การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

(Solution of Linear Algebraic Equations)

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้แมททริกซ์ผกผัน

จากสมการพีชคณิตเชิงเส้น

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

เมื่อ A คือแมททริกซ์สัมประสิทธิ์ ของสมการเชิงเส้น

$\underline{x}$ คือเวคเตอร์ ของตัวแปรอิสระ

$\underline{b}$ คือเวคเตอร์ ของค่าคงที่ ๆ เป็นค่า input ของระบบ

จากคุณสมบัติของแมททริกซ์ผกผัน

$$A^{-1}A = I$$

เอา A^{-1} คูณด้านหน้า (Premultiplies) ทั้ง 2 ด้าน

$$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

และจากคุณสมบัติของ Identity matrix

$$IA = AI = A$$

จะได้ $Ix = x = A^{-1}\underline{b}$

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ระบบสมการเชิงเส้น

$x_1+2x_2+2x_3 = 5$ .....(1)

$2x_1+3x_3 = 3$ .....(2)

$3x_1+3x_2+2x_3 = 6$ .....(3)

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปแมททริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$A \quad \underline{x} = \underline{b}$$

จาก $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราทราบว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\underline{x} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9(5)+2(3)+6(6) \\ 5(5)+3(-4)+1(6) \\ 6(5)+3(3)+6(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -3 \\ 19 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$x_1 = \frac{-3}{13} \quad : \; x_2 = \frac{19}{13} \quad : \; x_3 = \frac{15}{13}$$ Ans…

<u>ตรวจคำตอบโดยการแทนค่ากลับจากโจทย์</u>

จากสมการที่ 1 จะได้

$$\frac{-3}{13} + (2)\,\frac{19}{13} + (2)\,\frac{15}{13} = 5$$

$$\frac{-3+38+30}{13} = \frac{65}{13} = 5$$

จากสมการที่ 2 จะได้

$$(2)\frac{-3}{13} + (3)\,\frac{15}{13} = 3$$

$$\frac{-6+45}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

จากสมการที่ 3 จะได้

$$(3)\,\frac{-3}{13} + (3)\,\frac{19}{13} + (2)\,\frac{15}{13} = 6$$

$$\frac{-9+57+30}{13} = \frac{78}{13} = 6$$

แสดงว่าคำตอบที่ได้ถูกต้อง

<u>ตัวอย่าง</u> สมมติให้แมททริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบ มีค่าเท่ากันกับตัวอย่างที่ผ่านมา เพียงแต่เปลี่ยนแปลงค่า Input Vector ใหม่เป็น

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

การหาคำตอบก็ยังคงใช้ แมททริกซ์ผกผันเดิม แล้วแทนค่า

$\underline{y} = A^{-1}\underline{b}$ ก็จะได้คำตอบเช่นกัน

$$\underline{x} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9(-2)+2(3)+6(-4) \\ 5(-2)+3(-4)+1(-4) \\ 6(-2)+3(3)+(-4)(-4) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 0 \\ -26 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>ตรวจคำตอบโดยการแทนค่ากลับจากโจทย์</u>

จากสมการที่ 1 จะได้

(2) (-2) + (2) (1) = -2

จากสมการที่ 2 จะได้

(2)(0)+(0)(-2)+(3)(1) = 3

จากสมการที่ 3 จะได้

(3)(0) +(3)(-2) +(2)(1) = -4

แสดงว่าคำตอบที่ได้ถูกต้อง

**** <u>ระบบสมการเชิงเส้นใดๆ เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า Input Vector การหาคำตอบก็ยังคงใช้ แมททริกซ์ผกผันของแมททริกซ์สัมประสิทธิ์เดิม</u> ****

การหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยใช้ Cramer's Rule

พิจารณาจากระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

. . . .

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Cramer's Rule กำหนดให้

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

เมื่อ |A| คือ Determinant ของแมททริกซ์สัมประสิทธิ์

|Ai| คือ Determinant ของมเตริกซึ่งนำเอา Input Vector ไปแทนที่ column ที่ i ของแมททริกซ์สัมประสิทธิ์

xi คือ Vector ของตัวแปรอิสระ(Free Variable Vector) หรือ Vector ของคำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาคำตอบของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$x_1+2x_2+2x_3 = -2$ .....(1)

$2x_1+3x_3 = 3$ .....(2)

$3x_1+3x_2+2x_3 = -4$ .....(3)

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปแมททริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$$

1) det(A) = 13

2) $\det(A_1) = D_1$ = Determinant ของแมททริกซ์ที่ เอา $\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -4\end{bmatrix}$ แทนที่ column 1 ของแมททริกซ์ A จะได้

$$D_1 = \begin{bmatrix}-2 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 3\\ -4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

หา D_1 โดยเอา column 2 เป็นหลัก

$$D_1 = -2\begin{bmatrix}3 & 3\\ -4 & 2\end{bmatrix} + 0 - 3\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix} = -2[6+12]-3[-6-6]$$

$$= -2(18)-3(-12) = -36+36 = 0$$

3) $\det(A_2) = D_2$ = Determinant ของแมททริกซ์ที่ เอา $\begin{bmatrix}-2\\3\\-4\end{bmatrix}$ แทนที่ column 2 ของแมททริกซ์ A จะได้

$$D_2 = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\2 & 3 & 3\\3 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

หา D_2 โดยเอา row 1 เป็นหลัก

$$D_2 = 1\begin{bmatrix}3 & 3\\-4 & 2\end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}$$

$$= [6+12]+2[4-9]+2[-8-9] = 18-10-34 = -36$$

4)$\det(A_3) = D_3$ = Determinant ของแมททริกซ์ที่ เอา $\begin{bmatrix}-2\\3\\-4\end{bmatrix}$ แทนที่ column 3 ของแมททริกซ์ A จะได้

$$D_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\2 & 0 & 3\\3 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

หา D_3 โดยเอา row 1 เป็นหลัก

$$D_3 = 1\begin{bmatrix}0 & 3\\3 & -4\end{bmatrix} - (2)\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 3\end{bmatrix}$$

$$= [-9]-2[-8-9]-2[6]$$

$$= [-9] -(2)[-17]-[12] = -9+34-12 = 13$$

5) หาคำตอบจาก $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$

$$x_1 = \frac{D_1}{A} = \frac{0}{13} = 0$$

$$x_2 = \frac{D_2}{A} = \frac{-36}{13} = -2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{A} = \frac{13}{13} = 1$$ Ans…

Assignment#3

จงหาคำตอบของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้โดยวิธี

1) ใช้แมททริกซ์ผกผัน

2) ใช้ Cramer's Rule

A)

$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 4$ ……..(1)

$x_1 + x_3 = 0$ …….(2)

$-3x_1 + 2x_2 = -5$ …….(3)

B)

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ ……(1)

$3x_1 - x_2 + 4x_3 = -2$ ……(2)

$2x_1 + x_2 = 6$ ……...(3)

C)

$2x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 2$ ……..(1)

$-3x_1 + 24x_3 + 6x_4 = 30$ ……..(2)

$x_1 - x_2 - 20x_3 - 8x_4 = -25$ ……..(3)

$-2x_1 - 5x_2 - 23x_3 - 14x_4 = -34$ ……..(4)

D)

$-x_1 - x_2 + x_3 = 56$ ……..(1)

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 128$ ……..(2)

$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 256$ ……..(3)

การหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยวิธี Gauss-Jordan Elimination

Augmented Matrix คือการนำเอา Matrix หรือ Vector ไปต่อท้ายอีกแมททริกซ์หนึ่ง พิจารณาจาก ระบบเชองเส้นต่อไปนี้

วิธี Gauss-Jordan กำหนดให้นำเอาเวคเตอร์ของอินพุต หรือเวคเตอร์ของค่าคงที่ด้านขวามือของสมการไปต่อท้าย แมททริกซ์สัมประสิทธ์ แล้วทำ Elementary Row Operation จนได้แมททริกซ์สัมประสิทธ์ เป็นแมททริกซ์รูปสามเหลี่ยมบนแล้วแทนค่ากลับ ก็จะได้คำตอบ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำเอา Input vector ไป Augmented กับแมททริกซ์สัมประสิทธิ์ A จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \mid -2 \\ 2 & 0 & 3 \mid 3 \\ 3 & 3 & 2 \mid -4 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนการทำ Elementary Row Operation

1) สลับเอา row ที่สมาชิกตัวแรกมีค่ามากที่สุด(โดยไม่พิจารณาเครื่องหมาย) ในที่นี้สลับ row 3 กับ row 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \mid -4 \\ 2 & 0 & 3 \mid 3 \\ 1 & 2 & 2 \mid -2 \end{bmatrix}$$

2) กำจัดสมาชิกที่อยู่ใต้แนวเส้นทะแยงมุมหลัก ให้เป็น ศูนย์ หรือทำให้เป็นแมททริกซ์สามเหลี่ยมบน โดยนำค่าคงที่ใดๆ ที่ไม่ใช่ ศูนย์ คูณกับ Pivoting row เมื่อนำไปบวกกับ row ที่กำลังจะกำจัด

-กำหนดให้ Row ที่ 1 เป็น Pivoting row

-กำจัดสมาชิก row 2 column 1 โดยเอา $-\frac{2}{3}$ คูณ row 1 แล้วบวกกับ row 2 จะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & \mid -4 \\ \{-\frac{2}{3}\}3+2 & \{-\frac{2}{3}\}3+0 & \{-\frac{2}{3}\}2+3 & \mid \{-\frac{2}{3}\}(-4)+3 \\ 1 & 2 & 2 & \mid -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \mid -4 \\ 0 & -2 & 2\frac{1}{3} \mid 1\frac{2}{3} \\ 1 & 2 & 2 \mid -2 \end{bmatrix}$$

-กำจัดสมาชิก row 3 column 1 โดยเอา $-\frac{1}{3}$ คูณ row 1 แล้วบวกกับ row 3 จะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \mid -4 \\ 0 & -2 & 2\frac{1}{3} \mid 1\frac{2}{3} \\ 1 & 2 & 2 \mid -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \mid -4 \\ 0 & -2 & 2\frac{1}{3} \mid 1\frac{2}{3} \\ \{-\frac{1}{3}\}3+1 & \{-\frac{1}{3}\}3+2 & \{-\frac{1}{3}\}2+2 \mid \{-\frac{1}{3}\}(-4)-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \mid -4 \\ 0 & -2 & 2\frac{1}{3} \mid 1\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{3} \mid -1\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

-กำหนดให้ Row ที่ 2 เป็น Pivoting row

-กำจัดสมาชิก row 3 column 2 โดยเอา $\frac{1}{2}$ คูณ row 2 แล้วบวกกับ row 3 จะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2\,|\,-4 \\ 0 & -2 & 2\tfrac{1}{3}\,|\,1\tfrac{2}{3} \\ 0 & \{\tfrac{1}{2}\}(-2)+1 & \{\tfrac{1}{2}\}\{2\tfrac{1}{3}\}+1\tfrac{1}{3}\,|\,\{\tfrac{1}{2}\}\{1\tfrac{2}{3}\}-1\tfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2\,|\,-4 \\ 0 & -2 & 2\tfrac{1}{3}\,|\,1\tfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2\tfrac{1}{2}\,|\,-\tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

-เอา $2\frac{1}{2}$ หาร row 3 ตลอด

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2\,|\,-4 \\ 0 & -2 & 2\tfrac{1}{3}\,|\,1\tfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1\,|\,-2 \end{bmatrix}$$

3) แทนค่าย้อนหลัง(Back substitutions) เพื่อหาคำตอบ

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2\,|\,-4 \\ 0 & -2 & 2\tfrac{1}{3}\,|\,1\tfrac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1\,|\,-2 \end{bmatrix}$$

$x2 = [1\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3}]/[-2]$

การหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยวิธีแยกแมททริกซ์ให้เป็น LU

(LU-Decomposition Method)

จากระบบเชิงเส้น

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

ถ้าแยก A ให้อยู่ในรูปของ LU แล้วจะได้

$$L(U\underline{x}) = \underline{b}$$

$$L\underline{y} = \underline{b}$$

$$U\underline{x} = \underline{y}$$

LU-Decomposition

จากการหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยวิธีต่างๆที่ผ่านมานั้นถ้าระบบมีขนาดใหญ่มากๆแล้วจะเกิดความยุ่งยากมาก

การใช้วิธีแยกมเตริกให้อยู่ในรูปผลคูณของแมททริกซ์สามเหลี่ยมล่าง Lower Triangular Matrix (L) กับแมททริกซ์รูปสามเหลี่ยมบน Upper Triangular Matrix (U) จะทำให้ได้คำตอบของระบบเร็วกว่ามากขึ้น

พิจารณาจากแมททริกซ์ A ขนาด nxn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}.....a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}.....a_{3n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}.....a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

กำหนดให้ A=LU เมื่อ

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0.....0 \\ l_{21} & l_{22} & 0.....0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}.....0 \\ . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3}.....l_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} :U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13}.....u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23}.....u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & .....a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

ขั้นตอนการแยกแมททริกซ์จัตุรัสให้อยู่ในรูปผลคูณของ LU

1) หาค่าของสมาชิก column 1 ของแมททริกซ์ L ซึ่งมีค่าเท่ากับสมาชิกตาม column ที่ 1 ของแมททริกซ์ A

$$l_{i1} = a_{i1} \quad : \quad i = 1,2,3……n$$

2) หาค่าของสมาชิก row 1 column 2…n ของแมททริกซ์ U ซึ่งมีค่าเท่ากับการนำเอาสมาชิก row 1 column 1 ของ A ไปหารตลอด

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad : \quad j= 2,3….n$$

3) หาค่าของสมาชิก column 2 ของแมททริกซ์ L จาก

$$l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32}$$

$$. \qquad . \quad . \quad .$$

$$l_{n1}u_{12} + l_{n2} = a_{n2}$$

หรือ $l_{i2} = a_{i2} – l_{i1}u_{12}$: $i = 2,3…..n$

4) หาค่าของสมาชิก row 2 ของแมททริกซ์ U จาก

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24}$$

. . . .

$l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} = a_{2n}$

หรือ $u_{2j} = \dfrac{a_{2j} - l_{21}u_{1j}}{l_{22}} \quad : j = 3,4,.....,n$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปสมการทั่วไป ได้ดังนี้

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad (i = 1,2,...,n)$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 2,3,...,n)$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \qquad \begin{cases}(j = 2,3,...n)\\(i = j; j+1,...,n)\end{cases}$$

increment i for every j

$$u_{ij} = \frac{1}{i_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right) \qquad \begin{cases}(i = 2,3,...n)\\(j = i+1, i+2,...n)\end{cases}$$

incrementing j for every i

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา L และ U จากแมททริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & 14 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 10 & 17 & -5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0.....0 \\ l_{21} & l_{22} & 0.....0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33}.....0 \\ . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3}.....l_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \quad :U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13}.....u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23}.....u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & .....a_{3n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{nxn}$$

1) หา $l_{11};l_{21};l_{31};l_{41}$ จาก column 1 ของ matrix A

$l_{11} = -1$; $l_{21} = 2$; $l_{31} = 1$; $l_{41} = 4$

2) หา $u_{12};u_{13};u_{14}$ โดยเอาสมาชิก a_{11} ไปหาร $a_{12};a_{13};a_{14}$

$u_{12} = \dfrac{-2}{-1} = 2$; $u_{13} = \dfrac{-4}{-1} = 4$; $u_{14} = \dfrac{1}{-1} = -1$

3) หา $l_{22};l_{32};l_{42}$ จาก $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}$ $\quad \begin{cases}(j = 2,3,...n)\\(i = j; j+1,...,n)\end{cases}$

$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 7 - (2)(2) = 3$

$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 4 - (1)(2) = 2$

$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = 10 - (4)(2) = 2$

4) หา $u_{23};u_{24}$ จาก $u_{ij} = \frac{1}{i_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right)$ $\begin{cases}(i = 2,3,...n)\\(j = i+1, i+2,...n)\end{cases}$

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}}(a_{23} - l_{21}u_{13}) = \frac{1}{3}(14 - (2)(4)) = 2$$

$$u_{24} = \frac{1}{l_{22}}(a_{24} - l_{21}u_{14}) = \frac{1}{3}(4 - (2)(-1) = 2$$

4) หา $l_{33};l_{43}$ จาก $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}$ $\begin{cases}(j = 2,3,...n)\\(i = j; j+1,..., n)\end{cases}$

$$l_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) = 9 - (4+4) = 1$$

$$l_{43} = a_{43} - (l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23}) = 17 - (16+4) = -3$$

5) หา u_{34} จาก $u_{34} = \frac{1}{l_{33}}[a_{34} - (l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24})] = 3$

6) หา l_{44} จาก $l_{44} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34})$

$$l_{44} = -5 - [(4)(-1) + (2)(2) + (-3)(3)] = 4$$

คุณสมบัติของ LU

1) $|A| = |L||U|$

2) $|A| = \prod l_{ij}$ $\forall$ $i = j$

3) $A^T = L^T U^T$

4) $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

การหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยใช้วิธี LU-Decomposition

จาก $L(U\underline{x}) = \underline{b}$

$L\underline{y} = \underline{b}$

$U\underline{x} = \underline{y}$

เมื่อ $\underline{y}$ เป็นคำตอบของ Lower Traingular matrix (L) ที่สอดคล้องกับ input vector $\underline{b}$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบเชิงเส้นต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix}-1 & -2 & -4 & 1\\ 2 & 7 & 14 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 6\\ 4 & 10 & 17 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10\\26\\13\\43\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 4\end{bmatrix}:U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

จาก $L_y=\underline{b}$

$$L=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\ 26\\ 13\\ 43\end{bmatrix}$$

$$y_1=\frac{-10}{-1}=10$$

$$2y_1+3y_2=26$$

$$2(10)+3y_2=26$$

$$y_2=\frac{26-20}{3}=2$$

$$y_1+2y_2+y_3=13$$

$$10+2(2)+y_3=13$$

$$y_3=13-10-4=-1$$

$$4y_1+2y_2-3y_3+4y_4=43$$

$$40+4+3+4y_4=43$$

$$4y_4=43-40-4-3=-4$$

$$y_4=\frac{-4}{4}=-1$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

จาก $U\underline{x}=\underline{y}$

$$U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 2\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$$

แทนค่ากลับ(Backward substitution)จะได้

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -1 \\
x_3 + 3x_4 &= -1 \\
x_3 + 3(-1) &= -1 \\
x_3 &= -1 + 3 = 2 \\
x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\
x_2 + 2(2) + (2)(-1) &= 2 \\
x_2 &= 2 - 4 + 2 = 0 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 10 \\
x_1 + 8 + 1 &= 10 \\
x_1 &= 10 - 9 = 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = -1$ Ans…

การหาแมททริกซ์ผกผันโดยใช้ LU-Decomposition

จากคุณสมบัติ $A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

กำหนดให้ Z เป็น Inverse matrix ของ L นั่นคือ LZ เท่ากับ I (Identity matrix)

$$
\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ . & & \\ l_{n1} & l_{n2}.....l_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} z_{11} & 0 & 0 \\ z_{21} & z_{22} & 0 \\ . & . & . \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{nn} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ . & . & . \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

การหาค่า Z สามารถหาได้โดยตรงจากการคูณ LZ=I นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
l_{11}z_{11} &= 1 \\
z_{11} &= \frac{1}{l_{11}} \\
l_{21}z_{11} + l_{22}z_{21} &= 0 \\
z_{21} &= \frac{-l_{21}z_{11}}{l_{22}} \\
l_{31}z_{11} + l_{32}z_{21} + l_{33}z_{31} &= 0 \\
z_{31} &= \frac{-l_{31}z_{11} - l_{32}z_{21}}{l_{33}}
\end{aligned}
$$

ทำในทำนองเดียวกันในทุกๆ column จะได้สมการทั่วไปของ Z ดังนี้

$$z_{ii} = \frac{1}{l_{ii}} \qquad (i = 1,2,...n)$$

$$z_{ij} = -\frac{\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} z_{kj}}{l_{ii}} \qquad \begin{cases} (j = 1,2,...n-1) \\ (i = j+1, j+2,...n) \end{cases} \text{ incrementing i for every j}$$

$$z_{ij} = 0 \qquad \forall \qquad (i < j)$$

กำหนดให้ V เป็น Inverse matrix ของ U นั่นคือ UV = I (Identity matrix)
การหา V ก็ใช้วิธีคูณ UV = I เช่นเดียวกันกับการหา Z ซึ่งจะได้สมการทั่วไป
ดังนี้

$$v_{ii} = 1 \qquad \forall \qquad i = 1,2,...n)$$

$$v_{ij} = -\sum_{k=i+1}^{j} u_{ik} v_{kj} \begin{cases} (i = 1,2,..., n-1) \\ (j = i+1, i+2,..., n) \end{cases} \quad \text{incrementing i for every j}$$

$$v_{ij} = 0 \qquad \forall \qquad i > j$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา Inverse ของ A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & 14 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 10 & 17 & -5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} : U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จาก $A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 4 & \frac{15}{4} & \frac{5}{4} \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{19}{12} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{12} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

<u>Ans…</u>

การหาคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยวิธีของ Gauss-Jacobi

วิธีการของ Gauss-Jacobi เป็นการจัดระบบสมการให้เป็นสมการเทียบเท่าของระบบเดิม โดยการเทียบหาค่าของตัวแปรแต่ละตัว ดังตัวอย่าง

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

หาค่าของ x_1 ของสมการที่ 1

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

แทนค่า x_1 ในสมการ 2 และ 3 จะได้

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_2 + 2x_3 &= -3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 &= -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

จัดสมการใหม่ จะได้สมการเทียบเท่า(Equivalent) กับสมการเดิม

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 &= -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

จากสมการที่ 2 หาค่า x_2 : $x_2 = -\frac{3}{2}x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3$

$$x_2 = \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_3\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{10}{6} + x_3\right)$$

แทนค่าในสมการที่ 3 จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{10}{6} + x_3\right) + \frac{7}{2}x_3 &= -\frac{21}{2} \\ 4x_3 &= -\frac{21}{2} - \frac{5}{6} \\ x_3 &= \frac{-17}{6} \end{aligned}$$

นำ x_3 แทนค่าย้อนกลับ (Back substitution) จะได้คำตอบ

$$x_2 = \frac{-7}{6}$$

$$x_1 = \frac{7}{6}$$ Ans.