พีชคณิตเชิงเส้นและสมการพีชคณิตเชิงเส้น

Linear Algebra and Linear Algebraic Equations

Marices แมททริกซ์คือArrayของ เลขจำนวนเต็ม,เลขจำนวนจริง,Operators หรือ Functions โดยจัดอยู่ในกรอบวงเล็บใหญ่ [ ] สมาชิกที่เรียงในแถวของ Array เรียกว่า "แถว" หรือ "Row" สมาชิกที่เรียงในหลักของ Array เรียกว่า "หลัก" หรือ "Column" โดยทั่วๆไป สัญลักษณ์ ของแมททริกซ์ จะแทนด้วย อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ของภาษาอังกฤษ เช่น A , B , C เป็นต้น สมาชิกของแมททริกซ์ซ์ จะแทนด้วย ตัวพิมพ์เล็กและมีตัวห้อย i และ j ตัว i จะแทนตำแหน่ง row ตัว j จะแทนตำแหน่ง column ของสมาชิกในแมททริกซ์

i จะมีค่า 1,2,3……m

j จะมีค่า 1,2,3……n

เช่น $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}.....a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}.....a_{3n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \quad a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

a_{11} แสดงว่าเป็นสมาชิกที่อยู่ที่ตำแหน่ง row ที่ 1 column ที่ 1

a_{23} แสดงว่าเป็นสมาชิกที่อยู่ที่ตำแหน่ง row ที่ 2 column ที่ 3

a_{31} แสดงว่าเป็นสมาชิกที่อยู่ที่ตำแหน่ง row ที่ 3 column ที่ 1

Vectors คือแมททริกซ์ ที่มี row เดียว หรือมี column เดียว

-แมททริกซ์ ที่มี row เดียว เรียกว่า row vector

-แมททริกซ์ ที่มี column เดียว เรียกว่า vector หรือ column vector

ชนิดของ Matrices

1) Square matrix หรือแมททริกซ์จัตุรัสคือแมททริกซ์ที่มีจำนวน row และ column เท่ากัน

2)Zero matrix หรือ Null matrix คือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์ หรือ $a_{ij} = 0 \ \forall$ i and j

*** $\forall$ คือเครื่องหมาย For all หรือ ทุกๆ หรือ ทั้งหมด

3)Unit matrix คือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกทุกตัวมีค่าเป็น หนึ่ง หรือ

$a_{ij} = 1 \ \forall$ i and j

4)Identity matrix คือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกตามแนวเส้นทะแยงมุมหลัก (Main diagonal) มีค่าเป็น 1 ทุกตัวโดยทั่วๆ ไปจะใช้สัญลักษณ์ I นั่นคือ

$$I = a_{ij} = \begin{cases} 1 & \forall \quad i = j \\ 0 & \forall \quad i \neq j \end{cases}$$

เช่น

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติของ Indentity

IA = AI = A : Identity matrix คูณ กับ แมททริกซ์ใดๆ จะไม่ทำให้แมททริกซ์นั้นเปลี่ยนแปลง

5) Upper Triangular Matrix หรือแมททริกซ์สามเหลี่ยมบนคือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกที่อยู่ใต้แนวเส้นทะแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์โดยทั่วๆ ไปจะใช้สัญลักษณ์ U นั่นคือ

$$U = a_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall \quad i > j \end{cases}$$

เช่น $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6) Lower Triangular Matrix หรือแมททริกซ์สามเหลี่ยมล่างคือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกที่อยู่เหนือแนวเส้นทะแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ โดยทั่วๆ ไปจะใช้สัญลักษณ์ L นั่นคือ

$$L = a_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall \quad i < j \end{cases}$$

เช่น $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

7) Diagonal Matrix หรือแมททริกซ์เส้นทะแยงมุม คือแมททริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกทุกตัวที่ไม่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด สมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ได้ แต่เป็นได้ไม่ทุกตัว โดยทั่วๆ ไปจะใช้สัญลักษณ์ D หรือ diag(A) นั่นคือ

$$D \text{ หรือ } \text{diag}(A) = \{0 \qquad \forall \qquad i \neq j$$

เช่น D หรือ $\text{diag}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transposition of Matrix คือการสลับตำแหน่งให้ row เป็น column และให้ column เป็น row ใช้สัญลักษณ์ A^T

ถ้า $A = a_{ij}$ แล้ว $A^T = a_{ji}$

คุณสมบัติการ Transpose

$$\left[A^T\right]^T = A$$

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -2 & 3 & 8 \\ -5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -2 & 3 & 8 \\ -5 & 6 & -1 \end{bmatrix} : [A^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

** ข้อสังเกตุ ** การ Transpose จะเป็นเพียงการสลับตำแหน่งของสมาชิก ในกลุ่มสามเหลี่ยมบน กับกลุ่มสามเหลี่ยมล่างเท่านั้น สามชิกที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมหลักจะไม่เปลี่ยนแปลงตำแหน่ง

Sum of Matrices(การบวก ลบ แมททริกซ์)

แมททริกซ์ที่จะสามารถบวก ลบ กันได้จะต้อง Conform กัน นั่นคือแมททริกซ์เหล่านั้นจะต้องมีมิติเท่ากัน คือมีจำนวน row เท่ากัน และมีจำนวน column เท่ากัน ผลที่ได้จะมีมิติเท่าเดิม

$$C = A_{ij} + B_{kl} \quad \text{for } i = k \text{ and } j = l$$

<u>การ บวก ลบ</u> กัน ให้นำเอาสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันทำการ บวก ลบ กัน นั่นคือ

$$C = A \pm B = a_{ij} \pm b_{ij} \text{ For all } i \text{ and } j$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & 8 \\ -5 & 6 & 4 \end{bmatrix} :B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 8 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -6 & 14 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -8 \\ 10 & 6 & 14 \\ 4 & 14 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -6 & 0 & 2 \\ -14 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Assignment#1</u> จากตัวอย่างจงหาค่า

1) -A-B
2) A+B+C
3) -A+B-C
4) C+B+A
5) A+C
6) C+B-A

<u>การคูณแมททริกซ์ด้วยค่าคงที่</u>

ให้ c เป็นค่าคงที่ ให้ A เป็นแมททริกซ์

$C = cA = Ac$ นั่นคือ

$$cA = ca_{ij} \quad \forall \quad i, j$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$:c = 5

$$cA = 5\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 15 & 20 \\ 15 & 15 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$ Ans..

<u>คุณสมบัติการคูณแมททริกซ์ด้วยค่าคงที่</u>

1) $(\alpha\beta A) = \alpha(\beta A)$ 3) $\alpha(A+B) = A\alpha + \beta B$

2) $(\alpha+\beta)A) = (\alpha A + \beta A)$ 4) I.A = A

<u>การคูณแมททริกซ์</u>(Matrices Multiplications)

กำหนดให้

A เป็นแมททริกซ์ขนาด pxm

B เป็นแมททริกซ์ขนาด mxn

C = AB จะมีขนาด pxn

A เรียกว่า Pre- multiplies: B เรียกว่า Post-multiplies

เมื่อ $C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj,}$ i = 1……p , j=1……n

<u>คุณสมบัติการคูณแมททริกซ์</u>

1) (AB)C = A(BC) 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

2) A(B+C) = AB+AC 5) $AB \neq BA$

3) (A+B)C = AC+BC

<u>นิยาม</u> กำหนด xและ y เป็น Vector 2 vectors และ γ ให้ เป็นผลคูณภายใน (Inner product) ของ 2 Vector นี้

γ = xT<>y = yT<>x = $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ = ค่าคงที่

<u>นิยาม</u> กำหนด x_iและ y_j เป็น Vector 2 vectors ผลคูณภายนอก(Outer product) ผลของ Outer product จะทำให้เกิดแมททริกซ์ขนาด mxn

$A = x><y^T$, $a_{ij} = xi><yj$ ในกรณี x เป็น Pre-multiplier

$B = y><x^T$, $b_{ij} = yi><xj$ ในกรณี y เป็น Pre-multiplier

<u>นิยาม</u> ผลคูณของแมททริกซ์ A กับ column vector x จะเป็นผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของ column ของแมททริกซ์ A ผลที่ได้จากการคูณจะเป็นสัมประสิทธิ์ ของ vector x

$$Ax = [a_1.....a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

ซึ่งจะมีผลเหมือนกันกับการคูณแมททริกซ์ด้วย row vector

<u>นิยาม</u> ผลคูณของ row vector y^T กับแมททริกซ์ A จะเป็นผลรวมเชิงเส้นใน column ของแมททริกซ์ A ผลที่ได้จากการคูณจะเป็นสัมประสิทธิ์ ของ vector y

$$y^TA = [y_1...y_m]\begin{bmatrix} a_1^T \\ . \\ a_m^T \end{bmatrix} = y_1a_1^T + y_2a_2^T + ... + y_ma_m^T$$

การคูณแมททริกซ์ในรูปของ Inner product ถ้า A เป็นแมททริกซ์ขนาด pxm และจัดให้อยู่ในเทอมของrow และ B เป็นแมททริกซ์ขนาด mxn และจัดให้อยู่ในเทอมของ column ผลคูณของแมททริกซ์ $AB = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj,}$

<u>นิยาม</u> ถ้า C = AB โดย C มีสัมประสิทธิ์ C_{ij} ที่เกิดจาก inner product ของ row ของแมททริกซ์ A กับ column ของแมททริกซ์ B

แล้ว $c_{ij} = a_i^T b_j$

การคูณแมททริกซ์ในรูปของ Inner product

ถ้า A เป็นแมททริกซ์ขนาด pxm และจัดให้อยู่ในเทอมของ column และ B เป็นแมททริกซ์ขนาด mxn และจัดให้อยู่ในเทอมของ row ผลคูณของแมททริกซ์จะมีค่าเท่ากันกับ

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj,} \quad i = 1.....p\ ,\ j=1.....n$$

หรือเขียนในรูป

$$A = [a_1.....a_m], B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ . \\ b_m^T \end{bmatrix}$$

นิยาม ถ้า C = AB แล้ว C สามารถหาได้ในรูปผลรวมของ outer product ของ column ของ A กับ row ของ B

$$C = a_1 b_1^T + a_2 b_2^T + \ldots + a_m b_m^T$$

นิยาม ผลคูณของแมททริกซ์ AB สามารถหาได้ในรูป ผลบวกของผลคูณ ระหว่าง แมททริกซ์ A กับ column ของแมททริกซ์ B

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad : B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

หาในรูป inner product

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \qquad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 11$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

หาในรูป outer product

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

หาในรูปผลบวกของผลคูณ ระหว่าง แมททริกซ์ A กับ column ของแมททริกซ์ B

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \mid 5 \\ 9 \mid 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

หาในรูปผลบวกของผลคูณ ระหว่าง row ของแมททริกซ์ A กับmatrix B

$$C = AB =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9 & 11\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}3 & 5\\ 9 & 11\end{bmatrix}$$ Ans..

การแยกแมททริกซ์ออกเป็นส่วนๆ (Matrix Partition)

การแยกแมททริกซ์ให้เป็นย่อย (Submatrices) ในรูปของแมททริกซ์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า(Rectangular matrix) หรือในรูปแมททริกซ์จัตุรัส (Square matrix) จากตัวอย่างต่อไปนี้ จะเป็นการแยกแมททริกซ์จัตุรัส ขนาด 4x4 ให้อยู่ในรูปแมททริกซ์ย่อย 4 แมททริกซ์ โดยแมททริกซ์ย่อยเหล่านี้จะเป็นแมททริกซ์จัตุรัสขนาด 2x2

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix}a_{31} & a_{32}\\ a_{41} & a_{42}\end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix}a_{33} & a_{34}\\ a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}$$

การจัดแมททริกซ์ย่อย ไม่มีรูปแบบตายตัว อยู่ที่จุดประสงค์ในการจัดว่าเมื่อจัดไปแล้วการปฏิบัติการ (การ บวก ลบ หรือ คูณ)หลังจากแยกเป็นแมททริกซ์ย่อยแล้วจัดแบบใดจะสดวกในการปฏิบัติการ มากกว่า จากแมททริกซ์เดิม อาจจะจัดใหม่ได้ดังนี้

$$A_{11} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix}a_{14}\\ a_{24}\\ a_{34}\end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix}a_{41} & a_{42} & a_{43}\end{bmatrix} \qquad A_{23} = \begin{bmatrix}a_{44}\end{bmatrix}$$

<u>นิยาม</u> ในการแยกแมททริกซ์มีกฎในการแยกดังนี้กำหนดให้แมททริกซ์ A และ B ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}.....A_{1l} \\ . \\ . \\ A_{k1}.....A_{kl} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1n} \\ . & \\ . & \\ B_{m1} & B_{mn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ A_{ij} เป็นแมททริกซ์ย่อยของ A ที่มีขนาด $\alpha_i \times \delta_j$ และ B_{ij} ของแมททริกซ์ B ที่มีขนาด $\beta_i x \gamma_j$

1) ถ้า $k = m$, $\alpha_I = \beta_I$ และ $\delta_j = \gamma_j$ แล้ว

$$A + B = \begin{bmatrix} c_{11}.....c_{1l} \\ . \\ . \\ c_{k1}.....c_{kl} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

2) ถ้า $l = m$ และ $\delta_j = \beta_I$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11}.....c_{1n} \\ . \\ . \\ c_{k1}.....c_{kn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $C_{ij} = \sum_{q=1}^{l} A_{iq} B_{qj}$

3)

$$A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T .....A_{k1}^T \\ . \\ . \\ A_{1l}^T .....A_{kl}^T \end{bmatrix}$$

นิยามข้อที่ 1 ใช้จัดแมททริกซ์ย่อยให้ Conform กับการบวก-ลบ

นิยามข้อที่ 2 ใช้จัดแมททริกซ์ย่อยให้ Conform กับการคูณ

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณา การแยกแมททริกซ์ A และ B

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

เมื่อแยกแมททริกซ์ออกเป็นแมททริกซ์ย่อยแล้ว จะได้มเตริกย่อยขนาด 2x2 ทำให้สามารถทำการคูณกันได้โดยง่าย

พิจารณาว่า แมททริกซ์ A ,B สามารถทำการ บวก-ลบ กันได้หรือไม่ จะเห็นว่าไม่สามารถ บวก-ลบ กันได้เพราะไม่ Conform กันเนื่องจาก แมททริกซ์ย่อย A_{11} ไม่ Conform กับ B_{11} และ A_{21} ไม่กับ Conform B_{21}

Assignment#2

จงหาผลคูณของแมททริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad k=5$$

1) AB
2) BA
3) AC
4) CA
5) ABC
6) k(AC)
7) k(CA)
8) k(AB)

ตัวกำหนด(Determinants)

การหาค่า Determinant โดยใช้ Laplace Expansion

กำหนดให้ row ใด row หนึ่ง หรือให้ column ใด column หนึ่งเป็นหลักจากนั้นให้ตัด column ออกไปทีละ 1 column(ในกรณี row เป็นหลัก)

Minor คือ determinant ของสมาชิกที่ไม่ถูกตัดจากการกำหนดให้ row หรือ column ใดๆ เป็นหลักแล้วตัด column/row ออกไปทีละ 1 column/row ^{j}ใช้สัญลักษณ์ M_{ij}

Cofactor คือ Minor คูณด้วย $(-1)^{i+j}$ ใช้สัญลักษณ์ C^{ij}

Determinant ของแมททริกซ์จัตุรัสขนาด nxn กำหนดจากผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกตาม row/column ที่ถูกกำหนดให้เป็นหลัก Cofactor

กรณีให้ row 1 เป็นหลัก

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{1j}$$

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) ตัด row1/column1 สมาชิกที่ถูกตัดคือ 1 นำเอาสมาชิกที่ถูกตัดคูณกับ $(-1)^{1+1}$ แล้วนำไปคูณกับ Determinant ของสมาชิกที่ไม่ถูกตัด คือdet3]=3 จะได้ 1(3) = 3

2) ตัด row1/column2 สมาชิกที่ถูกตัดคือ 2 นำเอาสมาชิกที่ถูกตัดคูณกับ $(-1)^{1+2}$ จะได้ –2 แล้วนำไปคูณกับ Determinant ของสมาชิกที่ไม่ถูกตัด คือ det[2]=2 จะได้ –2(2) = -4

3) เอาผลที่ได้จาก ข้อ 1 และ 2 รวมกันก็จะเป็นค่า det(A)

det(A) = 3-4 = -1 Ans..

*** ข้อสังเกต *** ในกรณีแมททริกซ์ขนาด 2x2 determinant ของแมททริกซ์จะเกิดจากการเอาสมาชิกตามแนวเส้นทะแยงมุมหลัก(จากด้านซ้ายบนไปด้านขวาล่าง) คูณกันผลที่ได้นำไปคูณกับ (+1) แล้วนำไปบวกกับผลคูณของสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุม(จากด้านซ้ายล่างไปด้านขวาบน)ผลที่ได้ให้คูณกับ (-1) นั่นคือ

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (+1)(a_{11}a_{22})+(-1)(a_{21}a_{12})$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา determinant ของ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ row 1 เป็นหลัก

$$| A | = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

เมื่อ

$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ เกิดจากการตัด row 1 column 1

$M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ เกิดจากการตัด row 1 column 2

$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ เกิดจากการตัด row 1 column 3

$$|A| = a_{11}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{11}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{11}a_{33}- a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+ a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{13}a_{31}a_{22}$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

นั่นคือในกรณีแมททริกซ์ขนาด 3x3 Determinant สามารถหาได้จากการนำเอา column ที่ 1 และ 2 ไปต่อท้าย(Augmented) แมททริกซ์ A แล้วคูณทะแยงตามแนวเส้นทะแยงมุม โดยคูณทะแยงขึ้นมีค่าเป็นลบ และคูณทะแยงลงมีค่าเป็นบวก

การหาค่า determinant โดยวิธี Laplace Expansion ถ้าแมททริกซ์มีขนาดใหญ่มากๆแล้วจะใช้เวลาและขั้นตอนในการคำนวณมาก อีกวิธีหนึ่งในการหาค่า determinant ที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงคือการใช้วิธี Row reduce

หรือเรียกว่า Elementary Row Operation (ERO)

<u>คุณสมบัติบางประการของแมททริกซ์</u>

1) การสลับตำแหน่ง row ทำให้ค่า determinant เปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย
2) การนำค่าคงที่คูณกับ row หนึ่งแล้วนำไปบวกกับอีก row หนึ่ง ไม่ทำให้ค่า determinant เปลี่ยนแปลง
3) ค่า determinant ของ Upper triangular;Lowwer triangular; หรือ Diagonal matrix จะเท่ากับผลคูณของสมาชิกที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุมหลักหรือ

$$\det(A) = \prod a_{ij} \quad \text{for } i = j$$

4) แมททริกซ์จัตุรัส ขนาด nxn ใดๆ ถ้าสมาชิกของ row หนึ่งเป็นอัตราส่วนของอีก row หนึ่ง ค่า determinant ของแมททริกซ์นั้นจะมีค่าเท่ากับ 0 (ศูนย์)
5) แมททริกซ์จัตุรัส ขนาด nxn ใดๆ ถ้าสมาชิกของ row หนึ่งหรือ column หนึ่งมีค่า = 0 ทั้งหมด ค่า determinant ของแมททริกซ์นั้นจะมีค่าเท่ากับ 0 (ศูนย์)
6) แมททริกซ์จัตุรัส ขนาด nxn ใดๆ ถ้า Rank $\neq$ n ค่า determinant ของแมททริกซ์นั้นจะมีค่าเท่ากับ 0 (ศูนย์)

<u>Rank</u> คือจำนวน row ที่ไม่เป็นศูนย์ของแมททริกซ์จัตุรัส ขนาด nxn ใดๆ เมื่อผ่านการทำ ERO อย่างสมบูรณ์แล้ว

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา determinant และ Rank matrix ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

สลับ Row ที่ 1 กับ Row ที่ 2 จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

เอา $\frac{-1}{2}$ คูณ row 1 แล้วนำไปบวกกับ row 2

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2-\frac{3}{2} \end{bmatrix} = 1$$

Rank = 2 <u>Ans..</u>

ตัวอย่าง จงหา determinant และ Rank matrix ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1) เอา –2 คูณกับ row 1 แล้วบวกกับ row 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2) เอา –3 คูณกับ row 1 แล้วบวกกับ row 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าเมื่อทำ ERO อย่างสมบูรณ์แล้ว แมททริกซ์ A มี row ที่เป็นศูนย์ 2 row ดังนั้น rank(A) = 3-2 =1

นั่นคือ rank $\neq$ n ดังนั้น determinant ของ matrix A = 0 Ans…

ตัวอย่าง จงหา determinant และ Rank matrix ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1) เอา –2 คูณ row 1 แล้วนำไปบวก row 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

2) สลับ Row ที่ 2 กับ Row ที่ 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3) เอา –1.5 คูณ row 1 แล้วนำไปบวก row 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

det(A) = 1x1.5x6 = 9

rank(A) = 3 Ans…

Singular Matrix คือแมททริกซ์ที่มี determinant = 0

Non-Singular Matrix คือแมททริกซ์ที่มี determinant $\neq 0$

Symmetric Matrix คือแมททริกซ์จัตุรัสขนาด nxn ใดๆ ที่ $A = A^T$

แมททริกซ์ผกผัน (Inverse of Matrix)

แมททริกซ์ผกผันของแมททริกซ์จัตุรัส A ขนาด nxn ใดๆเขียนแทนด้วย A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

เมื่อ $adj(A)$ คือ Adjugate ของ Matrix A

$\det(A)$ คือ Determinant ของ Matrix A

$adj(A) = [cof(A)]^T$

$cof(A)$ = ค่าที่ได้จาก $(-1)^{i+j}$ (minor) ของ matrix A

คุณสมบัติผกผัน $A^{-1}A = I$

ตัวอย่าง จงหา Inverse ของแมททริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1) หา determinant ของแมททริกซ์ A

เอา column ที่ 2 เป็นหลักจะได้

$$|A| = -2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 0 - 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -2[4-9]-3[3-4] = -2(-5)-3(-1)$$

$|A| = 13$

2) หา Minor ของแมททริกซ์ A

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ; M_{12} = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ; M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ; M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} ; M_{23} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; M_{32} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} ; M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -9 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$ Ans…

ตรวจคำตอบจากคุณสมบัติ $A^{-1}A = I$

$$\frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1(-9)+2(2)+3(6) & 2(-9)+2(0)+6(3) & 2(-9)+2(3)+6(2) \\ 5(1)+2(-4)+1(3) & 5(2)+0(-4)+1(3) & 5(2)+3(-4)+1(2) \\ 6(1)+3(2)+3(-4) & 6(2)+0(3)+3(-4) & 6(2)+3(3)+2(-4) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$