Matemática Computacional
INTRODUCCION A LOS FRACTALES
(Construcción del conjunto de Julia)
U.P.E.A

Lic. Hector Flores Callisaya
fchect@hotmail.com
Univ. Eddy Torrez Q

20 de Abril del 2005

1 Sistema Dinámico

The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man. David Hilbert (1862-1943)

1.1 Introducción

Cuando observamos la naturaleza con detenimiento, nos damos cuenta de que las montañas no son conos, las nubes no son esferas, las costas no son curvas, etc. Por tanto se necesita tener modelos matemáticos mas aproximados a la realidad. y así poder modelar la naturaleza en un ordenador, para poder obtener resultados mas precisos. Este problema dio origen a lo que hoy se conoce como la Geometría fractal. Descubierto por matemático francés de origen polaco Benoit B. Mandelbrot.

Se estudiara en particular la función definida como $f(z) = z^2 + c$ ya que tiene una representación grafica muy hermoso cuando el modulo de $|c| \leq 2$, en donde z, c son numeros complejos.

1.2 Iteración de funciones no lineales

Definición 1.1 (Numeros Complejos). Denotemos el conjunto de los numeros reales con la letra $\mathbb{R}$, Un numero complejo z es de la forma $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, denotemos este conjunto con la letra $\mathbb{C}$, la cual tiene una estructura de cuerpo. Asociamos a cada numero complejo $z = x + iy$ un un punto del plano (x, y). Mencionamos las propiedades mas importantes:

- el modulo de z, denotado por $|z|$ es igual $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donde $z = a + ib$
- $z = x+iy = r(\sin\theta+i\cos\theta)$ donde r esn el modulo de z, y θ el ángulo de inclinación de z.
- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Definición 1.2 (Sistema dinamico). Un sistema dinámico discreto es un par (X, f) donde $X = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $f : X \longrightarrow X$.

Dado un punto $x \in X$ el conjunto $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$ será llamado orbita de x, donde $f^n(x) = f(...f(f(x)))$ denota la composición de f consigo misma $n - veces$. Un punto $x \in X$ que satisface $f(x) = x$ se llama punto fijo o "punto de equilibrio"de la función f.

Ejemplo 1. Sea f la función que describe la reproducción de peces, Si este año el numero de peces es x al año siguiente será $f(x) = y$, y el próximo año será $f^2(x) = f(y)$, supongamos que f esta dada por la figura 1.1

La figura escalonada indica la orbita de x y se aproxima al punto de equilibrio cuando el numero de años aumenta.

2 Conjuntos Julia

Consideremos la dinámica del $(\mathbb{C}, f)$ donde la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es definida como $f(z) = z^2$. f tiene como puntos fijos al 0 y a todo numero complejo de longitud 1. Además observamos que si z esta en el circulo unitario su orbita converge a 0, y si esta fuera del circulo su orbita tiende al infinito. observe la figura 1.2

2.1 Áreas de atracción

Definición 2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico, sea x un punto de X un punto fijo de f, entonces

$$A(x) = \{y \in X, \quad \lim f^n(y) = x\} \tag{1}$$

Es llamado *área de atracción de x*.

Si $y \in A(x)$ entonces contiene la orbita de y.

Si (X, f) es un sistema dinámico, y $x \in X$ es llamado punto periódico de orden n si la orbita es finita de orden $n + 1$. La orbita es llamada ciclo y denotada por la letra c,e.i $c = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x) = x\}$. Si x es un punto periódico atractor de f de periodo n entonces el *área de atracción del ciclo c* es definido como:

$$A(c) = \bigcup_{i=0}^{n} A(f^i(x)) \tag{2}$$

donde $A(f^i(x))$ es el área de atracción del punto fijo $f^i(x)$ del sistema dinámico (X, f^i).

Una clasificación que podemos dar a los puntos fijos de acuerdo a sus propiedades es la siguiente, sea $x \in X \quad (X = \mathbb{R} \quad o \quad X = \mathbb{C})$ un punto fijo, y consideremos la derivada de la función f en x, si

- *atractor* si y solo si $|f'(x)| < 1$
- *repulsor* si y solo si $|f'(x)| > 1$

Un ejemplo sencillo cuando $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = x^2 + c$, sus puntos fijos son $0, 1$ como $|f'(0)| = 0 < 1$ entonces es un punto atractor, y como $|f'(1)| = 2 > 1$ es un punto repulsor. y solamente son dos puntos es el plano cartesiano.

Ahora consideremos el caso donde $X = \mathbb{C}$ y la función es $f(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$. si $c = 0$

realizando unos cálculos sencillos se pendemos determinar el conjunto atractor del 0 y por el criterio anterior $|f'(0)| < 1$ si y solo si $|z| < \frac{1}{2}$

Definición 2.2. Sea $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio. El *conjunto de Julia* de p, denotado por J_p, es la cerradura del conjunto de puntos repulsivos periódicos de p.

Proposición 2.1. *Sea $p(z)$ un polinonio de grado $n \geq 2$, entonces acurre al menos uno de los casos*

- *p(z) tiene un punto fijo q con $p'(q) = 1$,*
- *p(z) tiene un punto fijo q con $|p'(q)| > 1$,*

De esta forma podemos demostrar que el conjunto de julia es distinto de vació invariante por p e.i $p(J_p) = J_p$.

Un buen algoritmo para plotear o gráficas el conjunto de Julia a través de un ordenador es la proporción siguiente;

Proposición 2.2. *Sea $z_0 \in J_p$. Entonces*

$$J_p = clausura(\bigcup_{k=0}^{\infty} p^{-k}(z_0)). \tag{3}$$

Es decir uno simplemente tiene que hallar un punto fijo repulsor y calcular sus preimágenes. esta idea es utilizada para describir completamente algunos conjuntos de Julia.

Otro de los conjunto especiales es el conjunto de Mandelbrot que se define como

$$M = \{c | f^n \nrightarrow \infty\} \tag{4}$$

3 Aplicación de los fractales

La geometría fractal no es solamente una idea abstracta. Un litoral, considerado desde el punto de vista de su irregularidad más pequeña, tendería hacia una longitud infinita, lo mismo que ocurre con el "copo de nieve". Mandelbrot sugirió que las montañas, nubes, rocas de agregación, galaxias y otros fenómenos naturales son similares a los fractales, por lo que la aplicación de la geometría fractal a las ciencias es un campo que está creciendo rápidamente. Además, la belleza estética de los fractales los ha convertido en elemento fundamental de los gráficos por ordenador o computadora.

Los fractales también se usan en ordenadores para reducir el tamaño de fotografías e imágenes de vídeo. En 1987, el matemático inglés Michael F. Barnsley descubrió la transformación fractal, capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas. Este descubrimiento engendró la compresión fractal de imágenes, utilizada en multimedia y otras aplicaciones basadas en la imagen.

4 Algoritmos en Ordenadores

El siguiente programa es para calcular los puntos fijos de una función compleja y representarla en el plano cartesiano. el paquete utilizado es *Mathematica*.

```
DibujaRaices[polinomio_,var_]:=
    Module[{puntos={},lista={},raiz=0},
     lista=var /. NSolve[polinomio==0,var];
     While [lista!={},
      raiz=N[First[lista]];
      lista=Delete[lista,1];
      AppendTo[puntos,{Re[raiz],Im[raiz]}]
     ];
    ListPlot[puntos,PlotStyle->PointSize[0.05],Axes->False]
    ]
```

finalmente representamos la el conjunto de Julia para la función $f(z) = z^2 + c$ con el siguiente programa.

```
Patito=Compile[{{z,_Complex},{c,_Complex}},
       Module[{w,k=0},
         w=z; While[Abs[w]<=2.0
         && k<=35,w=w^2^+0.687 + 0.312 I;
         k=k+1];k]];

datos=Table[Patito[x+y*I,0.687 + 0.312I]
      ,{y,-1.1,1.1,0.01},{x,-1.5,1.5,0.01}];
```

```
Show[Graphics[({Hue[#], Rectangle[{#,0},{#1+.1,1}]} &) /@
Range[0,2.5,.1],
 AspectRatio->Automatic]]

ListDensityPlot[datos,Frame->False,
        Mesh->False,ColorFunction->Hue,
        PlotLabel->Julia];
```

con este sencillo programa podemos generar varios fractales o conjuntos de Julia. Para distintos valores de c en la función cuadrática $f(z) = z^2 + c$, mostramos algunos de ellos a continuación.

Espero que les haya gustado la lectura, cualquier comentario sugerencia, será tomada muy encuentra.

Referencias

[1] Devany, Robert L,*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition,1989. Boston University, Addison-Wesley Publishing Company.