การอินทิเกรตทีละส่วน

(Integration by Parts)

การอินทิเกรตทีละส่วน คือการอินทิเกรตฟังก์ชันที่ประกอบด้วย ฟังก์ชันสองรูปคูณกัน เช่น $\int t^2 \sin 2t dt$, $\int \sin 2t \cos 3t dt$ เป็นต้น ฟังก์ชันในลักษณะนี้สามารถอินทิเกรตได้โดยใช้วิธีอินทิเกรตทีละส่วน

การอินทิเกรตทีละส่วน เมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

จาก $d(uv) = udv + vdu$

$udv = d(uv) - vdu$

อินทิเกรตทั้ง 2 ข้างจะได้ $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

จะได้ $\int udv = uv - \int vdu$ ** สูตร**

หลักในการอินทิเกรตโดยใช้สูตร

1. แบ่งฟังก์ชันออกเป็น 2 ส่วนคือส่วนของ u และส่วนของ v
2. ส่วนของ u ควรจะเป็นส่วนที่หาอนุพันธ์ได้ง่าย
3. ส่วนของ v ควรจะเป็นส่วนที่อินทิเกรตได้ง่าย

หลักและขั้นตอนในการอินทิเกรตโดยใช้สูตร

1. เมื่อเลือก ส่วนของ u และส่วนของ dv ได้แล้วให้หา du และอินทิเกรต dv พื่อหา v
2. นำค่าที่ได้จากข้อ 1 ไปแทนค่าในสูตร $\int udv = uv - \int vdu$
3. ถ้าส่วนของ $\int vdu$ ไม่สามารถหาคำตอบได้ ให้ทำการอินทิเกรตทีละส่วนต่อไปเรื่อยๆ จนกว่าจะมีคำตอบหรือมีพจน์ของ $\int vdu$ เท่ากับพจน์ด้านซ้ายมือ
4. ย้ายพจน์ $\int vdu$ ไปด้านขวามือแล้วแทนค่าหาคำตอบ
5. ค่าคงที่ของการอินทิเกรต c ให้เขียนต่อท้ายผลของการอินทิเกรตทุกครั้ง

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int t^2 \sin 3t dt$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

ให้ $u = t^2$ $du = dt^2 = 2tdt$

ให้ $dv = \sin 3t dt$

$$\int dv = \int \sin 3t dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \sin 3t d3t$$

$$v = \frac{-1}{3}\cos 3t + c$$

แทนค่า $u = t^2$, $du = 2tdt$, $v = \frac{-1}{3}\cos 3t + c$ และ $dv = \sin 3tdt$ ในสูตร

จะได้ $\int t^2 \sin 3tdt = (t^2)(\frac{-1}{3}\cos 3t) - \int (\frac{-1}{3}\cos 3t)(2tdt)$

$$= \frac{-t^2}{3}\cos 3t + \frac{2}{3}\int t\cos 3tdt \qquad (1)$$

จะเห็นว่าเทอม $\frac{2}{3}\int t\cos 3tdt$ ยังหาคำตอบไม่ได้ ดังนั้นจะต้องนำเทอมนี้ไปอินทิเกรตอีกต่อไป

โดยให้ $u = t$ $du = dt$

$$dv = \cos 3tdt$$

$$\int dv = \int \cos 3tdt$$

$$v = \frac{1}{3}\int \cos 3td3t$$

$$v = \frac{1}{3}\sin 3t$$

แทนค่า $u = t$, $du = dt$, $v = \frac{1}{3}\sin 3t$ และ $dv = \cos 3tdt$ ในสูตร

จะได้ $\int t\cos 3tdt = \frac{t}{3}\sin 3t - \int (\frac{1}{3}\sin 3t)(dt)$

$$= \frac{t}{3}\sin 3t - \frac{1}{3}\int \sin 3tdt$$

$$= \frac{t}{3}\sin 3t - \frac{1}{3}(-\frac{-1}{3}\cos 3t) + c$$

$$= \frac{t}{3}\sin 3t + \frac{1}{9}\cos 3t + c$$

นำคำตอบของเทอมที่ 2 นี้ไปแทนค่าในสมการ (1)

$$\int t^2 \sin 3tdt = \frac{-t^2}{3}\cos 3t + \frac{2}{3}\left[\frac{t}{3}\sin 3t + \frac{1}{9}\cos 3t\right] + c$$

ดังนั้น $\int t^2 \sin 3tdt = \frac{-t^2}{3}\cos 3t + \frac{2t}{9}\sin 3t + \frac{2}{27}\cos 3 + c$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int te^{-4t}dt$

วิธีทำ จากสูตร $\int udv = uv - \int vdu$

เลือก $u = t$ จะได้ $du = dt$

$$dv = e^{-4t}dt \quad \text{จะได้} \quad v = \int e^{-4t}dt \quad v = \frac{-1}{4}\int e^{-4t}d-4t$$

$$v = \frac{-1}{4}e^{-4t}$$

แทนค่า $u = t\ ,\ du = dt\ ,\ v = \frac{-1}{4}e^{-4t}$ และ $dv = e^{-4t}dt$ ในสูตร

จะได้ $$\int te^{-4t}dt = (t)(\frac{-e^{-4t}}{4}) + \frac{1}{4}\int -\frac{e^{-4t}}{4}d-4t$$

$$= -\frac{te^{-4t}}{4} - \frac{e^{-4t}}{16} + c$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int_0^\infty e^{-st}tdt$

วิธีทำ ให้ $u = t$ จะได้ $du = dt$

$$dv = e^{-st}dt \qquad v = \frac{-1}{s}\int_0^\infty e^{-st}d-st$$

$$v = \frac{-e^{-st}}{s}$$

แทนค่า $u = t\ ,\ du = dt\ ,\ v = \frac{-e^{-st}}{s}$ และ $dv = e^{-st}dt$ ในสูตร

จะได้ $$\int_0^\infty e^{-st}tdt = \frac{-te^{-st}}{s} - \int_0^\infty \frac{-e^{-st}}{s}dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st}tdt = \frac{-te^{-st}}{s} - \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}d-st$$

ใส่ limit $$\int_0^\infty e^{-st}tdt = \frac{-te^{-st}}{s}\Big|_0^\infty - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty$$

$$= (\frac{-\infty(0)}{s} - \frac{0}{s}) - (\frac{e^{-\infty}}{s^2} - \frac{e^0}{s^2}) = 0 + 0 - \frac{-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$ **ตอบ**

การอินทิเกรต By Parts โดยวิธีลัด

ขั้นตอนการ integrate by Parts โดยวิธีลัด

1. เลือก u ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ง่ายหรือหาค่าอนุพันธ์สิ้นสุดที่ศูนย์
2. เลือก dv ที่สามารถ Integrate ได้ง่าย
3. สร้างตาราง โดยให้ u อยู่ด้านซ้ายมือ และให้ dv อยู่ด้านซ้ายมือของตาราง
4. หาอนุพันธ์ด้านซ้ายมือจนมีค่าเป็นศูนย์
5. Integrate dv เพื่อหาค่า v

6. คูณทะแยงจากซ้ายมือกับค่าด้านขวามือของบรรทัดถัดไป

7. นำผลจากการคูณทะแยงไปบวกกัน โดยการคูณครั้งที่ คี่ มีค่าเป็นบวก(+)และคูณครั้งที่คู่มีค่าเป็นลบ(-) ผลจากการบวก-ลบกัน จะเป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int_0^{\infty} e^{-st}t^2dt$

u	dv
t^2	$e^{-st}dt$
$\frac{dt^2}{dt}=2tdt$	$\int e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}$
$\frac{d2t}{dt}=2$	$\int -\frac{1}{s}e^{-st}dt=\frac{e^{-st}}{s^2}$
$\frac{d2}{dt}=0$	$\int \frac{e^{-st}}{s^2}dt=-\frac{e^{-st}}{s^3}$

พจน์ที่ 1 คือ $(t^2)(\frac{-e^{-st}}{s})=-\frac{2te^{-st}}{s}$

พจน์ที่ 2 คือ $(2t)(\frac{-e^{-st}}{s^2})=\frac{2te^{-st}}{s^2}$

พจน์ที่ 3 คือ $(2)(\frac{-e^{-st}}{s^3})=-\frac{-2e^{-st}}{s^3}$

พจน์ที่ 4 คือ 0

คำตอบคือ $\quad -\frac{t^2e^{-st}}{s}+\frac{2te^{-st}}{s^2}-\frac{-2e^{-st}}{s^3}$

เมื่อใส่ Upper Limit - Lower Limit แล้วจะได้

$$\int_0^{\infty} e^{-st}t^2dt=\frac{2}{s^3} \qquad s>0$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int te^{-4t}dt$

วิธีทำ

u	dv
t	$e^{-4t}dt$
$\frac{dt}{dt}=1$	$\int e^{-4t}dt=\frac{-e^{-4t}}{4}$
$\frac{d1}{dt}=0$	$\int -\frac{e^{-4t}}{4}dt=\frac{e^{-4t}}{16}$

พจน์ที่ 1 คือ $(t)(\frac{-e^{-4t}}{4}) = -\frac{1}{4}e^{-4t}$

พจน์ที่ 2 คือ $-(1)(\frac{e^{-4t}}{16}) = -\frac{1}{16}e^{-4t}$

พจน์ที่ 3 คือ c

ดังนั้น $\int te^{-4t}dt = -\frac{1}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\int e^{3t}\cos t dt$

วิธีทำ เลือก $u = e^{3t}$ เลือก $dv = \cos t dt$ จะเห็นว่าทั้ง 2 เทอมไม่สามารถ หาอนุพันธ์ให้สิ้นสุดที่ศูนย์ ได้เลย

u	dv
e^{3t} $\frac{de^{3t}}{dt} = 3e^{3t}$ $\frac{d3e^{3t}}{dt} = 9e^{3t}$	$\cos t dt$ $\int \cos t dt = \sin t$ $\int \sin t dt = -\cos t$

การหาอนุพันธ์ให้หาไปถึงขั้นตอนที่อินทิกรัลของส่วนที่เป็น dv กลับไปเป็นฟังก์ชันเดิมแล้วหาผลคูณทะแยงดังนี้

พจน์ที่ 1 คือ $e^{3t}\sin t$

พจน์ที่ 2 คือ $3e^{3t}\cos t$

พจน์ที่ 3 คือ $\int (9e^{3t})(-\cos t)dt = -9\int e^{3t}\cos t dt$

ดังนั้น $\int e^{3t}\cos t dt = e^{3t}\sin t + 3e^{3t}\cos t - 9\int e^{3t}\cos t dt$

จะเห็นว่าเทอมด้านขวามือของสมการมีพจน์ที่เหมือนกับพจน์ด้านซ้ายมือคือ $-9\int e^{3t}\cos t dt$ จากนั้นย้ายมาด้านซ้ายมือเพื่อหาคำตอบ จะได้

$$\int e^{3t}\cos t dt + 9\int e^{3t}\cos t dt = e^{3t}\sin t + 3e^{3t}\cos t$$

$$10\int e^{3t}\cos t dt = e^{3t}\sin t + 3e^{3t}\cos t$$

ดังนั้น $$\int e^{3t}\cos t dt = \frac{1}{10}e^{3t}\sin t + \frac{3}{10}e^{3t}\cos t + c$$ **ตอบ**