ดังนั้น เมื่อ เราเลือกค่า $\delta > \alpha$ อินทิกอลข้างบนนี้จะลู่เข้าได้อย่างสมบูรณ์

ฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเชียลอันดับอาจจะถูกกำหนดขึ้นจากอีกวิธีหนึ่งได้ กล่าวคือ ถ้ามีเลขจำนวนบวกจริง α เกิดขึ้น ฟังก์ชั่น $f(t)$ จะเป็นเอ็กโปเน็นเชียลอันดับ ซึ่งทั้งนี้

$$\lim_{t \to \infty} \left[e^{-\delta t} f(t)\right] = 0 \qquad (1.20)$$

ถ้า $\int(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (1.20) ดังนั้นสามารถแสดงได้อย่างง่าย ๆ ว่า

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\delta t} dt \text{ ถูกกำหนดค่าได้ที่ } \delta > \alpha$$

เฉพาะฉะนั้นบริเวณของการลู่เข้าคือ

$$\infty > \delta > \alpha \qquad (1.21)$$

เงื่อนไขข้างบนนี้จะเหมือนกับกรณีของลาปลาสทรานส์ฟอร์มทั้งสองข้าง เพียงแต่ว่าในกรณีนี้ β จะถูกแทนด้วย ∞ ซึ่งความจริงอันนี้จะเป็นเพราะสมการที่ (1.14)สอดคล้องที่ $\beta = \infty$ และ $f(t)$ เป็นคอซอลฟังก์ชัน ลาปลาสทรานส์ฟอร์มจะลู่เข้าที่ค่า s ต่าง ๆ โดยกำหนดให้

Rcs = $\delta > \alpha$

ซึ่ง α จะสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (1.20)

ค่าต่ำสุดของ α ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขในสมการที่ (1.20) จะกล่าวได้ว่าเป็นแอบซิซซ่า (abscissa) ของการลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolute convergence) ตามฟังก์ชัน $f(t)$ ที่กำหนดให้

พิจารณาด้วยอย่างยูนิตสเตปฟังชัน (unit-step function) u(t) ซึ่ง

$$\lim_{t \to \infty} u(t)e^{-\alpha t} = 0 \text{ ที่ทุก ๆ ค่าของ } \alpha > 0$$

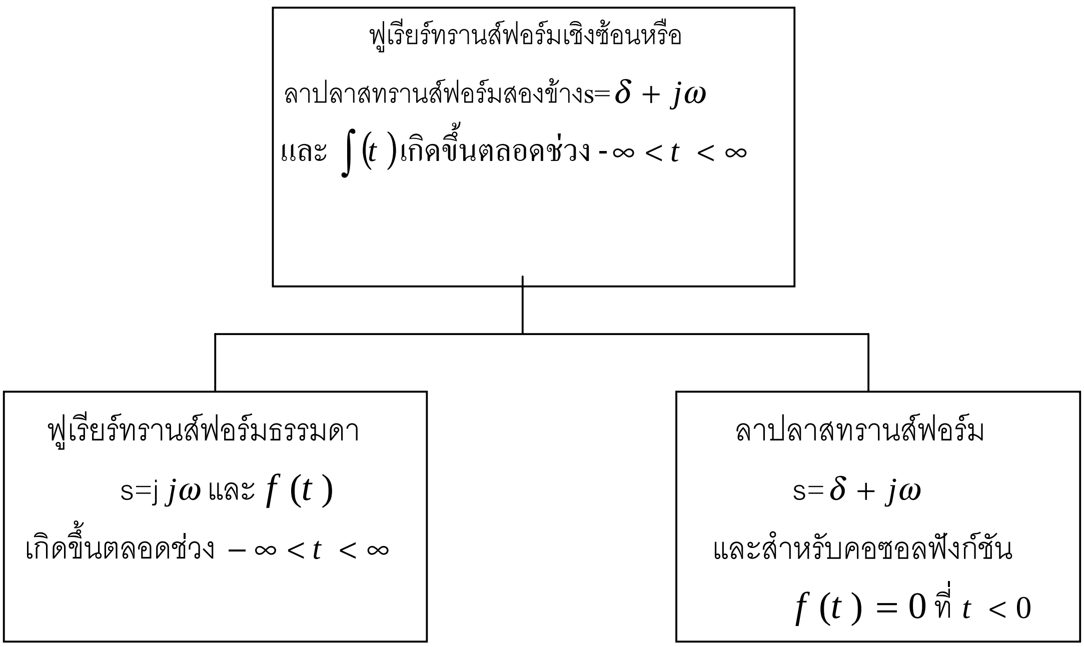
ดังนั้น บริเวณของการลู่เข้าของลาปลาสทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชัน u(t) จะกำหนดให้ δ >0 และทำนองเดียวกันนี้ ในกรณีของ $e^{-\alpha t} u(t)$ สามารถแสดงได้ว่าบริเวณที่ลู่เข้าคือ $\delta > \alpha$

วิธีการวิเคราะห์ความถี่จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันหรือไม่ก็ตามนั้น ในทางปฏิบัติแล้วจะทำให้ได้รับลาปลาสทรานส์ฟอร์มเสมอ ในที่นี้สามารถกำหนดได้ว่าสัญญาณที่เป็นไปได้ทางฟิสิกส์สามารถกำหนดลาปลาสทรานส์ฟอร์มได้ และกล่าวได้ว่าสัญญาณจะต้องเป็นเอ็กโปเน็นเซชียลอันดับ นั่นเป็นอีกวิธีหนึ่งที่กล่าวได้ว่า $f(t)$ จะต้องไม่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนเกินกว่า $Me^{\alpha t}$ เมื่อ M และ α เป็นค่าบวกจริง มีบางฟังก์ชันที่เพิ่มขึ้นเร็วเกินกว่า $Me^{\alpha t}$ เช่น e^{t^2} หรือ t^t ซึ่งทั้งสองฟังก์ชันนี้ไม่สามารถมีลาปลาสทรานส์ฟอร์มเกิดขึ้น และไม่มีความสำคัญในทางปฏิบัติ แต่ฟังก์ชันทั้งสองก็สามารถหาลาปลาสทรานส์ฟอร์มได้โดยพิจารณาจากฟังก์ชันของลิมิต โดยสมมุติ e^{t^2} เกิดขึ้นในช่วง $0 < t < T$ และเป็นศูนย์ที่ $t > T$ โดยจะมีค่าเท่าไรก็ได้ แต่จะต้องถูกจำกัดที่ค่าใดค่าหนึ่ง

1.6 ความหมายของลาปลาสทรานส์ฟอร์ม

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดา เสมือนเป็นเครื่องมืออันหนึ่ง เพื่อใช้สำหรับแทนฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในผลรวมของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเซียลที่ต่อเนื่องตามความถี่ต่าง ๆ บนแกน $j\omega$ กล่าวคือ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$



รูปที่ 1.4 ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดา และลาปลาส์ฟอร์มที่กำหนดจากฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน

กล่าวโดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดาสามารถนำไปกำหนดฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนได้ โดยการแทนฟังก์ชัน $\int(t)$ ให้เป็นผลรวมของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเซียลที่ต่อเนื่องตามค่าความถี่เชิงซ้อน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

สมการข้างบนจะแสดงถึง $f(t)$ ซึ่งเป็นผลรวมของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเซียลที่ต่อเนื่องตามค่าความถี่ที่อยู่ในส่วนของ $\delta + j\omega$ เมื่อ $\omega. = -\infty$ ถึง ∞ สำหรับกรณีที่ $\delta = 0$ หรือ $s = j\omega$ นั้นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรดาก็คือ กรณีเฉพาะอันหนึ่งของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนนั่นเอง ลาปลาสทรานส์ฟอร์มเป็นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนอย่างแท้จริง เมื่อฟังก์ชัน $f(t)$ ไม่เป็นคอซอลฟังก์ชัน ซึ่ง $f(t)$ นี้มีค่าเป็นศูนย์ที่ $t < 0$ ดังนั้น ลาปลาสทรานส์ฟอร์มจึงเป็นกรณีเฉพาะอันหนึ่งของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน ความสัมพันธ์ระหว่างทรานส์ฟอร์มต่าง ๆ แสดงไว้ในรูปที่ 1.4 ดังนั้นลาปลาสทรานส์ฟอร์มจะแสดงถึงคอซอลฟังก์ชัน $f(t)$ ซึ่งเป็นผลรวมที่ต่อเนื่องของความถี่เชิงซ้อนแบบเอ็กโปเน็นเซียล ดังแสดงให้เห็นจากการพิจารณาในตัวอย่าง

ตัวอย่างต่อไปนี้จะพิจารณาฟังก์ชัน $e^{-\partial t}u(t)$ โดยจะแสดงให้อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเซียลที่ต่อเนื่องตามค่าความถี่เชิงซ้อนต่าง ๆ โดยวิธีลาปลาสทรานส์ฟอร์ม กล่าวคือ จากสมการที่ (1.9)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

เมื่อ

$$f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

$$e^{-\alpha t}u(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)e^{st}\,ds \qquad (1.22a)$$

ซึ่ง F (s) หาได้จากสมการที่ (1.10) คือ

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t) e^{-st}\, dt \;= \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}\, dt$$

$$F(s) = \frac{-1}{s+\alpha} e^{-(\delta + j\omega + \alpha)t} \Big|_0^\infty, s = \delta + j\omega$$

$$= \frac{1}{s+\alpha} \text{ ถ้า } (\delta + \alpha) > 0 \text{ กล่าวคือ } \delta > -\alpha \qquad (1.22)$$

สังเกตว่า ถ้า $(\delta + \alpha) > 0$ ค่าอินทิกอลข้างบนจะเข้าสู่ค่าอนันต์ และทรานต์ฟอร์มจะไม่เกิดขึ้น ดังนั้นบริเวณของการลู่เข้าจะกำหนดโดย $\operatorname{Re} s > -\alpha$ บริเวณในระนาบ s (s plane) ที่ $\operatorname{Re} s > -\alpha$ แสดงไว้ในรูปที่ 1.5 ดังนั้นเราสามารถแสดงฟังก์ชัน ให้อยู่ในรูปผลรวมของเอ็กโปเน็นเชียลเชิงซ้อนที่ต่อเนื่องได้ โดยนำเอาสมการที่ (1.22) ไม่แทนลงในสมการที่ (1.22a) คือ

$$e^{-\alpha t} u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\omega}^{\delta + j\infty} \frac{1}{s+a} e^{st}\, ds \qquad (1.23)$$

รูปที่ 1.5

ฟังก์ชัน 1/(s+α) ในสมการที่ (1.23) แสดงถึงแอมปลิจูดสัมพันธ์ (relative amplitude) ของส่วนประกอบความถี่ต่าง ๆ และอินทิกอลแสดงถึงการรวมที่ต่อเนื่องของฟังก์ชันเอ็กโปเน็น-

เชียล ซึ่งเส้นความถี่จะอยู่ในทางเดิน $\delta + j\omega$ ขณะที่ ω มีค่าจาก - ∞ ถึง ∞ เราจะเลือกทางเดินนี้ได้อย่างไรนั้น จากการพิจารณาข้างบนนี้ แสดงให้เห็นว่าทางเดินจะต้องวางอยู่ในบริเวณของการลู่เข้า แต่อย่างไรก็ตามข้อสรุปอันนี้ก็ต้องอาศัยคุณสมบัติบางอย่างประกอบด้วย และมันก็เป็นการพอเพียงที่จะเลือกทางเดินของการอินทิเกรททั้งหมดภายในบริเวณของการลู่เข้า (ทางเดินที่ 1 และ 2 ใน รูปที่ 1.5) อย่างไรก็ตามไม่จำเป็นว่าทางเดินทั้งหมดจะวางอยู่ในบริเวณของการลู่เข้า ทั้งนี้จากคุณสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) สามารถแสดงได้ว่า ทางเดินของการอินทิเกรทที่ต้องการอาจจะอยู่ทางด้านขวาของ singularity points (โพล) ของ F(s) ในกรณีที่แสดงไว้นี้ singularity จะอยู่ที่ s = -α และทางเดินทางด้านขวาของ s = -α (ดังตัวอย่างในทางเดินที่ 3) จะสามารถกำหนดขึ้นได้ มักปรากฏชัดเจนว่ามีทางเดินของการอินทิเกรทที่เป็นไปได้มีมากมาย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1.5 เนื่องจากความถี่ทั้งหมดบนทางเดินนี้วางอยู่ในส่วนทางด้านซ้าย การเลือกทางเดินที่ 1 เท่ากับเป็นการแสดง $f(t)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกที่ต่อเนื่องของสัญญาณไซน์ที่ลดลงแบบเอ็กโปเน็นเชียล หรืออีกนัยหนึ่งนั้นทางเดินที่ 2 ที่อยู่ในส่วนทางด้านขวาทั้งหมดนั้นจะเป็นการแสดง $f(t)$ ให้เป็นผลบวกที่ ต่อเนื่องของสัญญาณไซน์ที่เพิ่มขึ้นอย่างเอ็กโปเน็นเชียล ทางเดินที่ 3 ซึ่งอยู่ทั้งทางด้านซ้ายและขวา จะสืบเนื่องจากการแทน $f(t)$ เป็นผลรวมที่ต่อเนื่องของสัญญาณไซน์ที่กำลังเพิ่มขึ้นและลดลงอย่างเอ็กโปเน็นเชียล กล่าวคือ $e^{-\alpha t}u(t)$ เมื่อ อินทิเกรทตามทางเดินเหล่านี้ อินทิกอลทางด้านขวาของสมการที่ (1.23) จะได้ผลลัพธ์ที่เหมือนกัน

สังเกตว่า เราอาจจะเลือกทางเดินตามแกน $j\omega$ ได้ ซึ่งการเลือกทางเดินนี้เสมือนว่าเป็นการแทน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกที่ต่อเนื่องของเอ็กโปเน็นเชียล $e^{j\omega t}$ (ตามแกน $j\omega$) และถ้าเป็นไปเช่นนี้แล้วฟูเรียร์ทราสฟอร์มสามารถกำหนดได้อย่างแน่นอน ดังนั้น กรณีเมื่อ $x = j\omega$ ลาปลาสทรานส์ฟอร์มจะกลายเป็นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม มันจำเป็นที่จะต้องสังเกตว่า มีค่าขอบเขตล่างเป็น δ (ในกรณีนี้คือ α) แต่ไม่มีขอบเขตบนซึ่งเราสามารถเลือก δ ให้มีค่าสูง ๆ ได้ตามที่เราต้องการ (มากกว่าขอบเขตล่าง 0_m) ดังนั้น สัญญาณสามารถแสดงเป็นผลบวกที่ต่อเนื่องของสัญญาณไซน์ที่เพิ่มขึ้นอย่างเอ็กโปเน็นเชียล อาจจะเลือกสัญญาณไซน์เหล่านี้เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วได้ตามที่เราต้องการ

จุดประสงค์สำคัญอันหนึ่งที่ต้องการแสดงให้เห็นอย่างชัดเจน ณ ที่นี้นั้น ก็เพื่อแสดงการแปลงความถี่ (frequency transforn) ของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปผลบวกที่ต่อเนื่องของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเชียล ซึ่งเกิดขึ้นในช่วงทั้งหมด $(-\infty < t < \infty)$ ดังนั้นลาปลาสทรานส์ฟอร์มก็จะเป็นการแทนคอซอลฟังกัน $f(t) = 0, t < 0$ ให้เป็นผลบวกที่ต่อเนื่องของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเชียลไม่รู้จบ (เกิดขึ้นในช่วง $-\infty < t < \infty$) ตามที่ได้กล่าวไปแล้วว่า $f(t)$ เป็นศูนย์ที่ค่า t เป็นลบ แต่อย่างไรก็ตามมันจะเกิดขึ้นได้เมื่อส่วนประกอบเอ็กโปเน็นเชียลไม่รู้จบบวกเพิ่มเข้าไป ซึ่งจะได้รับค่า

ศูนย์ที่ $t < 0$ และได้รับฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ $t < 0$ ทั้งนี้อาจกล่าวย้ำได้ว่าลาปลาสทรานส์ฟอร์มเสมือนเป็นเครื่องมืออันหนึ่งซึ่งเราสามารถนำมาใช้แสดงคอซอลฟังก์ชันให้เป็นผลบวกที่ต่อเนื่องของฟังก์ชันเอ็กโปเน็นเชียลไม่รู้จบ ตามค่าความถี่ต่าง ๆ ทั้งหมด และผลบวกที่ต่อเนื่องสามารถแสดงได้โดยอินทิกอล

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st}\, ds$$

ฟังก์ชัน F(s) เป็นแอมปลิจูดสัมพันธ์ (relative amplitude) ของส่วนประกอบของความถี่ s

1.7 ลักษณะเฉพาะของลาปลาสทรานส์ฟอร์ม

สำหรับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน ซึ่งอาจเรียกว่าเป็นลาปลาสทรานส์ฟอร์มทั้งสองข้าง และแสดงได้ว่าทรานส์ฟอร์มกลับ (inverse transform) ของฟังก์ชัน F(s) จะไม่เป็นลักษณะเฉพาะ นอกจากว่าบริเวณที่ลู่เข้าไม่ได้ถูกกำหนดไว้แล้ว มีทรานส์ฟอร์มกลับที่กำกวมเกิดขึ้น ถ้าบริเวณที่ลู่เข้าไม่ได้ถูกกำหนดไว้ ทรานสฟอร์มกลับอาจจะเป็นฟงก์ชัน $f_1(t)$ ซึ่งเกิดขึ้นที่ค่า t เป็นลบ หรืออาจจะเป็นฟังก์ชัน $f_2(t)$ ซึ่งเกิดขึ้นที่ค่าเวลาเป็นลบ และเป็นศูนย์ที่ค่าเวลา t เป็นบวก หรืออีกนัยหนึ่งในกรณีของทรานส์ฟอร์มข้างเดียว ทุก ๆ ฟังก์ชันจะเกิดขึ้นที่ค่าเวลา t ที่เป็นบวก และเป็นศูนย์ที่ค่าของ t เป็นลบ ดังนั้นจะไม่มีทรานส์ฟอร์มกลับที่คำถาม ถึงแม้ว่าบริเวณของการลู่เข้าจะไม่ได้ถูกกำหนดขึ้นก่อน สำหรับเหตุผลนี้ในกรณีของลาปลาสทรานส์ฟอร์มเราจะหลีกเลี่ยงที่จะกล่าวถึงบริเวณของการลู่เข้า เพราะฉะนั้นจึงเป็นไปได้ว่า ลาปลาสทรานส์ฟอร์มกลับเป็นลักษณะเฉพาะอันหนึ่ง

ทรานส์ฟอร์มกลับอาจจะหาได้จากการคำนวณอินทิกอลเชิงซ้อนในสมการที่ (1.17) ซึ่งการคำนวณอินทิกอลนี้ก็ต้องคุ้นเคยกับฟังก์ชันตัวแปรเชิง
ซ้อน (complexvariable) และแคลคูลัสที่เกี่ยวกับเรซิดิว (residue) โดยการอินทิเกรทจะทำตามทางเดินจาก $(\delta - j\infty)$ ถึง $(\delta + j\infty)$ ซึ่งสำหรับบางฟังก์ชันนั้นการคำนวณค่อนข้างจะยุ่งยาก แต่อย่างไรก็ตามก็ไม่จำเป็นต้องคำนวณหาอินทิกอลเชิงซ้อนดังกล่าวนี้ ซึ่งคำนวณได้โดยใช้ตารางลาปลาสทรานส์ฟอร์ม ตารางมาตรฐานของลาปลาสทรานส์ฟอร์ม ทั้งที่เป็นทรานส์ฟอร์มตรงและทรานส์ฟอร์มกลับของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับทางปฏิบัติได้แสดงไว้ในตาราง

1.8 การคำนวณหาลาปลาสทรานส์ฟอร์ม

การคำนวณหาลาปลาสทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันที่พบอยู่เสมอในทางปฏิบัติ ส่วนมากแล้วจะเป็นฟังก์ชันที่เริ่มต้นที่เวลา t = 0 ดังการพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

1. เอ็กโปเน็นเชียลฟังก์ชัน (Exponential function)

$$f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

$$L[f(t)] = \left[L[e^{at}u(t)\right]$$

จากสมการที่ (1.16) และ (1.16a) เมื่อ

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = F(s)$$

ดังนั้น

$$L\left[f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\int_0^\infty e^{(s+a)t}\,d\left[-(s+a)\right]t$$

$$L\left[f(t)\right] = -\frac{1}{(s+a)}e^{-(s+a)t}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\left[e^{-(s+\alpha)\infty} - e^{-(s+\alpha)0}\right]$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$

$$L[f(t)] = -\frac{1}{(s+a)}\left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{0}}\right]$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right]$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\left[0 - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{(s+a)}\left[-1\right]$$

$$= \frac{1}{(s+a)}$$

เพราะฉะนั้น

$$L\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{s+a} = F(s) \qquad (1.24)$$

และ

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}u(t) \qquad (1.25)$$

สมการที่ (1.25) หมายความว่า

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = f(t)$$

หรือ $f(t)$ อาจจะหาได้จากสมการที่ (1.17) เมื่อ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} \frac{1}{(s + \alpha)} e^{st} ds = e^{-st} u(t)$$

2. ยูนิตสเตปฟังก์ชัน (unit –step function)

ลาปลาสทรานส์ฟอร์มของยูนิตสเตปฟังก์ชัน สามารถหาได้จากลาปลาสทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชัน $e^{-\alpha t} u(t)$ โดย กำหนดให้ α เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นลาปลาสทรานส์ฟอร์มของ $u(t)$ สามารถกำหนดได้จากสมการที่ (1.24) คือ

$$L\left[e^{-\alpha t} u(t)\right] = \frac{1}{s+\alpha} = F(s)$$

เพราะฉะนั้นจากสมการข้างบนจะได้

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} = F(s), \alpha \text{ เข้าสู่ศูนย์} \qquad (1.26)$$

และ

$$L^{-1}[F(s)] = \quad L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t) \qquad (1.27)$$

3. ไซนูซอยด์ฟังก์ชัน (sinusoidal function)

ไซนูซอยด์ฟังก์ชันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของเอ็กโปเน็นเชียลฟังก์ชันได้จากสูตรของออยเลอร์(Euler Formula)

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \qquad (a)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t \qquad (b)$$

(a)+(b) จะได้ $\quad e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos \omega t$

หรือ $\quad \cos \omega t = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

(a)-(b) จะได้ $\quad e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j \sin \omega t$

หรือ $\quad \sin \omega t = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

ดังนั้น

$$f(t) = \sin\omega\ t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega\ t}}{2j}$$

$$L[f(t)] = \quad L[\sin\omega\ t] = \quad L\left[\frac{e^{j\omega\ t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right]$$

จากสมการที่ (1.16) และ (1.16a) ; L $[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$

$$L[\sin\omega t] = \int_0^\infty \frac{e^{-j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t}e^{-st} - e^{-j\omega t}e^{-st}\right)dt$$

$$L[\sin\omega t] = \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t}dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(-\frac{1}{(s-j\omega)}\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} d[-(s-j\omega)t] - \frac{-1}{(s+j\omega)}\int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} d[-(s+j\omega)t]\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(-\frac{1}{(s-j\omega)}e^{-(s-j\omega)t}\ \Big|_0^\infty + \frac{1}{(s+j\omega)}e^{-(s+j\omega)t}\ \Big|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{-\frac{1}{(s-j\omega)}(0-1) + \frac{1}{(s+j\omega)}(0-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\frac{1}{(s-j\omega)} - \frac{1}{(s+j\omega)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{\frac{(s+j\omega)-(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{s + j\omega \;\; - s + j\omega}{s^2 - (j\omega)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2}\right)$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = F(s) \qquad (1.28)$$

และ

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \sin \omega \; t = \int(t) \qquad (1.29)$$

เช่นเดียวกัน

$$L[\cos \omega \; t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = F(s) \qquad (1.30)$$

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] = \cos \omega \; t = f(t) \qquad (1.31)$$

สมการที่ (1.29) และ (1.31)   หมายความว่า

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta + j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} \, ds$$

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{st} \, ds = \sin \omega t$$

และ

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{st} \, ds = \cos \omega t$$

ลาปลาสทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันดังกล่าวข้างต้น และฟังก์ชันที่นอกเหนือจากที่กล่าวนี้ซึ่งคำนวณหาได้เช่นเดียวกันได้แสดงไว้ในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 ลาปลาสทรานส์ฟอร์ม

ลำดับที่	$f(t)$	L $[f(t)] = F(s)$
1	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
2	A	$\frac{A}{s}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+a}$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-a}$
5	$e^{-j\alpha x}$	$\frac{1}{s+j\omega}$
6	$e^{j\alpha x}$	$\frac{1}{s-j\omega}$
7	sin at	$\frac{a}{s^2+a^2}$
8	cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$
10	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
11	$e^{(\alpha+j\omega)t}$	$\frac{1}{s-\alpha-j\omega}$
12	$e^{(\alpha-j\omega)t}$	$\frac{1}{s-\alpha+j\omega}$
13	t^{η}	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
14	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
15	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
16	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_{20}}$
17	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_{20}}$
18	$\delta(t)$	1

1.9 ข้อสังเกตในการหาฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจากลาปลาสทรานส์ฟอร์ม

เนื่องจากฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเป็นกรณีเฉพาะอันหนึ่งของลาปลาสทรานส์ฟอร์ม ภายใต้เงื่อนไขที่ $s = j\omega$ รูปแบบของฟูเรียร์ทราส์ฟอร์มที่ผ่านมาจึงเป็นการแทน $s = j\omega$ ดังเช่นการพิจารณาจากตัวอย่างของฟังก์ชัน $e^{-at}u(t)$ คือ

$$L\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{s+a}$$

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชัน $e^{-at}u(t)$ สามารถหาได้โดยแทน $s = j\omega$ ในสมการข้างบนคือ

$$L\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{j\omega+a}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากสมการข้างบนเป็นผลลัพธ์ที่ถูกต้อง และอาจดูได้จากตาราง ที่ 3.1B[1] ซึ่งผลลัพธ์อันนี้จะใช้ได้เฉพาะกรณีที่ a เป็นค่าบวก ถ้า a เป็นค่าลบ ฟังก์ชันก็จะไม่เป็นอินทิกอลอย่างสมบูรณ์ และฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มก็จะไม่เกิดขึ้น ซึ่งสังเกตได้จากบริเวณของการลู่เข้าของลาปลาสทรานส์ฟอร์ม เราสามารถแสดงได้ว่า (ดูรูปที่ 1.5) บริเวณของการลู่เข้าของฟังก์ชัน $e^{-at}u(t)$ จะถูกกำหนดที่ Re s>-a และถ้า a เป็นบวกบริเวณของการลู่เข้าจะประกอบด้วยแกน $j\omega$ แต่อย่างไรก็ตามเมื่อ a เป็นลบ และบริเวณของการลู่เข้าไม่มีแกน $j\omega$ ร่วมอยู่ด้วย ดังนั้นแล้วฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มก็ไม่เกิดขึ้น

เราต้องระมัดระวังเมื่อต้องการหาฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจากลาปทรานส์ฟอร์มจากการแทน s ด้วย $j\omega$ เนื่องจากฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของฟังก์ชันเหล่านั้นอาจจะหาได้จากลิมิตเท่านั้น ดังตัวอย่างจากการพิจารณายูนิตสเตปฟังก์ชัน $u(t)$ ข้างล่างนี้

$$L\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}$$

เพื่อที่จะได้รับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มนั้น เราจะแทน s ในสมการข้างบนด้วย $j\omega$ คือ

$$\left[u(t)\right] = \frac{1}{j\omega}$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากสมการข้างบนนี้ไม่ถูกต้อง เพราะว่าฟังก์ชัน $1 / j\omega$ มีค่าเป็นอนันต์ที่ $\omega = 0$ ดังนั้นจึงไม่สามารถกำหนดฟังก์ชันนี้ได้ และค่าอนันต์นี้อันที่จริงแล้วมันจะเป็นอิมพัลส์ฟังก์ชัน (impulse function) ที่มีความสูงเท่ากับ π ที่จุดกำเนิด[1] ซึ่งอาจแสดงให้เห็นได้ดังข้างล่างนี้

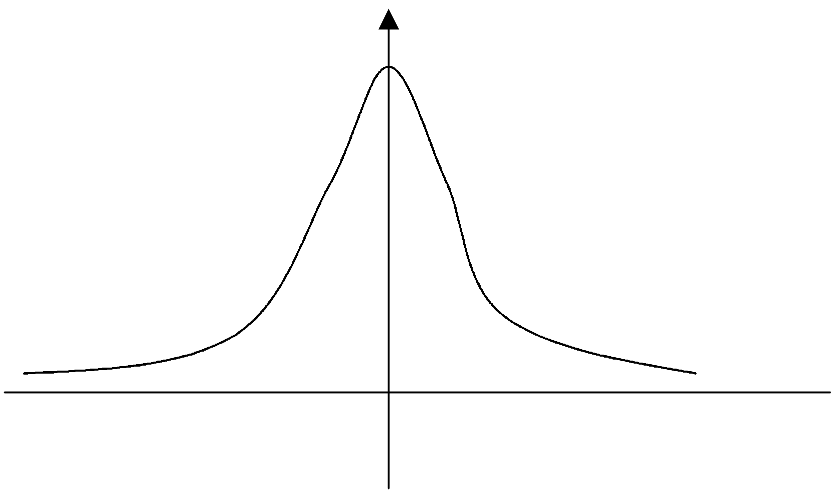
พิจารณาฟังก์ชัน $u(t)$ จากฟังก์ชัน $e^{-at}u(t)$ โดยให้ลิมิตของ a เข้าสู่ศูนย์ดังนั้น

$$u(t) = \lim_{a \to 0}\left[e^{-at}u(t)\right]$$

และ

$$L[u(t)] = \lim_{a \to 0} L\left[e^{-at}u(t)\right]$$

$$L[u(t)] = \lim_{a \to 0}\left[\frac{1}{s+a}\right] \qquad (1.32)$$



รูปที่ 1.6

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของ $u(t)$ หาได้จากสมการที่ (1.32) โดยให้ $s = j\omega$ และกำหนด ลิมิตของ $a \to 0$ เพราะฉะนั้น