

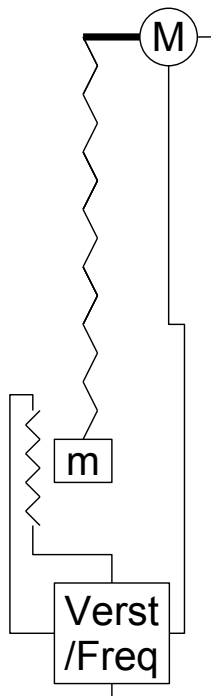
Praktikum 6

Schwingung des Federschwingpendels

Michael Kopp

ca. 29. März 2007

1 Versuch



Ein Federpendel wird schwingen gelassen und dabei die Periodendauer T gemessen und mit errechneten Werten verglichen.

Da ein „normales“ Federpendel eine *gedämpfte Schwingung* ausführt, soll diese Dämpfung beseitigt werden. Dazu wird das obere Ende des Pendels am Arm eines Motors befestigt. Dieser Motor wird mit Wechselstrom betrieben, sodass er seinen Arm immer nur etwas nach oben und nach unten bewegt, bis der Strom umpolt und er wieder in die entgegengesetzte Richtung dreht. Damit übt er gewissermaßen einen mechanischen Zwang auf die Feder aus.

Dieser Zwang wird entweder von der Schwingung selbst kontrolliert, indem am unteren Auslenkungspunkt eine Spule angebracht wird und diese mit einem Verstärker verbunden den Motor in Bewegung versetzt. Wenn nämlich der Körper nach unten schwingt, kommt er an der Spule vorbei. Da an der Unterseite des Schwingers ein Magnet befestigt ist, wird in der Spule eine Spannung induziert. Diese induzierte Spannung wird noch verstärkt und treibt dann den Motor an. Ist die Polung des Motors korrekt, so wird Strom so induziert, dass der Motor gerade nach oben zieht, wenn der Körper von sich aus die untere maximale Auslenkung hinter sich gebracht hat und anderstherum. Zwischen Motor und Spule liegt idealerweise¹ eine Phasenverschiebung von $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$. Ist der Verstärker richtig eingestellt, so kann der Zwang des Motors die Energie, die das Federpendel „verliert“ ausgleichen und somit liegt eine *ungedämpfte Schwingung* vor.

Es ist auch möglich, die Frequenz dieses Zwanges von Außen vorzugeben. Dazu wird der Spulenstromkreis am Verstärker ignoriert und der Verstärker wird zum Sinusgenerator mit variabler Frequenz umgestellt. Dann wird dem Motor von Außen die Frequenz vorgegeben, mit der er Zwang auf die Feder ausüben soll. Es liegt somit eine *erzwungene Schwingung* vor.

Abbildung 1:
Versuchsaufbau
- Skizze der un-
gedämpften bzw.
erzwungenen
Schwingung

2 Gedämpfte und ungedämpfte Federschwingung

Die Periodendauer eines Federschwingpendels mit der Federhärte D berechnet sich nach

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_{ges}}{D}} \quad (1)$$

Dabei ist m_{ges} die Masse des gesamten schwingenden Systems. Sie setzt sich zusammen aus der Masse des Massenstücks m_M und der Hälfte der Masse der Feder m_{Feder} , also

$$m_{ges} = m_M + \frac{1}{2} \cdot m_{Feder} \quad (2)$$

Die Federhärte berechnet sich, indem man misst, wie weit das Massenstück der Masse m_M die Feder dehnt, also um welche Auslenkung das Federpendel sich vom unbelasteten Zustand l_0 zum ausgelenkten Zustand l_{aus} bewegt hat. Die Kraft F_g , mit der das Massenstück an der Feder zieht wird in Verhältnis mit der ausgelenkten Strecke gesetzt:

$$D = \frac{F_g}{\Delta s} = \frac{m_M \cdot g}{l_{aus} - l_0} \quad (3)$$

¹Näheres im Kapitel 3 „Erzwungene Schwingung“ ab Seite 3

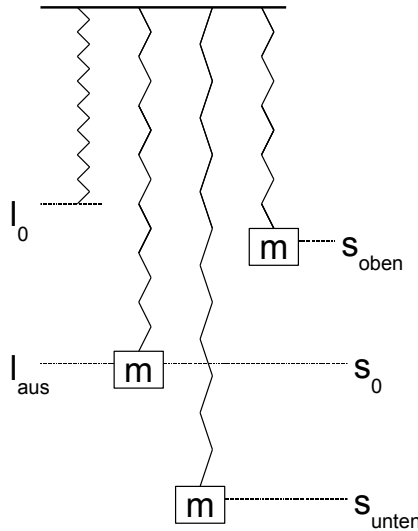


Abbildung 2: Skizze der Schwingung eines Federpendels

| Messung Nr. | $T_{ged\ddot{a}mpft}$ [s] | $T_{unged\ddot{a}mpft}$ [s] |
|----------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1 | 0,8550 | 0,8690 |
| 2 | 0,8670 | 0,8580 |
| 3 | 0,8700 | 0,8680 |
| 4 | 0,8700 | 0,8550 |
| 5 | | 0,8590 |
| 6 | | 0,8590 |
| 7 | | 0,8770 |
| 8 | | 0,7810 |
| Durchschnitt | 0,8655 | 0,8533 |
| Errechnet | 0,8269 | 0,8269 |
| Abweichung [%] | 4,67 | 3,19 |

Tabelle 1: Messwerte für die gedämpfte und ungedämpfte Schwingung

Für unsere Feder ergibt sich dabei für ein Massenstück mit $m_M = 54,64g$ und bei einer Auslenkung von $\Delta s = 15,0cm$ eine Federhärte von $D = 3,5735 \frac{N}{m} \approx 3,57 \frac{N}{m}$. Wir hätten nach Formel 1 und Formel 2 also eine Periodendauer von $T_{theoretisch} \approx 0,8269s \approx 0,827s$ zu rechnen. Beachtet man entgegen Formel 2 die Masse der Feder nicht weiter und rechnet in Formel 1 mit $m_{ges} = m_M$, so erhält man eine Periodendauer von $T_{theoretisch,ungenau} \approx 0,7769s \approx 0,777s$.

Unsere Messwerte für ungedämpfte bzw. gedämpfte Schwingungen sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Im Schaubild 3 auf Seite 3 sind sie graphisch ausgewertet.

Auffällig ist, dass bei größerer Dämpfung die Resonanzfrequenz der Schwingung sinkt (die Periodendauer steigt). Es handelt sich also offensichtlich nicht mehr um die Harmonische Schwingung, die mit Gleichung 1 beschrieben wird. Die Größe, die hierfür verantwortlich ist, ist vermutlich die Reibung des Systems. Es handelt sich hierbei aber um einen normalen Vorgang bei durch Reibung gedämpften Schwingungen. Vergleicht man gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen, so ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2} \quad (4)$$

wobei k eine Reibungskonstante ist, die mit zunehmender Dämpfung zunimmt. Es ist also klar ersichtlich, dass die Frequenz der gedämpften Schwingung kleiner sein muss, als die der ungedämpften.

Vergleicht man die von uns gemessenen Werte mit den errechneten Werten, so ist die Abweichung (wie in Tabelle 1 ersichtlich) minimal. Bei den „unexakt“ errechneten Werten, bei denen man also die Federmasse nicht berücksichtigt hat, ist die Abweichung wesentlich größer: 11,40% in Bezug auf die Messwerte der gedämpften Schwingung und 9,83% in Bezug auf die ungedämpfte Schwingung.

Es ist also wirklich gelungen, die Schwingung mit dem Motor „exakter“ zu machen. Verwendet man den Motor wie eingangs Beschrieben mit der Induktionsspule, so nähern sich diese Werte dem theoretischen Wert besser an. Es ist aber auch ersichtlich geworden, dass die Abweichung zwischen den gedämpften und ungedämpften Werten sehr klein ist (gerade mal 1,43%), wohingegen es wesentlich stärker zu Buche schlug, wenn

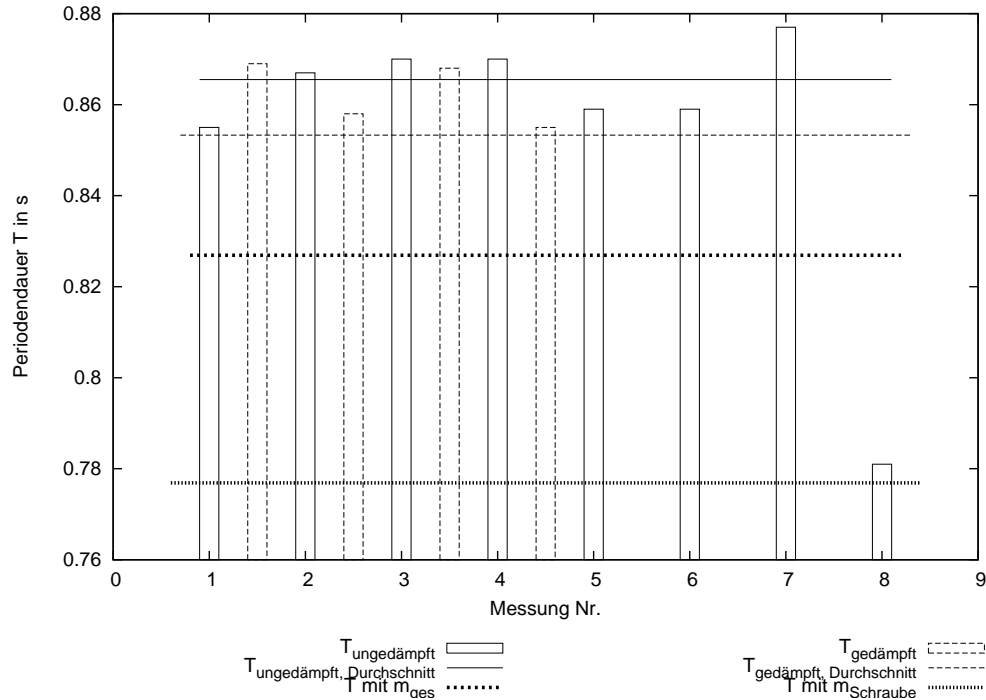


Abbildung 3: Graphische Auswertung der Messwerte aus Tabelle 1

man die Masse der Feder nicht beachtet (nämlich 6,05%). Dass die gemessenen Werte der gedämpften Schwingung in Allgemeinen kleiner sind als die der ungedämpften Schwingung dürfte daher kommen, dass wir bei unserer Messung immer 10 Perioden gezählt haben um das Ergebnis dann durch 10 zu teilen. Möglicherweise ändert sich die Periodendauer der Schwingung in einem längeren Zeitraum, da die Dämpfung der Federschwingung sich nicht unbedingt linear oder proportional zur Schwingungsgeschwindigkeit verhält. Möglicherweise hat dann der Zwang des Motors dieser Kraft entgegengewirkt.

3 Erzwungene Schwingung

Nun wurde die Spule abgekoppelt und der Motor wurde mit einem Sinusgenerator betrieben. Die Messungen sind dadurch ungenau geworden, dass man der Anzeige des Sinusgenerators nicht vertrauen kann und die Frequenz des Zwanges so durch Abzählen ermittelt werden musste.

Die sich dafür ergebenden Messwerte sind in Tabelle 2 auf Seite 4 zusammengefasst. In Abbildung 5 auf Seite 4 sind die Daten graphisch aufgearbeitet. Es ist deutlich ersichtlich, dass der Hochpunkt der Ausgleichskurve bei $f_0 \approx 1,2\text{Hz}$ liegt. Bei dieser Frequenz hat die Amplitude der Schwingung sich deutlich verstärkt im Vergleich zu den anderen Frequenzen des Zwanges. Diese Frequenz f_0 entspricht der Periodendauer $T_0 = \frac{1}{f_0} \approx 0,83\text{Hz}$. Dies wiederum ist sehr genau der Wert, den wir für die ungedämpfte bzw. gedämpfte Schwingung ermittelt haben und sogar errechnet haben. Von dem errechneten Wert $T_{\text{theoretisch}} \approx 0,8269\text{s}$ weicht dieser um 0,37% ab.

Betrachtet man nun neben dem Zusammenhang zwischen maximaler Auslenkung \hat{s} und Frequenz f auch den in Abbildung 4 dargestellten Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung von Federschwingung bzw. Motorzwangabgabe φ , so fällt auf, dass bei der Frequenz f_0 die Phasenverschiebung genau $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ ist. Der Motor ist hier also der Schwingung der Feder um eine viertels Periode vorraus - zieht also bspw. gerade an, wenn die Feder aus der unteren Gleichgewichtslage nach oben kommt.

Diese Phasenverschiebung ist bei der ungedämpften Schwingung nicht möglich gewesen, obwohl sie offensichtlich ideal ist, der Schwingung zusätzliche Energie zu übertragen. Bei der ungedämpften Schwingung wird aber dann die maximale Spannung induziert, wenn der Magnet sich am oberen Ende der Spule befindet, da er hier die größte Geschwindigkeit im Bereich der Spule hat. Dieser Impuls sollte aber schon dann kommen, wenn der Magnet gerade seinen unteren Umkehrpunkt verlässt. Hier ist die induzierte Spannung aber sehr klein, da der Magnet sich am unteren Umkehrpunkt (kurzzeitig) nicht bewegt.

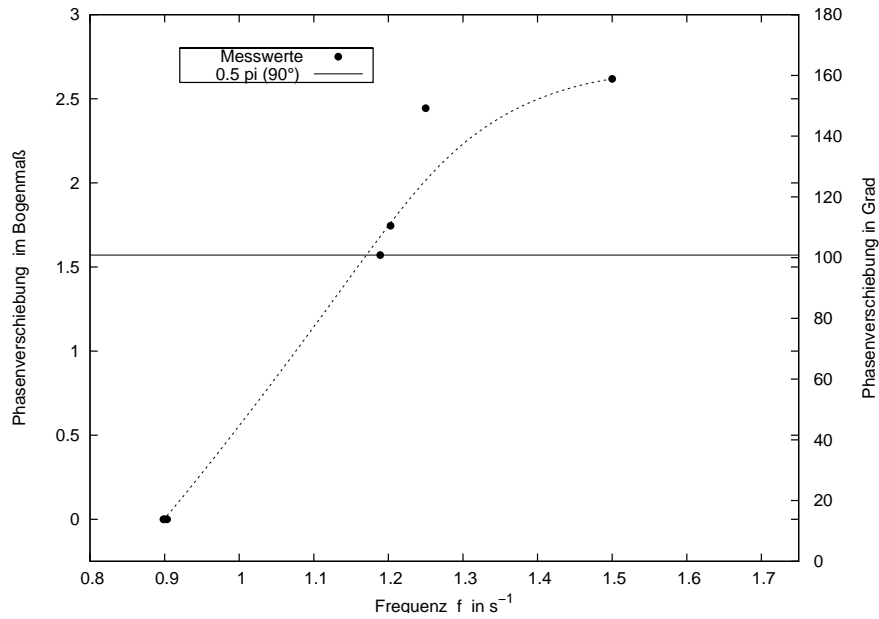


Abbildung 4: Schaubild der Daten für die Phasenverschiebung aus Tabelle 2

| Messung Nr. | Periodendauer T [s] | $T_{Druchschnitt}$ [s] | maximale Auslenkung \hat{s} [cm] | Phasenverschiebung φ [°] |
|-------------|------------------------|------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 0,7000 | |
| 2 | 0,8000 | 0,8000 | 4,4000; 2,9000 | 140 |
| 3 | 0,6667 | 0,6667 | 1,5000 | 150 |
| 4 | 0,5714 | 0,5714 | 0,7000 | |
| 5 | 1,1020; 1,1120 | 1,1070 | 0,5000 | 0 |
| 6 | 1,1170; 1,1060 | 1,1115 | 0,6000 | 0 |
| 7 | 1,1210; 1,1050 | 1,1130 | 0,7500 | 0 |
| 8 | 0,8480; 0,8090; 0,8370 | 0,8313 | 2,7000 | 100 |
| 9 | 0,8460; 0,8360 | 0,8410 | 5,6000 | 90 |

Tabelle 2: Messwerte der erzwungenen Schwingung

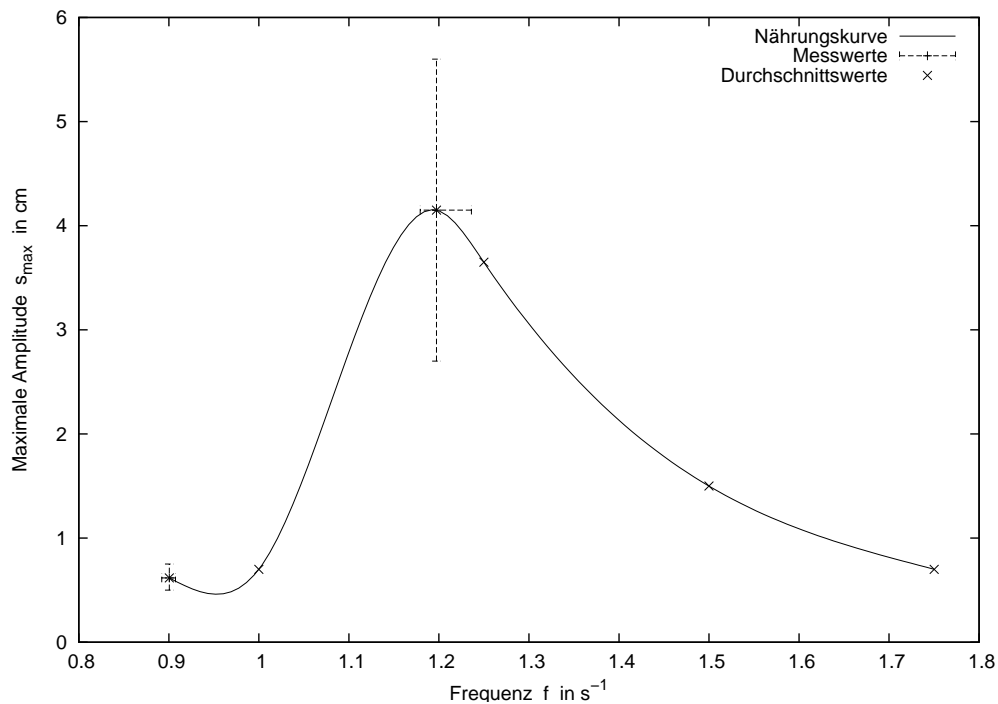


Abbildung 5: Schaubild der Daten aus Tabelle 2 - nahe aneinanderliegende Datensätze wurden zusammengefasst und sind mit Fehlerindikatorbalken repräsentiert. Der Tiefpunkt ist unbeabsichtigt, $s_{max} = \hat{s}$