบ**

2. **กรณีที่** $g^2 - 4k = 0$ ซึ่งหมายความว่า จะได้รากเป็นตัวเลขจริง(Real Number) และมีค่าซ้ำกัน ซึ่งรากลักษณะนี้เรียกว่า”รากจริงซ้ำ” (Repeated Real Roots) คำตอบทั่ว ๆ ไป ของสมการลักษณะนี้คือ

$$y = C_1e^{st} + C_2te^{st} \tag{2.11}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของ $y'' + 4y' + 4y = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 4$

วิธีทำ ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$s^2y + 4sy + 4y = 0$$

หรือ
$$y(s^2 + 4s + 4) = 0 \tag{2.12}$$

สมการที่ (2.12) จะเป็นจริงได้เมื่อ $y \neq 0$ ดังนั้น

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

หารากของสมการคุณสมบัติจากสูตร $s = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4}}{2}$

จะได้ $s = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \dfrac{-4}{2}$

จะได้รากตัวที่ 1 คือ $s_1 = -2$

จะได้รากตัวที่ 2 คือ $s_2 = -2$

ดังนั้น ราก หรือโหมด หรือ โพล ของสมการคือ $s_1 = s_2 = s - 2$

ซึ่งเป็นกรณีที่มีรากเป็นรากจริงซ้ำ นำไปแทนค่าในสมการคำตอบทั่ว ๆ ไปคือ

$$y = C_1e^{st} + C_2te^{st}$$

$$y = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} \tag{2.13}$$

หาอนุพันธ์สมการที่ (2.13) จะได้

$$y'(0) = -2C_1e^{-2t} + C_2(1 - 2t)e^{-2t} \tag{2.14}$$

ให้ $t = 0$ ในสมการที่ (2.13) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 2 จะได้

$$y(0) = C_1 = 2 \tag{2.15}$$

ให้ $t = 0$ ในสมการที่ (2.14) เพื่อหาค่า $y'(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 4 จะได้

$$y'(0) = -2C_1 + C_2 = 4 \tag{2.16}$$

แทนค่า $C_1 = 2$ ในสมการที่ (2.16) เพื่อหาค่า C_2 จะได้

$$-2 \times 2 + C_2 = 4$$

หรือ
$$C_2 = 4 + 4$$
$$C_2 = 8 \tag{2.17}$$

แทนค่าสมการที่ (2.16) และ (2.17) ในสมการ (2.13) เพื่อหาคำตอบ

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

$$y = 2e^{-2t} + 8te^{-2t}$$ **ตอบ**

3. **กรณีที่** $g^2 - 4k < 0$ ซึ่งหมายความว่า จะได้รากเป็นคู่ของตัวเลขเชิงซ้อนจริง(Complex Conjugate Pair Roots)

โดยที่ $j = \sqrt{-1}$ ถ้าให้ $a = -\frac{g}{2}$ และ $b = \frac{\sqrt{4k - g^2}}{2}$

รากของสมการจะอยู่ในรูป

$$s_1 = a + jb$$

$$s_2 = a - jb$$

คำตอบทั่ว ๆ ไป ของสมการลักษณะนี้คือ

$$y = e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt) \tag{2.18}$$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y'' + 4y' + 13y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 2$

วิธีทำ ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$s^2 y + 4sy + 13y = 0$$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 4s + 13 = 0 \tag{2.19}$$

หารากของสมการจากสูตร

$$s = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4k}}{2}$$

จะได้ $$s = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 13}}{2}$$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm j\sqrt{36}}{2}$$

$$s = \frac{-4 \pm j6}{2} = -2 \pm j3$$

$$\therefore a \pm jb = -2 \pm j3$$

แทนค่าในคำตอบแบบทั่ว ๆ ไปจากสมการที่ (2.18) คือ

$$y = e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)$$

$$y = e^{-2t}(C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t) \qquad (2.20)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (2.20) เพื่อใช้ในการหา $y'(0)$ ต่อไปจะได้

$$y' = e^{-2t}C_1(-2\sin 3t + 3\cos 3t) + e^{-2t}C_2(3\sin 3t + 2\cos 3t) \qquad (2.21)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (2.20) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 0 จะได้

$$y(0) = 0 = C_2$$

หรือ $$C_2 = 0 \qquad (2.21)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (2.21) เพื่อหาค่า $y'(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 2 จะได้

$$y'(0) = 2 = 3C_1$$

หรือ $$3C_1 = 2$$

$$C_1 = \frac{2}{3} \qquad (2.22)$$

นำสมการที่ (2.21) และ (2.22) แทนค่าในสมการ (2.20) เพื่อหาคำตอบจะได้

$$y = \frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y'' + 4y = 0$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 6$

วิธีทำ ใช้ S-Operator แทนค่าในสมการจะได้

$$s^2 y + 4y = 0$$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 4 = 0 \qquad (2.23)$$

หารากของสมการจากสูตร

$$s = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4k}}{2}$$

จะได้ $$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \times 4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{-16}}{2} = \pm\frac{j\sqrt{16}}{2} = \pm\frac{j4}{2} = \pm 2j$$

จะได้รากที่เป็นคู่จองเลขเชิงซ้อนที่ค่าจริงมีค่าเป็น ศูนย์ คือ

$$s = a \pm jb = 0 \pm jb = 0 \pm 2j = \pm 2j$$

แทนค่าในคำตอบแบบทั่ว ๆ ไป คือ

$$y = e^{at}(C_1 \sin bt + C_2 \cos bt)$$

จะได้ $$y = e^{0}(C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$$

หรือ $$y = (C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) \qquad (2.24)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (2.24) จะได้

$$y' = 2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t \qquad (2.25)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (2.24) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 0 จะได้

$$y(0) = 0 = C_2$$

หรือ $$C_2 = 0 \qquad (2.26)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (2.25) เพื่อหาค่า $y'(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 6 จะได้

$$y'(0) = 6 = 2C_1$$

หรือ $$2C_1 = 6$$

$$C_1 = 3 \qquad (2.27)$$

แทนค่าสมการ (2.26) และ (2.27) ในสมการที่ (2.24) เพื่อหาคำตอบจะได้

$$y = (C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t)$$

$$y = 3\sin 2t$$ **ตอบ**

3. การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เป็นเนื้อเดียว

(Solution of Non-Homogeneous Second Order Differential Equation)

รูปแบบทั่ว ๆ ไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบเนื้อเดียว คือ

$$y'' + gy' + ky = f(t) \qquad (3.1)$$

โดยที่ $f(t) \neq 0$ เมื่อ g และ k คือค่าคงที่ คำตอบของสมการจะเป็นผลบวกของสมการ 2 ส่วนคือ

- คำตอบที่ได้จากการให้ ฟังชันบังคับ หรือ ฟังก์ชันอินพุต เป็น ศูนย์ $f(t) = 0$ ซึ่งเรียกว่าเป็นคำตอบแบบ"คอมพลีเมนทารี่" (Complementary Solution) กำหนดให้เป็น y_c
- คำตอบที่ได้จากการให้ ฟังชันบังคับ หรือ ฟังก์ชันอินพุต ไม่เป็น ศูนย์ $f(t) \neq 0$ ซึ่งเรียกว่าเป็นคำตอบแบบ"พาทิคคิวล่า" (Particular Solution) กำหนดให้เป็น y_p

ดังนั้นคำตอบที่สมบูรณ์(Complete Solution: y) สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เป็นเนื้อ เดียวจะอยู่ในรูป

$$y = y_c + y_p \qquad (3.2)$$

ขั้นตอนในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองแบบไม่เป็นเนื้อเดียว

- หาคำตอบของ y_c
- หาคำตอบ y_p การหาคำตอบของ y_p ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันบังคับ หรือฟังก์ชันอินพุตของสมการ ซึ่งสามารถหาได้โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอมที่ตรงกันดังตารางต่อไปนี้

$f(t)$	y_p
K	A
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + c$
$K\sin\varpi t$	$A\sin\varpi t + B\cos\varpi t$
$K\cos\varpi t$	$A\sin\varpi t + B\cos\varpi t$

ตารางที่ 1

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y'' + 5y' + 6y = 12$ โดยมเงื่อนไขบังคับคือ $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 4$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาค่า y_c โดยกำหนดให้ $f(t) = 0$

นั่นคือ $y'' + 5y' + 6y = 0$

ใช้ S-Operator จะได้

$$s^2 y + 5sy + 6y = 0$$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

รากของสมการคือ

$$s = -2, -3$$

ดังนั้น จะได้

$$y_c = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \qquad (3.3)$$

ขั้นที่ 2 หาค่า y_p โดยกำหนดให้ $y_p = A$ จกตารางที่ 1

จากนั้นแทนค่า $y_p = A$ ลงสมการจะได้

$$0 + 5(0) + 6A = 12$$

$$6A = 12$$

$$A = 2$$

แต่ $y_p = A = 2$

แทนค่าในสมการ ที่ (3.2) เพื่อหาคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

$$y = y_c + y_p$$

$$y = 2 + C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \qquad (3.4)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (3.4)จะได้

$$y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \qquad (3.5)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (3.4) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 2 จะได้

$$y(0) = 2 = 2 + C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad (3.6)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (3.5) เพื่อหาค่า $y'(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 4 จะได้

$$y'(0) = 4 = -2C_1 - 3C_2$$

$$-2C_1 - 3C_2 = 4 \qquad (3.7)$$

แก้สมการที่ (3.6) และ (3.7) เพื่อหาค่า C_1 และ C_2 จะได้

จัดเข้าสมการแมททริกจะได้ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

ใช้กฎของเครเมอร์(Cramer,s Rule) จะได้

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-1} = -4$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ในสมการที่(3.4)เพื่อหาคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

จาก $y = 2 + C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$

$y = 2 + 4e^{-2t} - 4e^{-3t}$ **ตอบ**

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y'' + 5y' + 6y = 12t$ โดยมเงื่อนไขบังคับคือ $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 4$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาค่า y_c โดยกำหนดให้ $f(t) = 0$

นั่นคือ $y'' + 5y' + 6y = 0$

ใช้ S-Operator จะได้

$$s^2y + 5sy + 6y = 0$$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

รากของสมการคือ

$$s = -2, -3$$

ดังนั้น จะได้

$$y_c = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} \tag{3.8}$$

ขั้นที่ 2 หาค่า y_p โดยกำหนดให้ $y_p = A$

จากนั้นแทนค่า $y_p = At + B$ ลงสมการจะได้

$$0 + 5(A) + 6(At + B) = 12t \tag{3.9}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ t จะได้

$$5A + 6B = 0$$

$$6At = 12t$$

หรือ $6A = 12$

$$A = 2$$

$$B = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

ดังนั้น $y_p = 2t - \frac{5}{3}$

แทนค่าในสมการ ที่ (3.2) เพื่อหาคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

$$y = y_c + y_p$$

$$y = 2t - \frac{5}{3} + C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} \qquad (3.10)$$

หาอนุพันธ์ของสมการที่ (3.10)จะได้

$$y' = -2 - 3C_1e^{-2t} - 2C_2e^{-3t} \qquad (3.11)$$

ให้ $t = 0$ แทนค่าในสมการที่ (3.10) เพื่อหาค่า $y(0)$ แล้วให้มีค่าเท่ากับ 2 จะได้

$$y(0) = 2 = 2 - \frac{5}{3} + C_1 + C_2$$

$$-\frac{5}{3} + C_1 + C_2 = \frac{5}{3} \qquad (3.12)$$

แก้สมการที่ (3.11) และ (3.12) เพื่อหาค่า C_1 และ C_2 จะได้

$$C_1 = 13, C_2 = -\frac{28}{3}$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ในสมการที่(3.10)เพื่อหาคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

จาก $y = 2t - \frac{5}{3} + C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$

$$y = 2t - \frac{5}{3} + 13_1e^{-2t} - \frac{28}{3}e^{-3t}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y' + 5y = 10\sin 5t$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$

วิธีทำ

หาค่า y_c โดยให้ $f(t) = 0$ จะได้

$$y' + 5y = 0$$

$$sy + 5y = 0$$

หรือ $s = -5$

ดังนั้น $y_c = Ce^{-5t}$

จากตารางที่ 1 จะได้ว่า

$$y_p = A\sin 5t + B\cos 5t \qquad (3.13)$$

และ

$$y_p' = 5A\cos 5t - 5\sin 5t \qquad (3.14)$$

แทน y_p และ y_p' ลงในสมการจากโจทย์จะได้

$$5A\cos 5t - 5\sin 5t + 5(A\sin 5t + B\cos 5t) = 10\sin 5t$$

หรือ $5(A-B)\sin 5t + 5(A+B)\cos 5t = 10\sin 5t$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$5(A-B) = 10$$
$$5(A+B) = 0$$

หรือ $5A - 5B = 10$ (3.15)

$$5A + 5B = 0 \qquad (3.16)$$

หรือ $A = 1, B = -1$

แทนค่า $A = 1, B = -1$ ในสมการที่ (3.13) จะได้

$$y_p = A\sin 5t + B\cos 5t$$

$$y_p = \sin 5t - \cos 5t$$

ดังนั้นคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

$$y = \sin 5t - \cos 5t + Ce^{-5t} \qquad (3.17)$$

จาก $y(0) = 0$ จะได้

$$y(0) = 0 = \sin 0 - \cos 0 + C$$

$\cos 0 = C$ หรือ $C = 1$

แทนค่าในสมการที่ (3.17)เพื่อหาคำตอบที่สมบูรณ์จะได้

$$y = \sin 5t - \cos 5t + e^{-5t}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของสมการ $y'' + 2y' = 4$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 4$

วิธีทำ หา y_c จาก $y'' + 2y' = 0$

$$s^2 y + s2y = 0$$

จะได้สมการคุณสมบัติคือ $s^2 + s2 = 0$

$$s(s+2)=0$$

รากของสมการคุณสมบัติคือ

$$s_1=0, s_2=-2$$

ดังนั้น $y_c = C_1e^{0t} + C_2e^{-2t}$

หรือ $y_c = C_1 + C_2e^{-2t}$ (3.18)

หาค่า y_p จะพบว่า

$y''_p = 0$ และ $y'_p = 0$

แทนค่าในสมการจากโจทย์จะได้

$0+0=4$ ซึ่งไม่เป็นความจริง