

Praktikum 7

Eigenfrequenz eines Drahtes

Michael Kopp

26. Juni 2007

1 Versuch

Wir spannen einen Konstantendraht zwischen einem festen Ende und einer Rolle. Um ihn unter Spannung zu halten, wird an den Draht hinter der Rolle ein Gewicht gehängt. Nun wird eine Wechselspannung an den Draht angelegt. Ihre Frequenz ist variabel und kann auf dem Oszilloskop genau bestimmt werden.

Im Bereich des Magnetfelds zwischen den Dauermagneten beginnt der Draht daraufhin in der Frequenz des Stromes zu schwingen. Die Störungen laufen in beide Richtungen des Drahtes und werden an den beiden festen Enden reflektiert. Die Frequenz des Stromes wird so eingestellt, dass sich stehende Wellen bilden.

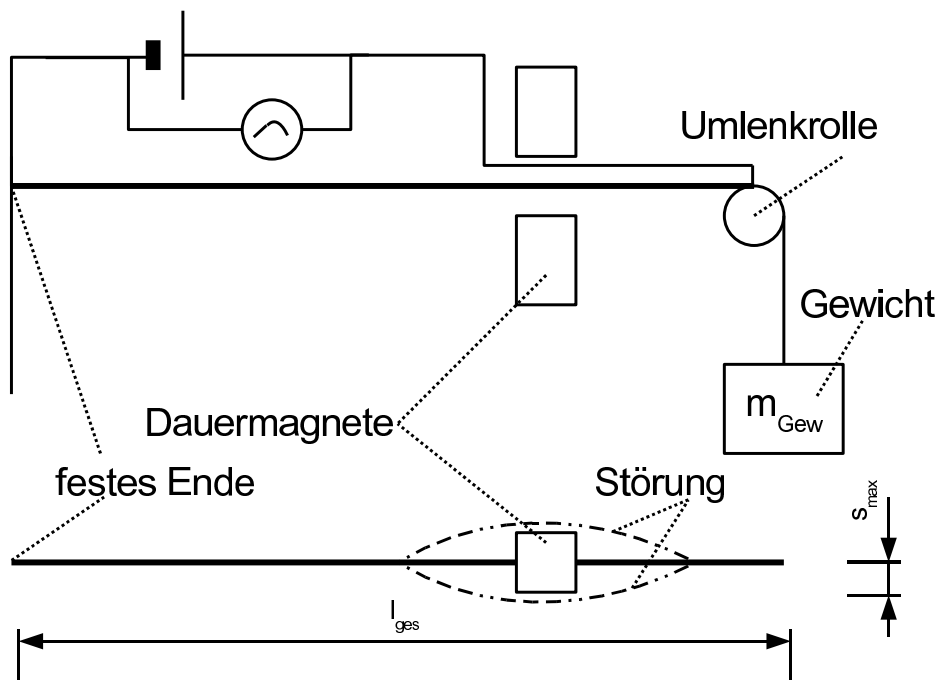


Abbildung 1: Versuchsaufbau (oben: Aufriss, unten: Grundriss)

2 Stehende Welle

Eine *stehende Welle* entsteht dann, wenn zwei Wellen der selben Wellenlänge λ aufeinander zulaufen. Wenn sie sich durchdringen und ihre Amplituden sich addieren, kommt es zu diesen Phänomenen.

Man kann es sich so erklären, dass eine Welle auf einem Wellenträger ja im Prinzip aus Masseteilchen besteht, die jedes einzelne eine harmonische Schwingung ausführen. Ein benachbartes Teilchen führt ebenfalls diese harmonische Schwingung aus, jedoch schwingt es leicht phasenverschoben. Benutzt man das Zeiger-Modell für die Schwingungen der einzelnen Massenteilchen, so hat man eine Gerade (bildlich die *Ruhelage*), auf der im Abstand der Massenteilchen Vektorpfeile angebracht sind, die alle die selbe Länge haben und ich

die selbe Richtung rotieren mit der selben Drehfrequenz.¹ Im Abstand von λ sind zwei Vektorpfeile somit gleichphasig. Die Ausbreitung der Welle geschieht nach diesem Modell so, dass ein Massenteilchen durch die Anregung seines Nachbarn auch einen „*baugleichen*“ Vektorpfeil übertragen bekommt.

Treffen nun zwei Wellen der gleichen Wellenlänge² gegenläufig aufeinander, so hat vor dem Treffen jedes Massenteilchen seinen Vektorpfeil. Beim Treffen bekommt dann das erste Massenteilchen zwei Vektorpfeile - von jedem seiner Nachbarn einen, und ausgehend von diesem ersten Teilchen bekommen auch die Teilchen seiner Umgebung mit der Ausbreitung der beiden Wellen einen zweiten Vektorpfeil.

Jedes Teilchen verfügt nun also über zwei Vektorpfeile, die mit der selben Drehfrequenz rotieren. Dadurch besteht ein fester Winkel zwischen den beiden Vektorpfeilen, der sich nicht ändert. Die Auslenkung des Massenteilchens wird nunmer durch die Vektorsumme der beiden Vektorpfeile bestimmt³. Es entsteht so also aus den Vektorsummen eine neue Schwingung. Da der Winkel der Vektorpfeile der Teilschwingungen sich nicht ändert, kommt es an bestimmten Stellen dazu, dass hier die Phasendifferenz zwischen den Vektorpfeilen $\Delta\varphi = \pi + 2 \cdot n \cdot \pi$ ist, und somit der Summenvektor ein Nullvektor $\vec{0}$ ist. An dieser Stelle schwingt die neu entstandene Welle somit nie; man nennt sie *Schwingungsknoten*. An anderen Stellen ist die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0 + 2 \cdot n \cdot \pi$, somit ist der Additionsvektor hier stets maximal lang. An dieser Stelle kann die Schwingung ihre maximale Auslenkung erreichen; diese Stelle nennt man *Schwingungsbauch*.

In unserem Fall haben wir jedoch nur eine Welle. Der Wellenträger hängt jedoch an beiden Seiten an festen Enden. Das kommt zwei gegenläufigen Wellen gleich, weil durch die festen Enden die Welle reflektiert wird. Dadurch wird die hinlaufende Welle zur ersten Welle und die reflektierte Welle wird zur gegenläufigen. Somit entsteht aus diesen beiden Wellen eine stehende Welle.

3 Mathematische Beziehungen

Durch die Randbedingungen der Welle (zwei feste Enden) ist eine Formel gegeben, die sich auf die Länge des Wellenträgers L bezieht:

$$L = k \cdot \frac{\lambda_k}{2} \quad (1)$$

Dabei ist k die Anzahl der Wellenbäuche auf dem untersuchten Bereich und λ_k die Wellenlänge einer Stehenden Welle mit k Wellenbäuchen. Über die Beziehung der Ausbreitungsgeschwindigkeit zu Wellenlänge λ und Periodendauer T bzw. Frequenz f

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad (2)$$

ergibt sich der Zusammenhang

$$c = 2 \cdot \frac{1}{k} \cdot L \cdot f_k \quad (3)$$

für die drei Größen. Somit ist $c \sim L$ und $c \sim f_k$.

4 Erste vier Schwingungen

Die ersten vier Schwingungen sind dargestellt in Abbildung 2 auf Seite 3.

5 Ausbreitungsgeschwindigkeit

5.1 Berechnung durch Gesetze der Mechanik

Der von uns verwendete Draht hat die Masse $m = 1,57g$ bei einer Gesamtlänge⁴ von $l_{ges} = 2,35m$. Für den Draht ergibt sich also eine Massendichte (also die Masse pro Meter) von

$$\rho_L = \frac{m}{l_{ges}} \approx 0,668 \frac{g}{m} \quad (4)$$

Der Draht wird nun an der Erregerstelle mit der Geschwindigkeit v in eine Richtung bewegt. Um die Amplitude \hat{s} zu erreichen, benötigt er die Zeit Δt :

$$\Delta t = \frac{\hat{s}}{v} \quad (5)$$

¹Die Komponente des Vektorpfeils senkrecht zu der Geraden repräsentiert die Auslenkung des einzelnen Massenteilchens

²Die einzelnen Vektorpfeile drehen mit auch der selben Geschwindigkeit

³bzw. deren Komponente senkrecht zur Ruhelage

⁴wobei die Aufhängungsschlaufen und der nicht verwendete Teil des Drahtes mit einbezogen sind; für die Schlaufen sind 10 cm je Seite dazugegeben, weil sie ja doppelt laufen und noch ein Knoten gemacht wurde.

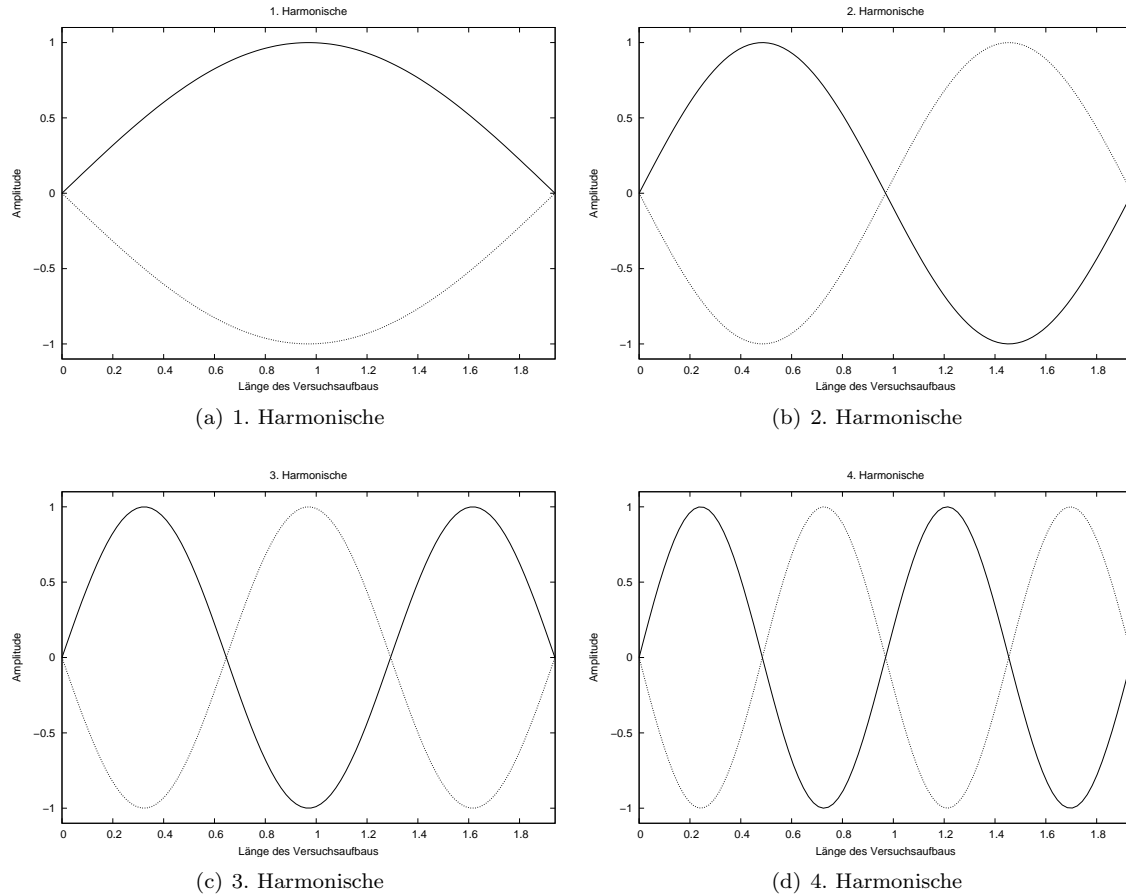


Abbildung 2: Skizzen der ersten drei stehenden Wellen - die Amplitude ist als relative Einheit abgetragen

In der Zeit hat sich die Störung um die Länge l_1 weiterbewegt:

$$l_1 = c \cdot \Delta t \quad (6)$$

Die Bewegung nach oben wurde von der Kraft F_A hervorgerufen. Gleichzeitig existiert noch die Kraft F_{sp} , die die Feder in horizontaler Richtung gespannt hält. Diese beiden Kräfte stehen senkrecht aufeinander und addieren sich zu einer Resultierenden F_{res} , die Längs des nun ausgelenkten Schwingungsträgers zeigt.

Da die Kraft F_A senkrecht zur Ruhelage wirkt, wirkt sie parallel zur Schnelle v . Ebenso wirkt die Spannkraft F_{sp} senkrecht zur Kraft F_A und parallel zur Ruhelage. Da die Resultierende Kraft aus F_A und F_{sp} in Verlängerung des ausgelenkten Wellenträgers läuft, und die Teilkräfte senkrecht aufeinander stehen, kann man sie als Dreieck zusammenfassen mit den Katheten F_A und F_{sp} .

Somit liegt zwischen den einzelnen Kräften der selbe Winkel wie zwischen den Strecken l_1 , \hat{s} und dem ausgelenkten Schwingungsträger. Man kann hier also von ähnlichen Dreiecken ausgehen. Somit gilt folgendes Verhältnis:

$$\frac{F_A}{F_{sp}} = \frac{\hat{s}}{l_1} = \frac{v \cdot \Delta t}{c \cdot \Delta t} = \frac{v}{c} \quad (7)$$

Der Draht erfährt mit der Kraft F_A den Impuls

$$p_A = F_A \cdot \Delta t = m_{bew} \cdot v \quad (8)$$

Die bewegte Masse ist dabei

$$m_{bew} = \varrho_L \cdot l_1 \quad (9)$$

Mit Formel 9, Formel 4, Formel 6 und Formel 8⁵ ergibt sich somit

$${}^5 \frac{F_A \cdot c}{F_{sp}} = v$$

$$p_A = F_A \cdot \Delta t = \varrho_L \cdot l_1 \cdot v = \frac{m}{l_{ges}} \cdot l_1 \cdot v = \frac{m}{l_{ges}} \cdot c \cdot \Delta t \cdot v = \frac{m}{l_{ges}} \cdot c \cdot \Delta t \cdot \frac{F_A \cdot c}{F_{sp}} \quad (10)$$

Kürzt man entsprechend, kann man nach c umstellen.

In unserer Versuchsanordnung ist die Spannkraft F_{sp} die Kraft, mit der das Gewicht die Schnur nach unten zieht, also

$$F_{sp} = F_{g,Gewicht} = m_{Gewicht} \cdot g = 100g \cdot 9,81 \frac{N}{kg} = 0,981N \quad (11)$$

Mit Formel 10 und Formel 11 können wir nun endlich die Ausbreitungsgeschwindigkeit c feststellen:

$$c = \sqrt{\frac{l_{ges} \cdot F_{g,Gewicht}}{m}} = \sqrt{\frac{2,35m \cdot 0,981N}{0,00157kg}} \approx 38,3 \frac{m}{s} \quad (12)$$

5.2 Berechnung durch Zusammenhänge der Eigenfrequenzen

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit über die Messung der Eigenfrequenz zu bestimmen, benötigt man Werte für die Gesamtlänge des Drahtes L , sowie eine Frequenz f_k bei der sich eine stehende Welle mit einer bestimmten Anzahl an Wellenbäuchen gebildet hat.

Für die Wellenträgerlänge haben wir $L = 1,94m$ gemessen, die restlichen Messwerte sind in Tabelle 1 festgehalten. In der Tabelle sind auch gleich die Ergebnisse für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c angegeben, berechnet nach Formel 3.

k	Periodendauer T [ms]	Frequenz f [$\frac{1}{s}$]	Ausbreitungsgeschwindigkeit c [$\frac{m}{s}$]
1	91,0	11,0	42,6
2	45,0	22,2	43,1
3	30,5	32,8	42,4
4	23,0	43,5	42,2
5	18,5	54,1	41,9
6	15,6	64,1	41,5
7	13,0	76,9	42,6
8	11,2	89,3	43,3
Durchschnitt			42,5

Tabelle 1: Messergebnisse

5.3 Vergleich der Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die mit Formel 12 ausgerechnet wurde und der Durchschnitt der Ausbreitungsgeschwindigkeiten aus Tabelle 1 weichen voneinander ab mit *Abweichung* $\approx 11,0\%$.

Interessanterweise ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit für alle Messwerte aus Tabelle 1 sehr eindeutig. Daraus kann man schließen, dass grundsätzliche Messfehler für die Abweichung verantwortlich sein dürften.

- Die Frequenzen f_k haben wir vermutlich nicht falsch abgelesen - wir haben ein präzises Oszilloskop verwendet.⁶ Bei der Anzahl der Wellenbäuche k haben wir uns vermutlich auch nicht verzählt. Der Fehler bei der Rechnung aus Werten aus Tabelle 1 kann eigentlich nur aus falsch abgemessener Länge L resultieren. Das kann daher kommen, dass wir die Länge des Drahtes bis zur Mitte der Rolle messen mussten - und die genaue Mitte abzusehen ist nicht unkompliziert. Um auf die ausgerechnete Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 38,3 \frac{m}{s}$ zu kommen, hätten wir uns aber um ca. $19cm$ vermessen müssen - was unwahrscheinlich ist.
- Ein Problem stellt dagegen die Länge l_{ges} dar; sie konnte wegen des Knotens und der Schlaufen nicht präzise bestimmt werden. Zudem könnte die Masse $m_{Gewicht}$ von den angegebenen $100g$ abweichen - solchen Beschriftungen sollte man eigentlich nicht vertrauen. Dazu kommt auch, dass der überhängende Draht eigentlich auch einbezogen werden sollte (er macht aber nur ca. $0,27g$ aus). F_{sp} könnte also etwas größer sein, als hier gerechnet, wenn die Gewichte nicht präzise beschriftet waren und der verknotete Draht in Wirklichkeit länger war.

⁶Hätten wir uns bei den Frequenzen verzählt, hätte eigentlich keine so einheitliche Ausbreitungsgeschwindigkeit resultieren dürfen.

- Dass Kräfte wie Reibung eine Rolle spielen ist ebenfalls möglich. Ist die Reibung an der Rolle groß, so addiert sich noch ein Betrag zur Spannkraft F_{sp} - somit würde sich der damit berechnete Wert der Ausbreitungsgeschwindigkeit dem aus Tabelle 1 weiter annähern.

6 Die auslenkende Kraft

Auf den Draht wirkt die Auslenkende Kraft F_A . In Abbildung 3 auf Seite 6 sind verschiedene Schwingungszustände eingetragen; jeweils mit Kräftevektoren.

Dabei ist ersichtlich, dass in Abbildung 3(a) die einzige Kraft senkrecht zur Ruhelage F_A ist. Sie sorgt also für die Bewegung aus der Ruhelage.

Zu Abbildung 3(b) dagegen ist schon etwas Zeit vergangen - nun tritt die rücktreibende Kraft F_R mit auf, die aus der Spannung der Feder resultiert (hier mit F_{sp} bezeichnet). Die Auslenkende Kraft wird also schon etwas gehemmt - das Resultat ist eine weniger kraftvolle Bewegung aus der Ruhelage heraus.

Schließlich hat die Schwingung bei Abbildung 3(c) ihre Amplitude erreicht. Hier ist die rücktreibende Kraft betragsmäßig so groß wie die auslenkende, ihr aber entgegengesetzt. Das Resultat ist, dass Die Schwingung hier verharren würde, würde die Kraft F_A nicht verschwinden. In unserem Aufbau verschwindet F_A allmählich, da der Spannungsverlauf, der für die Auslenkung letztendlich verantwortlich ist, ja sinusförmig ist.

Die Spannung, die an dem Draht anliegt, ist also in Abbildung 3(a) noch klein, hier führt aber auch eine kleine Kraft schon zu einer Auslenkung, weil die rücktreibende Kraft noch nicht groß ist. Es liegt praktisch immer beinahe ein Kräftegleichgewicht vor. Wird der Draht ausgelenkt, so ist F_A etwas größer, bewegt er sich zurück in Ruhelage, ist F_A etwas kleiner. Die Spannung steigt dann in Abbildung 3(b) an und ist maximal in 3(c). Für die Schwingung in Gegenrichtung kann man sich einfach die Schaubilder in der anderen Reihenfolge anschauen und dann umgekehrt (oben \mapsto unten).

6.1 Auslenkende Kraft als Lorentzkraft

Die Kraft F_A ist eine LORENTZkraft. Gemäß der Definition dieser Kraft kann man die Kraft F_A durch folgende Formel bestimmen:

$$F_A = B \cdot I \cdot l_{mag} \quad (13)$$

Dabei ist B die *Magnetische Flussdichte* zwischen den beiden Dauermagneten, I ist die Stärke des Stroms, der durch den Draht fließt und l_{mag} ist die Länge des vom Magnetfeld durchsetzten Drahts.

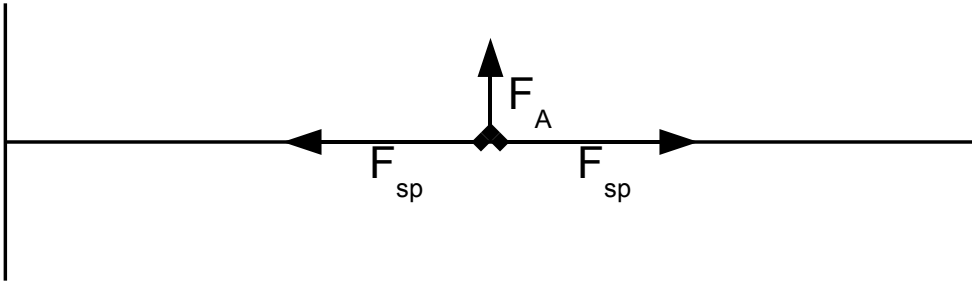
Leider haben wir keine Möglichkeit, die Kraft F_A auszurechnen, weil man hierfür die Magnetische Flussdichte bspw. mit einer HALLsonde hätten bestimmen müssen. Außerdem lässt sich der vom Magnetfeld durchsetzte Bereich des Drahtes nicht eindeutig bestimmen. Das Magnetfeld durchdringt nämlich auch den Bereich etwas abgelegen von den Magneten. Zudem ist das Magnetfeld nur in einem kleinen Teil homogen. Es fehlt uns ebenfalls die Stromstärke I , die man zwar über den (spezifischen) Widerstand des Drahtes berechnen könnte, doch leider können wir den Drahtquerschnitt nicht bestimmen.

6.2 Auslenkende Kraft durch Mechanik berechnet

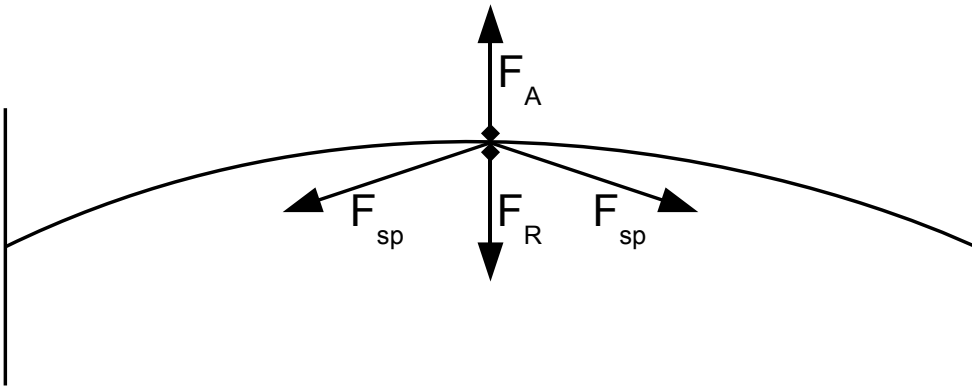
Die Auslenkende Kraft mechanische zu berechnen ist ebenfalls möglich, aber nur, wenn man die Geschwindigkeit v der Schnelle bestimmen kann. Bei unserem Versuchsaufbau ist dies nicht möglich (oder nur mit großen Umständen), weil v nicht konstant ist. Der Strom, der für F_A verantwortlich ist, ändert sich nämlich als Sinusfunktion.

Ist es jedoch möglich, v zu bestimmen, so kann man in Formel 10 Formel 7 einsetzen. Durch Umformung erhält man dann

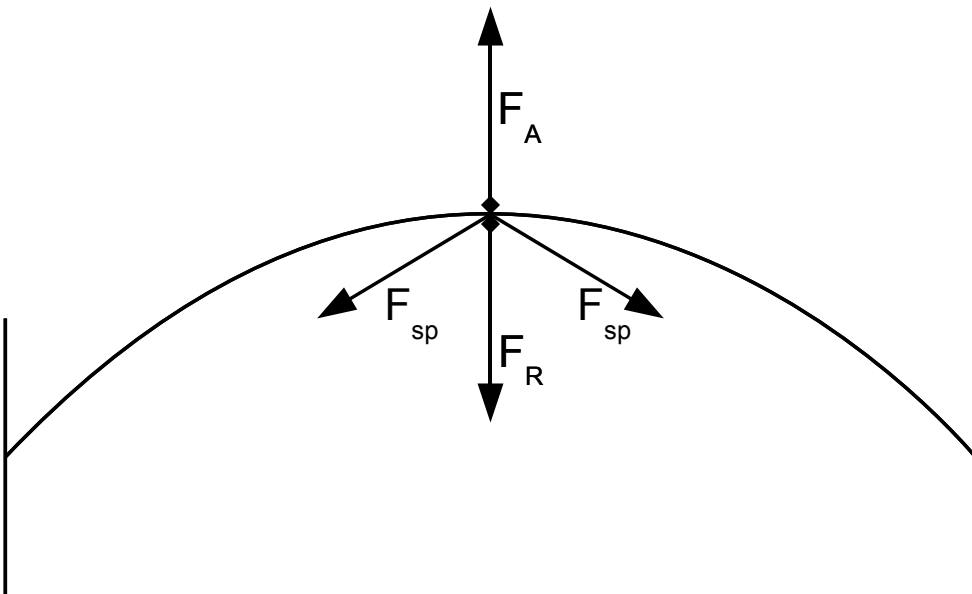
$$F_A = \sqrt{qL \cdot v^2 \cdot F_{sp}} \quad (14)$$



(a) Keine Auslenkung



(b) Mittlere Auslenkung



(c) Volle Auslenkung

Abbildung 3: Skizzen mit Kraftvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten - nicht maßstabsgetreu