อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

(Derivative of Functions)

ความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จากความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระกับตัวแปรตามในฟังก์ชัน คือ ถ้าตัวแปรอิสระมีค่าเปลี่ยนแปลงไปจะมีผลทำให้ตัวแปรตามมี อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of change) ตามไปด้วยเช่น

กำหนดให้ $y = f(x)$ โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระและ y เป็นตัวแปรตาม ถ้า x เปลี่ยนแปลงค่า(อาจจะเพิ่มค่าหรือลดค่าก็ได้) จะมีผลทำให้ y เกิดการเปลี่ยนแปลงตาม ถ้าให้ x เปลี่ยนแปลงค่าจาก x ไปเป็น x_1 และให้ y เปลี่ยนแปลงค่าจาก y ไปเป็น y_1

กำหนดให้ $\Delta x = x_1 - x$ เมื่อ Δx อ่านว่าเดลตาเอ็กซ์(Delta x) ซึ่งค่าของ Δx อาจจะมีค่าเป็น <u>บวก</u>หรือ <u>ลบ</u> ก็ได้ และ $\Delta y = y_1 - y$ อ่านว่าเดลตาวาย(Delta y) อาจจะมีค่าเป็น <u>บวก</u>หรือ <u>ลบ</u> ก็ได้เช่น

$$y = f(x) = x^2$$

ให้ $x = 1 \quad : y = f(1) = 1$

เปลี่ยนค่า x ให้เป็น x_1

ให้ $x_1 = 2 \ : y_2 = f(2) = 4$

ดังนั้น

$$\Delta x = x_1 - x = 2 - 1 = 1$$

และ $\Delta y = y_1 - y = 4 - 1 = 3$

ในกรณีของ $y = f(x) = x^2$ นี้จะเห็นว่า ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นค่า y ก็จะมีค่าเพิ่มตาม แต่ในกรณีที่ให้ $y = f(x) = \frac{1}{x}$ แล้วถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้นค่า y ก็จะมีค่าลดลงและถ้า ถ้า x มีค่าลดลงขึ้นค่า y ก็จะมีเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = 2x^2 - 2$

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ $x = 1$ และ $\Delta x = 0.2$

วิธีทำ จาก $y = 2x^2 - 2$ (1)

เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไปเป็น $x + \Delta x$

และ y เปลี่ยนแปลงไปเป็น $y + \Delta y$

ดังนั้น $y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 2$

$$= 2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] - 2$$

$$= 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2 \qquad (2)$$

(2)-(1) $\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 \qquad (3)$

$(3) \div \Delta x$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x \qquad (4)$$

แทนค่า $x = 1$ และ $\Delta x = 0.2$ ลงใน (4) จะได้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4(1) + (1)(0.2) = 4.2$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ไปสอดคล้องกับสมการ $s = 40t - 3t^2 \quad ms^{-1}$ จงหาความเร็วเฉลี่ยระหว่าง 0.1 วินาที ถึง 1 วินาที

วิธีทำ จาก $s = 40t - 3t^2 \qquad (1)$

เมื่อ เวลา t เปลี่ยนแปลงไปเป็น $t + \Delta t$ วินาที และ s เปลี่ยนแปลงไปเป็น $s + \Delta s$

ดังนั้น $s + \Delta s = 40(t + \Delta t) - 3(t + \Delta t)^2$

$$= 40t + 40\Delta t - 3[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2]$$

$$= 40t + 40\Delta t - 3t^2 - 6t\Delta t - 3(\Delta t)^2 \qquad (2)$$

(2) - (1) $\Delta s = 40\Delta t - 6t\Delta t - 3(\Delta t)^2 \qquad (3)$

$(3) \div \Delta t$: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{40\Delta t - 6t\Delta t - 3(\Delta t)^2}{\Delta t}$

$$= 40 - 6t - 3\Delta t$$

แทนค่า $t = 1$ และ $\Delta t = 1 - 0.1 = 0.9$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 40 - 6(1) - 3(0.9) = 31.3 \quad ms^1$$ **ตอบ**

นิยามของอนุพันธ์

จาก $y = f(x)$

เมื่อ x เปลี่ยนแปลงไปเป็น $x + \Delta x$

ค่าของ $f(x)$ ก็จะเปลี่ยนแปลงไปเป็น $f(x + \Delta x)$

ส่วนที่เปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันคือ $f(x + \Delta x) - f(x)$

และส่วนที่เปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระ x คือ Δx

จาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ จะเห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับ Δx ถ้า Δx เข้าใกล้ ศูนย์ อัตราการเปลี่ยนแปลงก็จะมีค่าเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง(ถ้ามี) เรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ว่า " อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ" (Instantaneous Rate of Change)

เขียนแทนด้วย $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะ ในทางคณิตศาสตร์เรียกว่า " อนุพันธ์" (Derivative)

กำหนดให้ $y=f(x)$ (1)

ดังนั้น $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ (2)

$(2)-(1):$ $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ (3)

$(3)\div\Delta x$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ (4)

แทนค่า $\lim_{\Delta x\to 0}$ ใน (4) : $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เขียนแทนด้วย $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ เรียกว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน y เทียบกับ x

ในทำนองเดียวกัน

$\frac{di}{dt}$ เรียกว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน i เทียบกับ t

นิยาม กำหนดให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ

$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ เมื่อ ลิมิตหาค่าได้

*** ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้จะเรียกว่า y มีอนุพันธ์ที่ x

*** ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าไม่ได้จะเรียกว่า y ไม่มีอนุพันธ์ที่ x

ตัวอย่าง ให้ $y=x^2$ จงหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

วิธีทำ จาก $y=x^2$

เนื่องจาก $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$
$$= 2x$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 2x$ **ตอบ**

ตัวอย่าง ให้ $y = 2x^2 - 3x + 1$ จงหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

วิธีทำ จาก $y = 2x^2 - 3x + 1$

เนื่องจาก
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x^2 + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1] - [2x^2 - 3x + 1]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2\{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)\}^2 - 3x - 3\Delta x + 1] - 2x^2 + 3x - 1]}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2\{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)\}^2 - 3x - 3\Delta x + 1] - 2x^2 + 3x - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - 2x^2 + 3x - 1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 3)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ **ตอบ**

ความหมายของอนุพันธ์ทางเรขาคณิต

นิยาม กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x หมายถึงความชัน (Slope) ของกราฟที่สอดคล้องกับ ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุดใดๆ และเป็นความชันของเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสนั้น

กำหนดให้ $y = f(x)$

กำหนดให้จุด $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆบนกราฟของ $y = f(x)$ จุด $P_1(x,y)$ เป็นจุดใดๆบนกราฟของ $y = f(x)$ เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $x+\Delta x$ และ y มีค่าเปลี่ยนแปลงไปเป็น $y+\Delta y$ ดังนั้นจุด $P_1(x,y)$ จะอยู่ที่ตำแหน่ง $x+\Delta x, y+\Delta y$

ดังนั้นที่ตำแหน่ง P จะได้ $y = f(x)$ (1)

และ ที่ตำแหน่ง P_1 จะได้ $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ (2)

(1) - (2) จะได้ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ (3)

$(3) \div \Delta x$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

และ $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}$ จะเป็นความชันของกราฟที่จุดใดๆ และจะเป็นความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่สัมผัสกับกราฟที่จุดนั้นด้วย

ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^3 - 3x + 1$ ที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ จากนิยาม

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^3 - 3(x+\Delta x) + 1] - (x^3 - 3x + 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^3 + 3x - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3\Delta x + (\Delta x)^2 - 3] \\
&= 3x^2 - 3
\end{aligned}$$

ดังนั้นความชันที่จุด(x,y) ใดๆของฟังก์ชัน $y = x^3 - 3x + 1$ คือ $3x^2 - 3$

ความชันที่จุด$(1,1)$ $= 3(1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0$ **ตอบ**

การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎสี่ขั้น(Four Step Rule or General Rule)

จากการหาอนุพันธ์ที่ได้กล่าวมาแล้วจะเห็นว่ามีขั้นตอนในการหาอยู่ 4 ขั้นคือ

ขั้นที่ 1 จากฟังก์ชันที่กำหนดให้แทน x ด้วย $x+\Delta x$ และแทน y ด้วย $y+\Delta y$

ขั้นที่ 2 หา Δy โดยการเอาฟังก์ชันเดิมลบออกจากฟังก์ชันใหม่ โดยเอาเทอมด้านซ้ายมือลบกันและเทอมด้านขวามือลบกัน

ขั้นที่ 3 เอา Δx หารตลอดสมการจะได้ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

ขั้นที่ 4 หาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x หรือ $\frac{dy}{dx}$ โดยการหาจากการหาค่าลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ $\Delta x \to 0$

การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร

การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎสี่ขั้น สามารถนำมาหา(พิสูจน์) สูตรได้ การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตรจะทำให้หาได้เร็วขึ้น

สูตรเบื้องต้นของการหาอนุพันธ์

1. $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{dcu}{dx} = c\frac{du}{dx}$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x และ c เป็นค่าคงที่
4. $\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ เมื่อ u เป็นฟังก์ชันของ x และ n เป็นเลขจำนวนเต็มและ $n \neq 0$
5. $\frac{d(u+v+w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ เมื่อ u, v, w เป็นฟังก์ชันของ x
6. $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x
7. $\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 6$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

จาก $y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 6$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 - 3x + 6)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d2x^3}{dx} - \frac{d3x^2}{dx} - \frac{d3x}{dx} + \frac{d6}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2dx^3}{dx} - \frac{3dx^2}{dx} - \frac{3dx}{dx} + \frac{d6}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(3)x^{3-1} - 3(2)x^{2-1} - 3(1)x^{1-1} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 3$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = \sqrt{x^3 + 2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

จาก $y = \sqrt{x^3 + 2}$

หรือ $y = (x^3 + 2)^{1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2)^{1/2}$$

ให้ $u = (x^3 + 2)$ และ $n = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{1/2-1}\frac{d(x^3 + 2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-1/2}\frac{d(x^3 + 2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}}\frac{d(x^3 + 2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}}\frac{dx^3}{dx} + \frac{d2}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}}3x^{3-1} + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2}}3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}}$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = (x^2 - 3)(x + 2)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

จาก $y = (x^2 - 3)(x + 2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(x^2 - 3)(x + 2)]$$

จากสูตร $\frac{duv}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ให้ $u = x^2 - 3$ และให้ $v = x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 3)\frac{d(x + 2)}{dx} + (x + 2)\frac{d(x^2 - 3)}{dx}$$

$$= (x^2 - 3)\frac{dx}{dx} + \frac{d2}{dx} + (x + 2)\frac{dx^2}{dx} - \frac{d3}{dx}$$

$$= (x^2 - 3)(1) + 0 + (x + 2)(2)x^{2-1} + 0$$

$$= (x^2-3)(x+2)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^4+4x^3-6x^2-12x$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง กำหนดให้ $y = \frac{3-2x}{x^2+2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

จาก $y = \frac{3-2x}{x^2+2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{3-2x}{x^2+2}$$

จากสูตร $\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ ให้ $u = 3-2x$ และให้ $v = x^2+2$

แทนค่าจากสูตรจะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+2)\frac{d(3-2x)}{dx} - (3-2x)\frac{d(x^2+2)}{dx}}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)\left(\frac{d3}{dx} - \frac{d2x}{dx}\right) - (3-2x)\left(\frac{dx^2}{dx} + \frac{d2}{dx}\right)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)(0-2) - (3-2x)(2x+0)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2)(-2) - (3-2x)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2-2x^2-6x-4}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-6x-4}{(x^2+2)^2}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2-3x-2)}{(x^2+2)^2}$ **ตอบ**

การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ถ้า y เป็นฟังก์ชันของ u และ u เป็นฟังก์ชันของ x แล้วเรียกได้ว่า y เป็นฟังก์ชันของ x เขียนแทนด้วย $y = [u(x)]$

ถ้า $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เรียกได้ว่า $y = f[u(x)]$

ตัวอย่าง ถ้า $y = u^2+2$ และ $u = x+2$ แล้ว

y จะเป็นฟังก์ชันของ x โดยการแทนค่า u

หรือ $y=(x+2)^2+2=x^2+4x+2+2=x^2+4x+4$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=2x+4$

กฎลูกโซ่(Chain Rule)

ถ้า $y=f(u)$ และ $u=g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าได้แล้ว

จะได้ $y=f[u(x)]$

และ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

พิสูจน์

ถ้า $y=f(u)$	$u=g(x)$
$y+\Delta y=f(u+\Delta u)$	$u+\Delta u=g(x+\Delta x)$
$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$	$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$
$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}$	$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

หาผลคูณทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

พิจารณาเฉพาะด้านซ้ายมือของสมการจะได้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

หา ค่า lim เมื่อ $\Delta x\to 0$ ทั้ง 2 ข้าง และเมื่อ $\Delta x\to 0$ แล้วจะทำให้ $\Delta u\to 0$ ด้วย

ดังนั้น

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

หรือ $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

นั่นคือ ถ้า $y=f(u)$ และ $u=g(x)$ แล้วจะได้ว่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะมีค่าเท่ากับผลคูณของอนุพันธ์ y เทียบกับ u คูณกับ อนุพันธ์ u เทียบกับ x

ตัวอย่าง ถ้า $y=u^2+3$ และ $u=x+1$

จาก $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^2+3}{du}\cdot\frac{d(x+1)}{dx}=(2u+0)(1+0)=2u$$

แต่ $u=x+1$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=2(x+1)$ **ตอบ**

ตัวอย่าง ถ้า $y=u^2+3u-2$ และ $u=2x-3$

จาก $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

แทนค่าจะได้ $\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^2+3u-2)}{du}\cdot\frac{d(2x-3)}{dx}$

$=(2u+3)(2)=4u+6$ แต่ $u=2x-3$

แทนค่า จะได้ $\frac{dy}{dx}=4(2x-3)+6$

$\frac{dy}{dx}=8x-12+6=8x-6$ **ตอบ**

ตัวอย่าง ถ้า $y=s^2+3s$ และ $s=t+2$ จงหา $\frac{dy}{dt}$

จากกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{d(s^2+3s)}{ds}\cdot\frac{d(t+2)}{dt}$$

$$=(2s+3)(1)$$

แทนค่า $s=t+2$ จะได้

$$\frac{dy}{dt}=[2(t+2)]+3$$

$$=2t+4+3$$

$$=2t+7$$ **ตอบ**

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอิมพลิซิต(Implicit Functions)

ถ้าสมการ x ประกอบด้วยตัวแปร x และ y แล้ว y จะเป็นฟังก์ชันอิมพลิซิตของ x

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอิมพลิซิต

1. หาอนุพันธ์ของทั้ง 2 ข้างเทียบกับ x แล้วใช้วิธีพีชคณิตแก้สมการหาค่า $\frac{dy}{dx}$
2. หาอนุพันธ์ของทั้ง 2 ข้างเทียบกับ y แล้วใช้วิธีพีชคณิตแก้สมการหาค่า $\frac{dx}{dy}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x^2 + y^2 = 2x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{dx}{dy}$

จาก $x^2 + y^2 = 2x$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างเทียบกับ x จะได้

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(2x)}{dx}$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2x}{2y} = \frac{1 - x}{y}$$ **ตอบ**

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างเทียบกับ y จะได้