บทที่ 1
ลิมิต และความต่อเนื่อง

บทนำ การศึกษาคณิตศาสตร์หลายแขนง โดยเฉพาะวิชาแคลคูลัส ต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง ก่อนที่จะศึกษาเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องขอทบทวนความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องดังนี้

ค่าคงที่ (Constants) คือจำนวนที่มีค่าได้ค่าเดียว มี 2 ชนิดคือ

ก.ค่าคงที่ถาวร (Numerical) คือค่าคงที่ที่เป็นตัวเลขต่าง ๆ เช่น 2, -5 , $\frac{4}{7}$ $\sqrt{3}$ 0.9…ฯลฯ รวมทั้ง π และ ε ด้วย

ข.ค่าคงที่ชั่วคราว (Arbitrary Constants) คือค่าตัวที่เป็นตัวอักษรนิยมใช้ a ถึง k เช่น $ax^2 + bx + c = 0$ ตัว a, b, c เป็นค่าคงที่ชั่วคราวของสมการกำลังสอง

ตัวแปร (Variable) คือจำนวนที่มีค่าไม่จำกัด แปรเปลี่ยนไปได้หลายค่าตามเงื่อนไขที่กำหนด ถ้า x เป็นตัวแปร หมายความว่า x มีค่าได้หลายค่า เช่น x = 1, 2, 3, … ฯลฯ เป็นต้น นิยมใช้ตัวอักษร r ถึง z เป็นตัวแปร

เมื่อกล่าวถึงจำนวน x และ y ที่มีความสัมพันธ์กันในรูป $y = x^3$ ทั้ง x และ y เป็นตัวแปรทั้งคู่

ถ้ากำหนดให้ x = 1 จะได้ค่า y =1

ถ้าให้ x มีค่าแปรเปลี่ยนไปเป็น 2 ค่า y จะแปรเปลี่ยนไปเป็น 8

ถ้าให้ x มีค่าแปรเปลี่ยนไปเป็น 3 ค่า y จะแปรเปลี่ยนไปเป็น 27

จะเห็นได้ว่า ค่าตัวแปร x แปรเปลี่ยนไปได้เรื่อย ๆ และจะเป็นค่าที่เรากำหนดลงไปก่อน มีผลให้ค่าตัวแปร y เปลี่ยนตามไปด้วย

เรียก x ว่าตัวแปรอิสระ (Independent Variables)

เรียก y ว่าตัวแปรตาม (Dependent Variables)

ช่วง (Intervals)

ตัวแปรมีค่าไม่จำกัด แต่สามารถกำหนดลงไปได้ว่า ตัวแปรมีค่าอยู่ในช่วงใด เช่น x มีค่าจาก 2 ถึง 7

ระยะตั้งแต่ 2 ถึง 7 เรียกว่า ช่วงของตัวแปร เขียนแทนได้ด้วย $2 \le x \le 7$

$a \langle x \langle b$ หมายความว่า ค่าของ x คือจำนวนจริงใด ๆ ที่มีค่ามากกว่า a แต่น้อยกว่าเท่ากับb

$a \le x \le b$ หมายความว่า ค่าของ x คือจำนวนจริงใด ๆ ที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ a แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ b

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ a<b ช่วงของจำนวนจริงมีความหมายดังนี้

ช่วงเปิด (Open Interval) : ช่วงเปิดจาก a ไป b เขียนแทนด้วย (a,b) คือ จำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง a<x<b

ช่วงเปิด (Closed interval) : ช่วงปิดจาก a ไป b เขียนแทนด้วย [a,b] คือ จำนวนจริง x ทั้งหมด x ทั้งหมด ซึ่ง $a \le x \le b$

ช่วงครึ่งเปิดทางขวา (Interval half-open on the right) : ช่วงครึ่งเปิดทางขวาจาก a ไป b เขียนแทนด้วย [a,b) คือ จำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $a \le x < b$

ช่วงครึ่งเปิดทางซ้าย (Interval half-open on the left) : ช่วงครึ่งเปิดทางซ้ายจาก a ไป b เขียนแทนด้วย [a,b) คือ จำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $a < x \le b$

ช่วงอนันต์ (Infinite intervals)

เขียนแทนด้วย

[a,∞) คือจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $a \le x < \infty$

(a,∞) คือจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $a < x < \infty$

(-∞,b] คือจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $-\infty < x \le b$

(-∞,b) คือจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $-\infty < x < b$

(-∞,∞) คือจำนวนจริง x ทั้งหมด

การแปรต่อเนื่องของตัวแปร (Continuous Variable) หมายถึง เมื่อกำหนดเงื่อนไขมาให้ จะสามารถค่าตัวแปรได้ทุกค่า เรียกว่าการแปรต่อเนื่อง

เช่น จากเงื่อนไข $y = x^3$ เมื่อกำหนด $1 \le x \le 4$

เมื่อแทนค่า x ทุกค่าในช่วง $1 \le x \le 4$ จะสามารถหาค่า y ได้ทุกค่ากล่าวได้ว่าแปร x แปรต่อเนื่อง

การแปรไม่ต่อเนื่องของตัวแปร (Discontinuous Variable) หมายถึง เมื่อกำหนดเงื่อนไขมาให้ ไม่สามารถหาค่าตัวแปรได้ทุกค่า เรียกว่าการแปรไม่ต่อเนื่อง

เช่น จากเงื่อนไข $y = \dfrac{1}{x}$ เมื่อกำหนด $-3 \le x \le 2$

เมื่อแทนค่า x =0 จะไม่สามารถหาค่า y ได้ กล่าวได้ว่าตัวแปร x แปรไม่ต่อเนื่องที่ x = 0

ฟังก์ชัน (Functions)

ถ้าตัวแปร x และตัวแปร y มีความสัมพันธ์กันในลักษณะใดลักษณะหนึ่งโดยเมื่อกำหนดค่า x ให้จะหาค่า y ได้ และสำหรับค่า x ค่าหนึ่ง ๆ จะสามารถหาค่า y สำหรับค่า x นั้นได้ไม่เกินหนึ่งค่า เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า ฟังก์ชัน

เช่น $y = x^2$, $y = 3x^3 - 2x + 4$

เราสามารถหาค่า y ได้หนึ่งค่า เมื่อกำหนดค่า x ให้หนึ่งค่า กรณีเช่นนี้เราเรียกว่า y เป็นฟังก์ชันของ x เขียนแทนด้วย y = f (x)

สัญลักษณ์ของฟังก์ชัน สำหรับฟังก์ชันจะแทนด้วยสัญลักษณ์ f (x), F(y), g(t) โดยตัวอักษรที่อยู่ในวงเล็บ หมายถึงตัวแปรอิสระ และตัวอักษร f, F, g ใช้แทนฟังก์ชันของตัวแปร

f(x) อ่านว่า เอฟเอกซ์ หรือ เอฟออฟเอกซ์ หรือฟังก์ของเอกซ์

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ มีความหมายดังนี้

$$|x| \quad = \begin{cases} x & x\rangle 0 \\ o & \text{ถ้า } x = 0 \\ -x & x\langle 0 \end{cases}$$

1.1 ความหมายของลิมิต

ลิมิตมีความหมายว่า “ขีดจำกัด”

เมื่อ a	เป็นค่าคงที่ และเป็นจำนวนจริง		
จะได้	ลิมิตของ	a	มีค่าเท่ากับ a
	ลิมิตของ	5	มีค่าเท่ากับ 5
และ	ลิมิตของ	3	มีค่าเท่ากับ 3

ดังนั้นลิมิตของค่าคงที่ซึ่งเป็นจำนวนจริง มีค่าเท่ากับค่าคงที่ตัวนั้น

การที่ x มีค่าเข้าใกล้ a นี้ กล่าวว่า ลิมิตของ x มีค่าเท่ากับ a เขียนแทนด้วย $x \to a$ หรือ $\lim x = a$

อ่านว่า เอกซ์ มีค่าเข้าใกล้ เอ หรือ ลิมิตของเอกซ์ มีค่าเท่ากับ เอ

ถ้า $x \to 2$, $\lim x = 2$ และถ้า $x \to 6$, $\lim x = 6$

ถ้า x มีค่ามากกว่า a และค่าของ x ลดลง ๆ จนมีค่าใกล้เคียง a แต่ไม่เท่ากับ a กล่าวได้ว่า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวาเขียนแทนด้วย $x \to a^+$ อ่านว่า เอกซ์ ถ้ามีค่าเข้าใกล้ เอ ทางบวก

นิยาม a จะเป็นลิมิตของตัวแปร x ได้ ก็ต่อเมื่อ x และ a ต่างกันน้อยมาก คือผลต่างมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เขียนแทนด้วย

$$\lim x = a \text{ หรือ } x \to a$$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่และเป็นจำนวนจริง และ x เป็นตัวแปร

ถ้า x มีค่าน้อยกว่า a และค่าของ x มากขึ้น ๆ จนมีค่าใกล้เคียง a แต่ไม่เท่ากับ a กล่าวได้ว่า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายเขียนแทนด้วย $x \to a^-$ อ่านว่า เอกซ์ มีค่าเข้าใกล้ เอ ทางลบ

ดังนั้นถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวามือและ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายมือแต่มีค่าไม่เท่ากับ a กล่าวได้ว่า x มีค่าเข้าใกล้ a เขียนแทนด้วย $x \to a$ เช่นถ้า $x \to 3$ หมายความว่า $x \to 3^+$ และ $x \to 3^-$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x - 1$

ถ้า $x \to 3^+$ และ $x \to 3^-$

เมื่อกำหนดค่า x เข้าด้านขวามือจะได้

x	5	4	$x \to 3^+$
$f(x)$	4	3	$f(x) \to 2$

และเมื่อกำหนดค่า x เข้าด้านซ้ายมือจะได้

x	1	2	$x \to 3^-$
$f(x)$	0	1	$f(x) \to 2$

จะเห็นว่า $x \to 3^+$ จะได้ $f(x) \to 2$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$

และ $x \to 3^-$ จะได้ $f(x) \to 2$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

กล่าวได้ว่าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 3 มีค่าเท่ากับ 2 ทั้งด้านซ้ายมือและด้านขวามือซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ อ่านว่า “ลิมิตของเอฟเอ็กซ์ เมื่อ เอ็กซ์เข้าใกล้ 3 มีค่าเท่ากับ 2”

จะเห็นว่าค่าของ $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่ทุกๆค่าของ x

นิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่ง x ถูกกำหนดไว้ในช่างเปิดใดๆ ที่มีจุด a อยู่ภายใน ถ้าให้ L เป็นจำนวนจริง เรียก L ว่าเป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ $x \to a$

ถ้าทุกๆค่าของ x เข้าใกล้ a มากพอจะทำให้ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ L ถ้า L เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ $x \to a$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ เมื่อ $x \to a$

การหาลิมิตของฟังก์ชัน คือการหาว่า ฟังก์ชันนั้นมีค่าเข้าใกล้จำนวนใด เมื่อตัวแปรอิสระมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงใดๆที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = m$ จะได้ว่า $l = m$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า c เป็นค่าคงที่แล้ว $\lim\limits_{x \to a} c = c$

เช่น $\lim\limits_{x \to 1} 8 = 8$ หรือ $\lim\limits_{x \to 0} 5 = 5$

ทฤษฎีบท 3 $\lim\limits_{x \to a} x = a$

เช่น $\lim\limits_{x \to 5} x = 5$ หรือ $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

ทฤษฎีบท 4 $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

เช่น $\lim\limits_{x\to 2}x=(x+7)=\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}7$

$\lim\limits_{x\to 2}x=2$ ใช้ทฤษฎีบท 3

$\lim\limits_{x\to 2}7=7$ ใช้ทฤษฎีบท 2

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2}x=(x+7)=\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}7=2+7$

ทฤษฎีบท 5

(1) $\lim\limits_{x\to a}\left[kf(x)\right]=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x).\lim\limits_{x\to a}g(x)$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 3}6x=6\lim\limits_{x\to 3}x$

ใช้ทฤษฎีบท 5 (1) จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}6x=6\lim\limits_{x\to 3}x$

ใช้ทฤษฎีบท 3 จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}6x=6\lim\limits_{x\to 3}x=3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3}6x=6\times 3=18$

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 3}x(x-7)$

ใช้ทฤษฎีบท 5 (2) จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}x(x-7)=\lim\limits_{x\to 3}x.\lim\limits_{x\to 3}(x-7)$

ใช้ทฤษฎีบท 2 และ 3 จะได้ $\lim\limits_{x\to 3}x(x-7)=\lim\limits_{x\to 3}x.(\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}7)$

$\lim\limits_{x\to 3}x(x-3)=3(3-7)$

$=3(-4)=-12$

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{2x}$

ใช้ทฤษฎีบท 5 (3) จะได้ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{2x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}2x}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}2x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}{2\lim\limits_{x\to 2}x}=\dfrac{2+2}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$

จากตัวอย่างนี้สามารถหาค่าของลิมิต โดยการแทนค่า x โดยตรงก็ได้เช่น

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{2x}$

เมื่อแทนค่า x ด้วย 2 แล้วแทนค่าในฟังก์ชันจะได้ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{2x}=\dfrac{2+2}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$

ทฤษฎีบท 6 ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = l$ และ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = l^n$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 3}(x^2-4)^2$

$$= \left[\lim_{x\to 3}(x^2-4)\right]^2 = [3^2-4]^2 = (9-4)^2$$

$$= 5^2 = 25$$

ทฤษฎีบท 7 ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = l$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มคู่หรือเลขจำนวนเต็มคี่ และ $l \geq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 2}\sqrt[2]{3x^2-2x+3}$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[2]{3x^2-2x+3} = \sqrt[2]{3(2^2)-2(2)+3}$$

$$= \sqrt[2]{12-4+3} = \sqrt[2]{11}$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{3x^2-2x+3}$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{3x^2-2x+3} = \sqrt[3]{3(2^2)-2(2)+3}$$

$$= \sqrt[3]{12-4+3} = \sqrt[3]{11}$$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 3}(2x^3-4x+3)$

วิธีที่ 1 ใช้ทฤษฎีบท

$$\lim_{x\to 3}(2x^3-4x+3) = \lim_{x\to 3}2x^3 - \lim_{x\to 3}4x + \lim_{x\to 3}3$$

$$= 2\lim_{x\to 3}x^3 - 4\lim_{x\to 3}x + \lim_{x\to 3}3$$

$$= 2(3^3) - 4(3) + 3$$

$$= 2(27) - 12 + 3 = 54 - 12 + 3 = 45$$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า x โดยตรง

$$\lim_{x\to 3}(2x^3-4x+3) = 2(3^3) - 4(3) + 3 = 45$$

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-4x^2+1}{x-2}$

วิธีที่ 1 ใช้ทฤษฎีบท

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-4x^2+1}{x-2} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^4-4x^2+1)}{\lim_{x\to 3}(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-4x^2+1}{x-2}=\frac{\lim_{x\to 3}x^4-4\lim_{x\to 3}x^2+\lim_{x\to 3}1)}{\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-4x^2+1}{x-2}=\frac{3^4-4(3^2)+1}{3-2}=\frac{81-36+1}{1}=46$$

วิธีที่ 2 ใช้การแทนค่า x โดยตรงด้วย 3

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-4x^2+1}{x-2}=\frac{3^4-4(3^2)+1}{3-2}=\frac{81-36+1}{1}=46$$

ข้อสังเกต การหา $\lim_{x\to a}f(x)$ ถ้า $\lim_{x\to a}f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial) แล้วจะสามารถหาลิมิตได้เสมอ และจะสามารถหาได้อย่างรวดเร็วได้โดยการแทน x ด้วย a

แต่ในบางกรณี $\lim_{x\to a}f(x)$ จะไม่เท่ากับ $f(a)$ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง

เช่น $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ ที่ x ค่าอื่นๆบางค่าจะต่อเนื่อง แต่ถ้า $x=5$ แล้ว ฟังก์ชันจะไม่ต่อเนื่อง

$$f(2)=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{2^2-25}{2-5}=\frac{4-25}{-3}=\frac{-21}{-3}=7$$

$$f(3)=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{3^2-25}{3-5}=\frac{9-25}{-2}=\frac{-16}{-2}=8$$

$$f(4)=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{4^2-25}{4-5}=\frac{16-25}{-1}=\frac{-9}{-1}=9$$

$f(5)=\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{5^2-25}{5-5}=\frac{25-25}{0}=\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย

ดังนั้นจะต้องทำการปรับ ฟังก์ชันใหม่ด้วยวิธีใดวิธีหนึ่งดังนี้

- แยกตัวประกอบทั้งเศษและส่วนให้สามารถตัดกันได้
- ในกรณีที่แยกตัวประกอบไม่ได้จะต้องคูณทั้งเศษและส่วนด้วยตัวเลขที่เหมาะสมเพื่อให้สามารถหาตัวประกอบได้

เช่นในกรณีของ $f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}$ เมื่อแยกตัวประกอบจะได้ $f(x)=\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=x-5$

ดังนั้น $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x+5)=10$

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$

เมื่อแทนค่าโดยตรงด้วย $x=3$ แล้วจะได้ $\frac{3^2+3-12}{3-3}=\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย

ดังนั้นจึงต้องแยกตัวประกอบของ x^2+x-12 จะได้ $(x+4)(x-3)$

ดังนั้น $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+4)=7$

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

เมื่อแทนค่าโดยตรงด้วย $x=1$ แล้วจะได้ $\frac{0}{0}$ ซึ่งไม่มีความหมาย การแยกตัวประกอบโดยตรงก็ไม่สามารถหาได้ ดังนั้นจะต้องคูณทั้งเศษและส่วนด้วยค่าที่เหมาะสม ในที่นี้คือ $\sqrt{x+3}+2$

นั่นคือ $\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

ฟังก์ชันใหม่ที่ได้คือ $\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

แทนค่า $x=1$ จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง จงหา $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+6}-x}$ โจทย์ของตัวอย่างนี้ก็เป็นกรณีเดียวกันกับตัวอย่างด้านบนคือแยกตัวประกอบโดยตรงไม่ได้ จะต้องหาค่าที่เหมาะสมมาคูณทั้งเศษและส่วน ซึ่งในที่นี้คือ $\sqrt{x+6}+x$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+6}-x}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+6}-x}\times\frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+6}+x)}{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+6}+x}{-x^2+x+6}$$

แยกตัวประกอบของ ส่วนจะได้

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+6}+x}{(3-x)(2+x)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}+x}{2+x}$$

แทนค่า $x=3$ จะได้ $=\frac{\sqrt{3+6}+3}{2+3}=\frac{\sqrt{9}+3}{5}=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}$

ข้อสังเกต จาก 2 ตัวอย่างด้านบนที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้โดยตรง ค่าที่เหมาะสมที่จะนำมาคูณทั้งเศษและส่วน<u>จะเหมือนกันกับ เศษหรือส่วน แต่จะต่างกันที่เครื่องหมายเท่านั้น</u>