

บทที่ 1 ลาปลาซทรานส์ฟอร์ม

(Laplace Transform)

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเสมือนเป็นเครื่องมืออันหนึ่งที่ถูกนำมาใช้เพื่อสำหรับแทนฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ ให้อยู่ในรูปผลรวมเอ็กโปเนนเชียล $e^{j\omega t}$ ที่ต่อเนื่อง ดังแสดงไว้ใน [I]* ซึ่งความถี่เอ็กโปเนนเชียลนี้ จำจำกัดอยู่เฉพาะในระนาบความถี่เชิงซ้อนบนแกน $j\omega$ เท่านั้น แต่อย่างไรก็ตาม โดยทั่วๆ ไปแล้วเราต้องการที่จะแทนฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปผลรวมเอ็กโปเนนเชียลที่ต่อเนื่องในรูปแบบ e^{st} ($s = \delta + j\omega$) ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วๆ ไปและเราสามารถนำผลที่ได้นี้ไปใช้กับกรณีที่ $s = j\omega$ ดังนั้นมันเป็นไปได้ที่จะแทนฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ ให้อยู่ในรูปแบบผลรวมเอ็กโปเนนเชียลที่ต่อเนื่องตามความถี่เชิงซ้อนต่างๆ ได้กล่าวคือ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.1a)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.1b)$$

ซึ่งสมการที่ (1.1a) และ (1.1b) จะพิสูจน์ให้เห็นจริงดังหัวข้อข้างล่างนี้

1.1 ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน (Complex Fourier Transform)

จากเรื่องฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มในบทที่ 3 [I]* สมการที่ (3.1.10) **คือ

$$F[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.2)$$

$$F^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.3)$$

สังเกตจากสมการที่ (1.2) และ (1.3) นั้นจะเห็นว่าฟังก์ชันทางขวามือ ตัวแปร ω ถูกอยู่กับตัว $j\omega$ ได้คือ

$$F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega) \quad (1.4)$$

และ

$$F^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega = f(t) \quad (1.5)$$

ซึ่ง $F(\omega)$ และ $F(j\omega)$ จะแสดงถึงฟังก์ชันเดียวกัน [คือฟูรีเยร์ทรานส์ฟอร์มของ $f(t)$]

$$\text{กำหนดให้ฟังก์ชัน } \varphi(t) = f(t) e^{-\delta t}$$

เมื่อ δ เป็นจำนวนคงที่จริง ดังนั้น

$$F[\varphi(t)] = J[f(t) e^{-\delta t}]$$

จากสมการที่ (1.4) จะได้ว่า

$$F[\varphi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\delta t} e^{-j\omega t} dt$$

$$F[\varphi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\delta + j\omega)t} dt$$

เปรียบเทียบสมการที่ (1.4) กับ (1.6a) ดังนั้นจากสมการที่ (1.6a) จะได้ว่า

$$F[\varphi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{(\delta + j\omega)t} dt = F(\delta + j\omega)$$

เพราะฉะนั้น

$$F[\varphi(t)] = F(\delta + j\omega)$$

และจากสมการที่ (1.5) กับ (1.6b) จะเห็นได้ว่า

$$F^{-1}[F(\delta + j\omega)] = \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

จากที่กำหนดให้ $\varphi(t) = f(t) e^{-\delta t}$ ดังสมการที่ (1.7) คือ

$$\varphi(t) = f(t) e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

เพราะฉะนั้น

$$f(t) e^{-\delta t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{e^{-\delta t}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{j\omega t} e^{\delta t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\delta + j\omega) e^{(\delta + j\omega)t} d\omega \quad (1.8)$$

ซึ่งจำนวน $\delta + j\omega$ เป็นความถี่เชิงซ้อน และจากที่กำหนดให้

$$s = \delta + j\omega \quad (1.8.a)$$

$$ds = d(\delta + j\omega) = 0 + dj\omega$$

เพราะว่า δ เป็นจำนวนคงที่จริง ดังนั้น

$$ds = jd\omega$$

$$d\omega = (1/j)ds \quad (1.8b)$$

และลิมิตของการอินทิเกรตในสมการที่ (1.8) ; $\omega = -\infty$ จะกลายเป็น $(\delta - j\infty)$ ลงในสมการที่ (1.8) ดังนั้นจากสมการที่ (1.8) คือ

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.9)$$

และจากสมการที่ (1.6a) กับ (1.6b) คือ

$$F[\varphi(1)] = F(\delta + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\delta + j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.10)$$

สมการที่ (1.9) จะแสดงถึงฟังก์ชัน $f(t)$ ซึ่งเป็นผลรวมของฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลที่ต่อเนื่องตามความถี่เชิงซ้อน $s = \delta + j\omega$ สืบเนื่องจากสมการที่ (1.9) และ (1.10) จะเห็นว่าสำหรับในกรณีของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจะกำหนดให้ $\delta = 0$ ดังนั้น $s = j\omega$ ซึ่งสมการที่ (1.9) และ (1.10) จะเรียกว่า คู่ของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน หรือคู่ของการแปลงฟูเรียร์เชิงซ้อน (complex Fourier transform pair) หรือ คู่ของการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง (bilateral Laplace transform)

ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน หรือลาปลาซทั้งสองข้างจะเขียนแทนด้วย

$$F(s) = F^{-1}[f(t)]$$

และ $f(t) = F^{-1}[F(s)]$

สังเกตว่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนหรือการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง $[F(s)]$ ของ $f(t)$ สามารถหาได้โดยแทน $j\omega$ จะเรียกว่า ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์ม

พิจารณาฟังก์ชัน $f(t) = e^{-at} u(t)$ และจากตารางที่ 3.1 B [1] จะได้ว่า

$$F[f(t)]_F = [e^{-at} u(t)] \frac{1}{a + j\omega} \quad (1.11)$$

ซึ่งฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน หรือลาปลาซทรานส์ฟอร์มทั้งสองข้างอาจจะคำนวณได้โดยตรงจากสมการที่ (1.10) หรือหาได้จากสมการที่ (1.11) โดยแทน $j\omega$ ด้วย s ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นคือ

จากสมการที่ (1.11) จะได้ $F[e^{-at} u(t)] = \frac{1}{a + s}$ ซึ่งเป็นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน หรือลาปลาซทรานส์ฟอร์มทั้งสองข้าง

1.2 การเกิดขึ้นของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน

จากสมการที่ (1.10) แสดงให้เห็นว่า ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนของ $f(t)$ จะต้องเกิดขึ้นถ้า

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{สามารถหาค่าได้} \quad (1.12)$$

แต่เพราะว่า

$$|f(t) e^{-st}| = |f(t)| e^{\alpha t} \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{st}| &= |f(t)e^{(\delta+j\omega)t}|, s = \delta + j\omega \\
&= |f(t)e^{-\delta t} \cdot e^{j\omega t}| \\
\text{ซึ่ง } e^{j\omega t} &= \cos \omega t - j \sin \omega t \\
|e^{-j\omega t}| &= |\cos \omega t - j \sin \omega t| = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = \sqrt{1} = 1 \\
\text{ดังนั้น} \quad |f(t)e^{st}| &= |f(t)|e^{-\delta t} \tag{1.12a}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนจะเกิดขึ้นได้อย่างแน่นอน ถ้า

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-\delta t} dt < \infty \text{ (หรือสามารถหาค่าได้)} \tag{1.13}$$

ถ้ามีเลขจำนวนจริงบวกที่กำหนดค่าได้ (M) เกิดขึ้น และ α กับ β เป็นเลขจำนวนจริงด้วย ดังนั้น

$$|f(t)| \leq \begin{cases} Me^{\alpha t}, t > 0 \\ Me^{\beta t}, t < 0 \end{cases} \tag{1.14a} \tag{1.14}$$

$$\tag{1.14b}$$

ซึ่งเงื่อนไขของสมการที่ (1.13) จะต้องสอดคล้องหรือเป็นไปตามค่า δ ที่มากกว่า α แต่น้อยกว่า β ซึ่งอินทิกรัลของสมการที่ (1.13) จะลู่เข้า (converge) อย่างแน่นอนในช่วง

$$\beta > \delta > \alpha$$

ซึ่งในกรณีนี้อาจแสดงให้เห็นอย่างง่าย ๆ ได้ โดยแยกอินทิกรัลของอสมการที่ (1.12) ออกเป็นสองส่วนคือ

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{st} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

แทนฟังก์ชัน $f(t)$ จากอสมการ (inequality) ที่ (1.14a) ในอินทิกรัลเทอมที่ 2 และแทนฟังก์ชัน $f(t)$ จาก อสมการที่ (1.14b) ในอินทิกรัลเทอมที่ 1 ของสมการข้างบนจะได้

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} M e^{\beta t} e^{st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{st} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{st} dt \end{aligned}$$

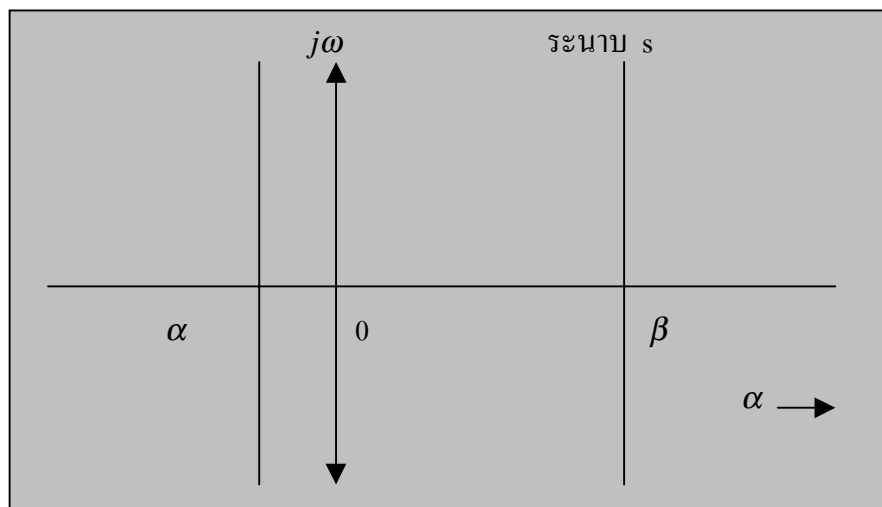
แทนฟังก์ชัน $f(t)$ จาก อสมการ (inequality) ที่ (1.14a) ในอินทิกรัลเทอมที่ 2 และแทนฟังก์ชัน $f(t)$ จาก อสมการที่ (1.14b) ในอินทิกรัลเทอมที่ 1 ของสมการข้างบนจะได้




$$\begin{aligned} F(s) &\leq \int_{-\infty}^0 M e^{\beta t} e^{st} dt + \int_0^{\infty} M e^{\alpha t} e^{st} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^0 M e^{(\beta-s)t} dt + \int_0^{\infty} M e^{(\alpha-s)t} dt \end{aligned}$$

$$\leq M \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\beta-s} e^{(\beta-s)t} d(\beta-s) + M \int_0^{\infty} \frac{1}{(\alpha-s)} e^{(\alpha-s)t} d(\alpha-s)$$

$$\leq M \left\{ \frac{1}{(\beta - s)} e^{(\beta - s)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{(\alpha - s)} e^{(\alpha - s)t} \Big|_0^{\infty} \right\}$$

จาก อสมการข้างบนนี้ แสดงให้เห็นว่า อินทิกรอลเทอมที่ 1 จะลู่เข้าเมื่อ $\text{Re } s < \beta$ และอินทิกรอลเทอมที่ 2 จะลู่เข้าเมื่อ $\text{Re } s > \alpha$ ซึ่งบริเวณทั้งสองนี้แสดงไว้ในรูปที่ 1.1 และบริเวณอินทิกรอลทั้งสองลู่เข้าอย่างแท้จริง เป็นบริเวณที่ร่วมกันอยู่ (common region) คือ $\beta > \delta > \alpha$ และบริเวณของการลู่เข้าสัมพันธ์ตามฟังก์ชันเวลาต่าง ๆ แสดงดังพื้นที่แรเงาไว้ในรูปที่ 1.2 จะเห็นได้ว่าสำหรับทุก ๆ ค่าของ s ที่อยู่ในบริเวณของการลู่เข้า ฟังก์ชัน $F(s)$ โพลของ $F(s)$ จะอยู่ภายนอกบริเวณที่ลู่เข้า ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเวลาที่เป็นบวกทั้งหมด และเกิดขึ้นเฉพาะในช่วง $(0, \infty)$ ดังนั้นจากรูปที่ 1.1 โพลของ $F(s)$ จะอยู่ด้านซ้ายมือของบริเวณของการลู่เข้าเท่านั้น



-  บริเวณของการลู่เข้าเมื่อฟังก์ชัน $f(t)$ อยู่ในช่วง $-\infty$ ถึง 0 (ฟังก์ชันเวลาที่เป็นลบ)
-  บริเวณของการลู่เข้าเมื่อฟังก์ชัน $f(t)$ อยู่ในช่วง 0 ถึง ∞ (ฟังก์ชันเวลาที่เป็นบวก)
-  บริเวณของการลู่เข้าตลอดฟังก์ชัน $f(t)$

รูปที่ 1.1

ลักษณะเดียวกันนี้ ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันเวลาที่เป็นลบทั้งหมด และเกิดขึ้นในช่วง $(-\infty, 0)$ โพลของ $F(s)$ จะอยู่ด้านขวาบริเวณของการลู่อู่ สำหรับ $f(t)$ ใดๆ ที่เกิดขึ้นในช่วง $-\infty, \infty$ $F(s)$ ของมันจะมีหลาย ๆ โพล ซึ่งอยู่ทั้งด้านซ้ายและด้านขวาบริเวณของการลู่อู่ โดยที่โพลบริเวณด้านซ้ายจะเกิดขึ้นเนื่องจากส่วนของเวลาของ $f(t)$ ที่เป็นลบ ซึ่งจากความจริงดังกล่าวนี้ มันจะมีความสำคัญมากในการนำมาใช้หาทรานส์ฟอร์มกลับ (inverse transform)

สังเกตว่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดา (คือที่ $s = j\omega$ ของฟังก์ชันที่แสดงในรูปที่ 1.2c และ 1.2f) จะไม่เกิดขึ้น แต่สำหรับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนจะเกิดขึ้น ในขณะที่ฟังก์ชันทั้งสองนี้สอดคล้องกับสมการที่ 1.14 ภายในบริเวณที่ลู่อู่ ตามรูปที่แสดงไว้ ซึ่งทั้งนี้ก็เป็นเพราะว่ามีตัวประกอบการลู่อู่เพิ่มขึ้นในบริเวณที่ลู่อู่ ตามรูปที่แสดงไว้ ซึ่งทั้งนี้ก็เป็นเพราะว่ามีตัวประกอบการลู่อู่เพิ่มขึ้นในฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน สำหรับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดานั้น ทรานส์ฟอร์มจะเกิดขึ้นแน่นอนถ้า

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

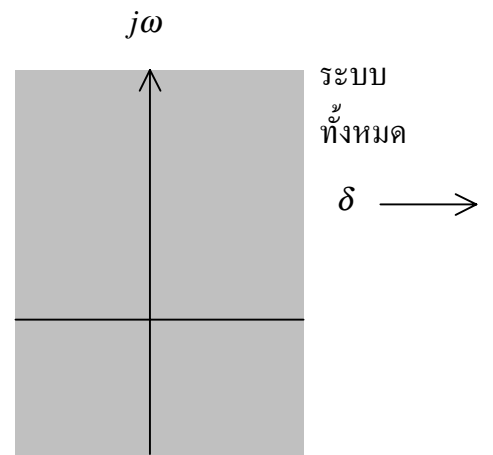
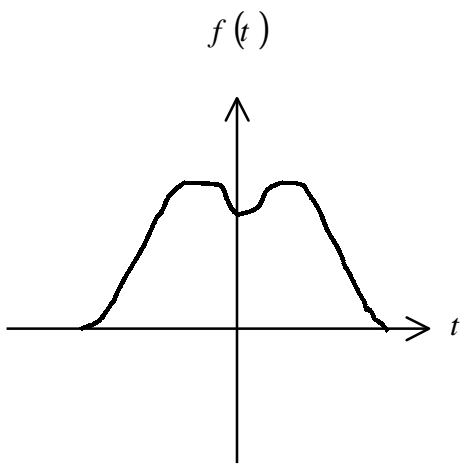
หรืออีกนัยหนึ่ง ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-\delta t} dt < \infty$$

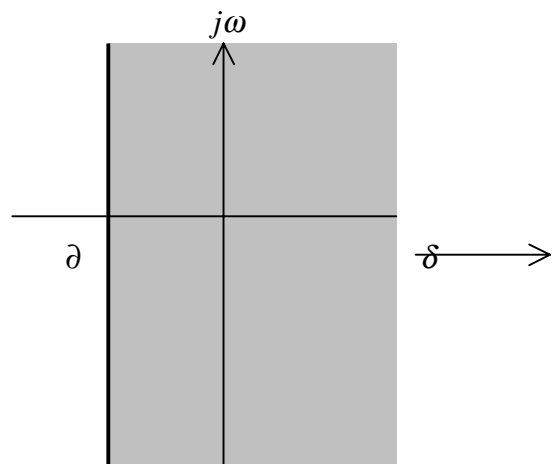
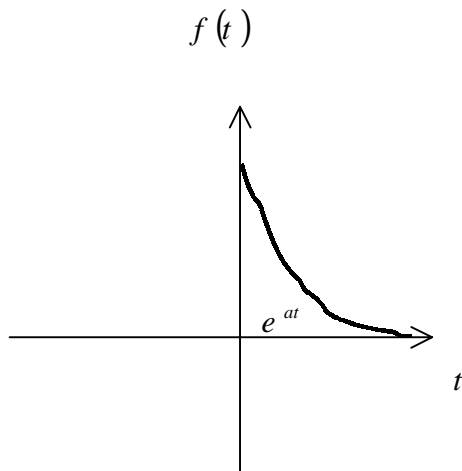
ตัวประกอบ $e^{-\delta t}$ คือตัวประกอบการลู่อู่ (convergence factor) ซึ่งเราสามารถเลือกค่า δ ได้ตามต้องการ เพื่อให้อินทิกรัลเข้าได้อย่างสมบูรณ์ เพราะฉะนั้นฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนจะครอบคลุมได้กว้างกว่าฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดา และตามที่ได้กล่าวไปแล้วว่า ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน เมื่อ $\delta = 0$ หรือตัวประกอบการลู่อู่เป็น 1

บริเวณที่เรากล่าวถึงในรูปที่ 1.2 เป็นบริเวณของการลู่อู่และสำหรับกรณีเฉพาะของฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดานั้น บริเวณของการลู่อู่จะเป็นแกนจินตภาพ ซึ่ง $s = j\omega$ และนอกจากนั้น ถ้าบริเวณของการลู่อู่ของฟังก์ชัน $f(t)$ ใดๆ ที่ประกอบด้วย

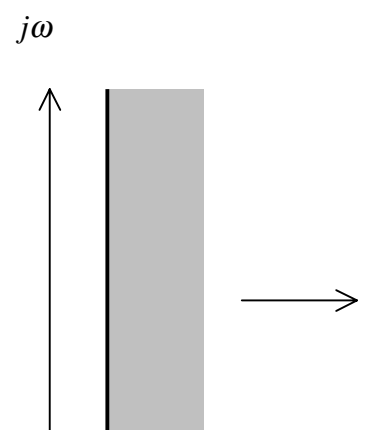
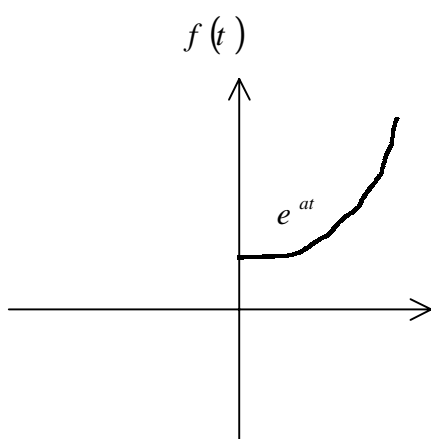
สัญญาณที่มีช่วงเวลจำกัด



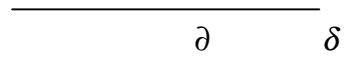
(a)



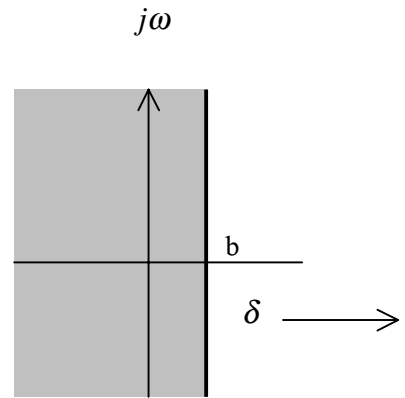
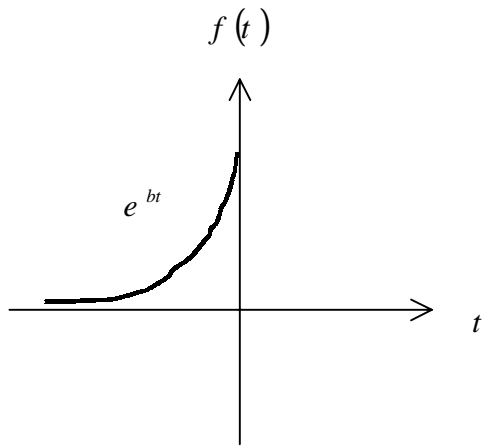
(b)



t

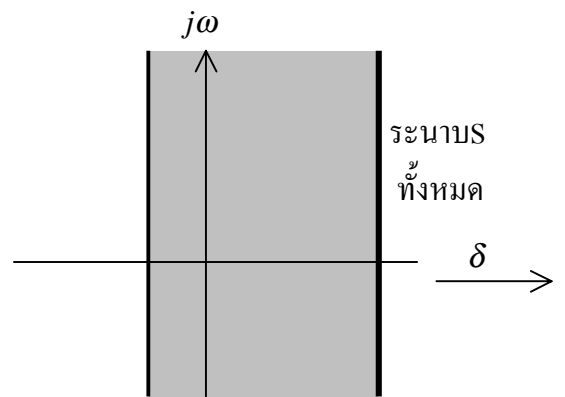
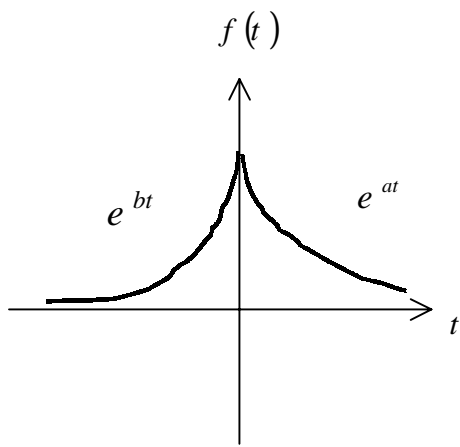


(c)

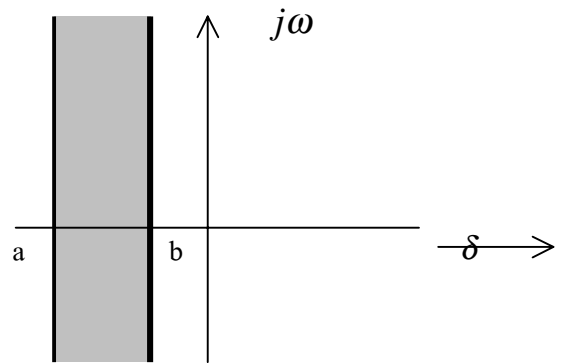
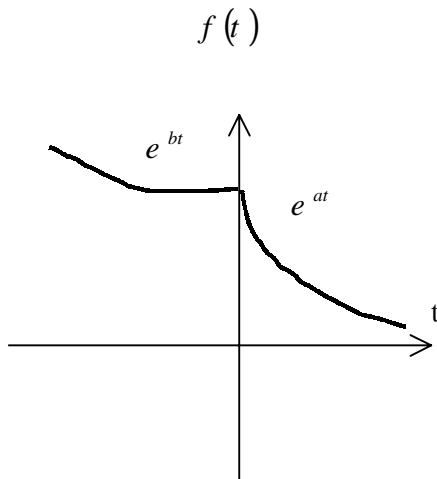


(d)

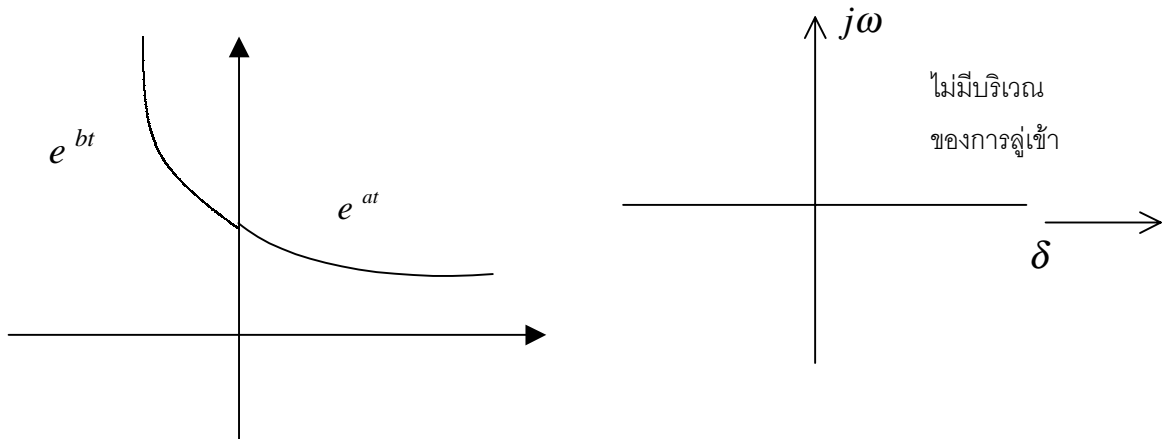
รูปที่ 1.2



(e)



(f)



(g)

รูปที่ 1.2 (ต่อ)

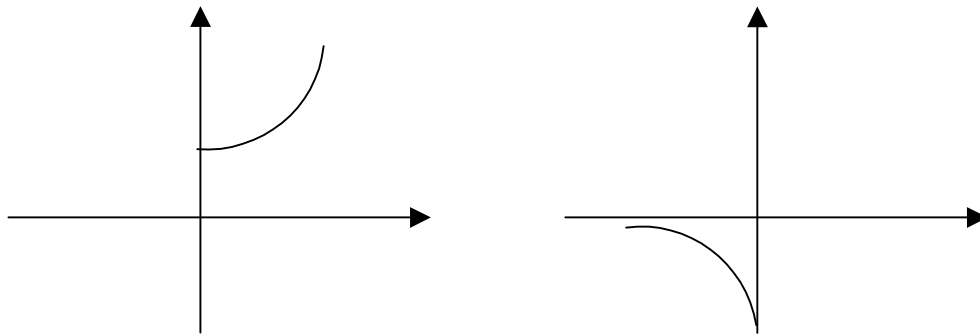
ดังนั้นรูปฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดาฟังก์ชัน $f(t)$ ก็สามารถจะเกิดขึ้น และหาได้จากสมการแทน $s = j\omega$ ในฟังก์ชัน $F(s)$ สำหรับฟังก์ชันที่แสดงในรูปที่ 1.2a 1.2b 1.2d และ 1.2e นั้นบริเวณการลู่อื่นจะประกอบด้วยแกนจินตภาพ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันเหล่านั้นจะหาฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดาได้ แต่อย่างไรก็ตาม ถ้าบริเวณการลู่อื่นไม่ประกอบด้วยแกนจินตภาพ ฟังก์ชันจะไม่สามารถสอดคล้องกับเงื่อนไขอินทิกรัลสัมบูรณ์ และฟังก์ชันนั้น ๆ ก็ไม่สามารถหาฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มธรรมดาได้ (แต่ก็มีฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนในบริเวณของการลู่อื่น ซึ่งฟังก์ชันที่แสดงในรูปที่ 1.2c และ 1.2f เป็นกรณีดังกล่าวนี้

1.3 ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนที่เหมือนกัน

เมื่อไรก็ตามถ้าหากทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนเกิดขึ้น บริเวณของการลู่อื่นจะถูกกำหนดขึ้น และสามารถที่จะหาทรานส์ฟอร์มกลับ (การแปลงกลับ) ของมันได้ แต่ถ้าบริเวณของการลู่อื่นกำหนดไม่ได้ ทรานส์ฟอร์มกลับก็จะหาไม่ได้ ดังการพิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

ถ้าฟังก์ชันที่ 1; $f_1(t) = e^{at} u(t)$

และถ้าฟังก์ชันที่ 2; $f_2(t) = e^{-at} u(t)$ ซึ่งทั้งสองฟังก์ชันแสดงดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3

ฟูรีเยร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อนของทั้งสองฟังก์ชันคือ $F_1(s)$ และ $F_2(s)$ ซึ่งจะหาได้จากสมการที่ (1.10) กล่าวคือ

$$\text{จากสมการที่ (1.10); } F_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt$$

จากรูปที่ 1.3a จะได้ว่า

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt$$

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^0 e^{at} u(t) e^{-st} dt$$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt$$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{-(s-a)} e^{-(s-a)t} d[-(s-a)t]$$

$$F1(s) = -\frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty$$

$$F1(s) = \frac{1}{(s-a)}, \delta > a$$

และเช่นเดียวกัน จากสมการที่ (1.10) และรูปที่ 1.36 จะได้

$$F2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f2(t) e^{st} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at} e^{st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$F2(s) = \frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty$$

$$F2(s) = \frac{1}{(s-a)}, \delta < a$$

จากฟูรีเยร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน ($F1(s)$) และ ($F2(s)$) ของฟังก์ชัน $f1(t)$ และ $f2(t)$ ที่หาได้ข้างบนนี้ จะเห็นได้ว่าเหมือนกันคือ $1/(s-a)$ แต่บริเวณของการลู่ออกของฟังก์ชันทั้งสองจะแตกต่างกัน อย่างไรก็ตาม ถ้าบริเวณของการลู่ออกถูกกำหนดไว้พร้อมกับทรานส์ฟอร์ม ดังนั้น ฟังก์ชันจะถูกกำหนดขึ้นได้อย่างแน่นอน เพราะฉะนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า ทรานส์ฟอร์มกลับของ $F(s)$ ใดๆ ไม่สามารถถูกกำหนดได้อย่างแน่นอน จนกว่าบริเวณของการลู่ออก จะถูกกำหนดขึ้น ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปในตอนที่ 1.15

1.4 คอซอลฟังก์ชันและการแปลงความถี่ข้างเดียว

จากหัวข้อที่ผ่านมาเราสมมติให้ฟังก์ชันเวลา $f(t)$ ใด ๆ เกิดขึ้นตลอดช่วงทั้งหมด $(-\infty < t < \infty)$ แต่อย่างไรก็ตาม ในทางปฏิบัติส่วนมากแล้วจะเกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน ซึ่งเริ่มต้นที่เวลาที่จำกัดคือที่ $t = 0$ ซึ่งฟังก์ชันจะมีค่าเป็น 0 ที่ $t < 0$ ดังนั้นฟังก์ชันเช่นนี้ เราจะเรียกว่า คอซอลฟังก์ชัน (causal function) ซึ่งจะกำหนดได้ว่า

$$f(t = 0, t < 0)$$

สำหรับระบบทางฟิสิกส์นั้น ถ้าฟังก์ชันขับ (driving function) มีค่าเท่ากับศูนย์ที่ค่าของ t เป็นลบ เรชปอนซ์ (response) หรือผลตอบสนองของระบบต้องเป็นศูนย์ ตลอดทุกค่าของ t มีค่าเป็นลบ ด้วย ทั้งนี้เนื่องจากว่าระบบไม่สามารถตอบสนองต่อฟังก์ชันนั้นได้ ดังนั้นสำหรับระบบทางฟิสิกส์ต่าง ๆ ฟังก์ชันกระตุ้น (exciting function) หรือฟังก์ชันขับจะต้องเป็นคอซอลฟังก์ชัน

การวิเคราะห์ปัญหาส่วนใหญ่ ในทางปฏิบัติจะเกี่ยวข้องกับคอซอลฟังก์ชันซึ่งโดยทั่ว ๆ ไปแล้วระบบจะถูกกระตุ้นที่เวลาจำกัด คือที่ $t = 0$ เพราะฉะนั้นเราจึงสนใจเฉพาะช่วงเวลาที่ $0 < t < \infty$ แทนช่วงเวลาทั้งหมด $-\infty < t < \infty$ และคอซอลฟังก์ชันจะทำให้การแปลงความถี่ (frequency transformation) ง่ายกว่าเดิมมาก ซึ่งสำหรับคอซอลฟังก์ชัน เมื่อการแปลงความถี่ถูกกำหนดขึ้น มันจะถูกเรียกว่าทรานส์ฟอร์มข้างเดียวหรือการแปลงข้างเดียว (unilateral transforms) หรือเรียกว่า single - sided transform หรือทรานส์ฟอร์มทางขวา (right - handed transform) ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มเชิงซ้อน (complex fourier transform) หรือลาปลาซทรานส์ฟอร์มทั้งสองข้าง (bilateral Laplac transform) ของ $f(t)$ ใด ๆ ที่เป็นคอซอลฟังก์ชัน เราจะเรียกว่า ลาปลาซทรานส์ฟอร์มทางขวาซึ่งในการพิจารณาฟังก์ชันนี้ เราจะเรียกสั้น ๆ ว่า การแปลงลาปลาซ หรือลาปลาซทรานส์ฟอร์ม (Laplace transform)

สำหรับ $f(t)$ ที่เป็นคอซอลฟังก์ชันนั้น ทรานส์ฟอร์มของมันจะหาได้จากสมการที่ (1.9) และ (1.10) และสามารถเขียนได้ว่า

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{1.16}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s) e^{st} ds \tag{1.17}$$

สมการที่ (1.16) และ(1.17) คือ คู่ของลาปลาซทรานส์ฟอร์ม ซึ่งสมการที่ เป็น ลาปลาซทรานส์ฟอร์มตรง (1.16) (direct Laplace transform) ของ $f(t)$ และสมการที่ (1.17) คือ ลาปลาซทรานส์ฟอร์มกลับ (inverse Laplace transform) ของ $F(s)$ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$F(s) = \mathcal{L} [f(t)] \quad (1.16a)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \quad (1.17)$$

ค่าลิมิตล่างของการอินทิเกรตในสมการที่ (1.16) มีค่าเท่ากับศูนย์ แต่ถ้า $f(t)$ ในสมการดังกล่าวนี้ประกอบด้วยอิมพัลส์ฟังก์ชัน (impulse function) หรืออนุพันธ์ของมันที่จุดกำเนิด $f(t)$ ก็จะไม่สามารถกำหนดที่ $t = 0$ ได้ ดังนั้นเพื่อที่จะแน่ใจว่าอิมพัลส์หรืออนุพันธ์อันดับสูง ๆ ของมันรวมอยู่ด้วย เราจะเลือกค่าลิมิตล่างเป็น 0^- ถ้าค่าลิมิตล่างถูกกำหนดเป็น 0^+ อิมพัลส์และอนุพันธ์ของมันอยู่ที่จุดกำเนิดจะถูกตัดทิ้งไป โดยทั่วไป แล้วค่าลิมิตล่างจะถูกกำหนดเป็น 0^- และเช่นเดียวกันนี้ค่าลิมิตของสมการที่ (1.16) จึงถูกกำหนดให้เป็น 0^- ด้วยสังเกตว่า

$$F(s) = \mathcal{L} \{ \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L} [f(t)] \}$$

1.5 การเกิดขึ้นของลาปลาซทรานส์ฟอร์ม

ลาปลาซทรานส์ฟอร์มที่เกิดขึ้นจะเป็นไปตามเงื่อนไขอินทิกรัลในสมการที่ (1.16) กล่าวคือ

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \text{จะต้องกำหนดค่าได้}$$

โดยทั้งนี้อินทิกรัลข้างบนจะกำหนดได้ว่า

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{\sigma t} dt < \infty \quad (1.18)$$

ถ้า M เป็นเลขจำนวนจริงบวกที่กำหนดค่าได้ และมี α เกิดขึ้น ดังนั้นสำหรับฟังก์ชัน $f(t)$ จะกำหนดได้ว่า

$$f(t) < Me^{\alpha t} \quad (1.19)$$

ที่ทุกค่าบวก t ซึ่ง $f(t)$ กล่าวได้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลอันดับ (exponential - orderfunction) หรือ E- function สมการที่ (1.18) จะสอดคล้องกับฟังก์ชันเอกโปเนนเชียลอันดับเสมอ ซึ่งสามารถพิสูจน์ให้เห็นได้ง่าย ๆ โดยการแทนสมการที่ (1.19) ลงในสมการที่ (1.18) คือ

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\delta t} dt &< \int_0^{\infty} Me^{\alpha t} e^{-\delta t} dt = \int_0^{\infty} \frac{M}{\alpha - \delta} e^{(\alpha - \delta)t} dt \quad (\alpha - \delta)t \\ &= \frac{M}{\alpha - \delta} e^{(\alpha - \delta)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{M}{\alpha - \delta} \quad \text{ถ้า } \delta > \alpha \end{aligned}$$