Praktikum 5

Schwingung einer Wassersäule

Michael Kopp

ca. 1. März 2007

Versuch

In ein U-Rohr wird Wasser bis zu einem Stand l_0 gegossen. An der einen Seite des U-Rohrs werden zwei Elektroden (in Abb. 1 fett) geschoben. Diese laufen zu einer Zeitmesseinrichtung, die darauf reagiert, wenn Strom zwischen den beiden Kontakten fließt. Dies ist nämlich genau dann der Fall, wenn Die Elektroden in Wasser eintauchen.

Der Wasserstand l_0 muss deshalb so gewählt werden, dass die Elektroden im Ruhezustand nicht ins Wasser reichen. Dann erst wird auf der „unverbauten“ (in Abb. 1 linken) Seite des Rohres gepustet. Dadurch senkt sich hier der Wasserspiegel und der Wasserspiegel auf der „verbauten“ Seite Steigt an. Wenn der Wasserpegel die Elektroden benetzt, hört man mit dem Pusten auf und das Wasser wird in dem U-Rohr schwingen.

Die Zeitmesseinrichtung registriert ab jetzt, wie lange zwischen zwei Benetzungen liegt. Idealerweise sollten die Elektroden deshalb logischerweise möglichst nahe am oberen Umkehrpunkt der Schwingung liegen.

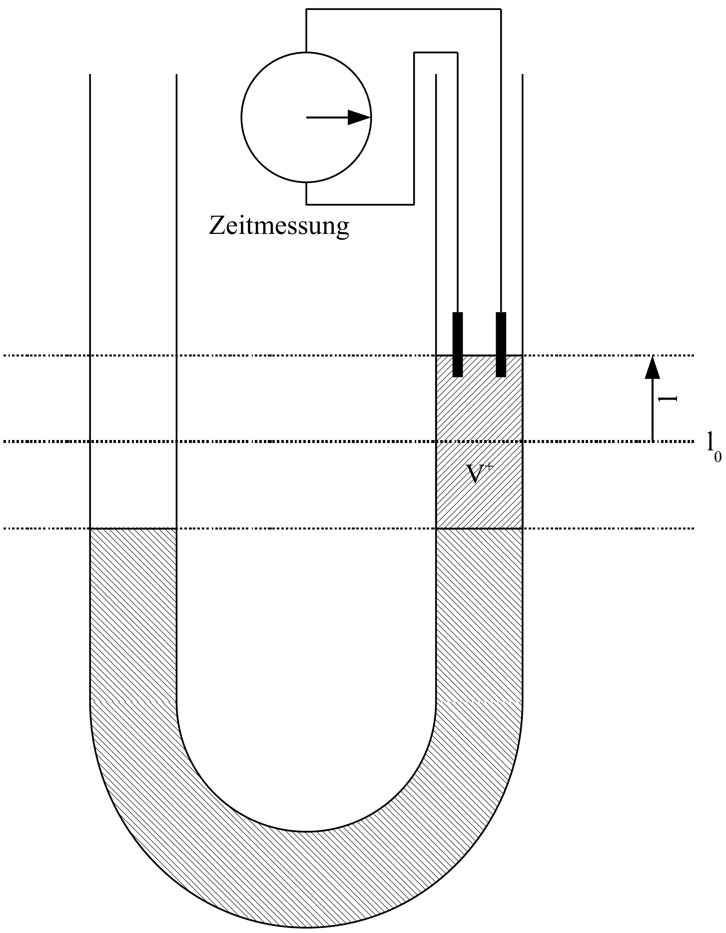


Abbildung 1: Versuchsaufbau - Skizze

Zeitmessung

Zwei Kontakte werden über eine mit Schwefel eingestrichene und geerdete leitende Platte gezogen. An dem einen Kontakt („A“) liegt permanent Wechselstrom ($f = 50Hz$) an, am anderen („B“) fungieren die Kontakte im U-Rohr als Schalter und somit liegt hier nur Wechselspannung an, wenn zwischen den Kontakten Wasser leitet.

Werden die Kontakte gezogen und fließe Strom, ergibt sich ein charakteristisches Muster - Streifen senkrecht zur Strichrichtung entstehen bei jeder Umpolung. Bei der Messung werden die beiden Kontakte nebeneinander gezogen. Tauchen die Elekroden des U-Rohrs in Wasser ein, ergeben beide Kontakte die Streifenbilder, sinkt die Wassersäule wieder unter die Elektroden, fertigt nur A noch Striche an, so lange, bis die Elektroden wieder eintauchen.

Nun werden die Bahnen verglichen und es werden die Striche von A gezählt, als B keine Striche gemacht hat. Da jeder Strich bei einer Umpolung entstand und je Sekunde 100 Umpolungen vonstatten gingen, kann man damit die Zeit, die die Elektroden außerhalb des Wassers waren, messen.

1 Schwingungsdauer der Wassersäule

Das Wasser in dem U-Rohr erfährt die Kraft F_g, die als Rückstellkraft F_R fungiert. Nach NEWTON gilt dabei für die Masse m des Wassers und den Ortsfaktor g

$$F_R = F_g = m \cdot g \tag{1}$$

Die Masse m kann man ausdrücken mit dem Volumen V und der Dichte ϱ des Stoffes:

$$m = \varrho \cdot V \tag{2}$$

Dabei ändert sich die Masse m bzw. das Volumen V des Wassers aber im Verlauf der Schwingung, da immer die Massen- bzw. Volumendifferenz des Wassers zwischen den beiden Hälften des U-Rohres betrachtet wird.

Während nämlich in einer Hälfte des U-Rohres der Wasserpegel um den Betrag l sinkt, steigt er in dem anderen U-Rohr. Auf der einen U-Rohrseite ist somit ein *Mehr* an Wasser mit dem Volumen V^+

$$V^+ = A \cdot 2 \cdot l \tag{3}$$

weil sich das Volumen vereinfachen lässt mit

$$V = A \cdot s \tag{4}$$

wobei A die Querschnittsfläche und s die Länge der Wassersäule ist. Wäre alles Wasser des Systems auf einer Seite, so wäre V^+ doppelt so groß wie das Gesammtvolumen des Wassers.

Setzt man nun Gleichung 3 in Gleichung 2 ein und die neue Gleichung in Gleichung 1, so erhält man Gleichung 5 mit

$$F_R(l) = -2 \cdot A \cdot \varrho \cdot g \cdot l \tag{5}$$

Das „$-$“ in der Gleichung kommt daher, dass die Rückstellkraft F_R entgegengesetzt der Richtung ist, in die die Wassersäule auslenkt.

Es ergibt sich hier eine Kraft, die linear proportional zu ihrer Auslenkung ist. Liegt ein solcher Zusammenhang vor, so handelt es sich bei der beobachteten Schwingung um eine ***harmonische Schwingung***.

Differentialgleichung der Schwingung

Die erhaltene Formel 5 lässt sich nun gleichsetzen mit der Formel $F = m_g \cdot a$ mit a als Beschleunigung[1]. Für diese Beschleunigung benutzt man von der Auslenkung-Zeit-Funktion $l(t)$ die zweite Ableitung $\ddot{l}(t)$.[2] Im Prinzip setzt man also die Rückstellkraft-Zeit-Funktionen einander gleich:

$$m_g \cdot \ddot{l}(t) = -2 \cdot A \cdot \varrho \cdot g \cdot l(t) \tag{6}$$

Für die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung bietet sich unter anderem die Sinusfunktion an - diese ist periodisch und ihrer zweiten Ableitung proportional. Man verwendet also als Auslenkungs-Zeit-Formel die Sinusfunkton. Mit ihrern Ableitungen sieht sie wie folgt aus:

$$\begin{aligned} l(t) &= \hat{l} \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) & (7)\\ \dot{l}(t) &= \hat{l} \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi) & (8)\\ \ddot{l}(t) &= -\hat{l} \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi) & (9) \end{aligned}$$

Setzt man nun die Formeln 7 und 9 in Formel 6 ein, so ergibt sich:

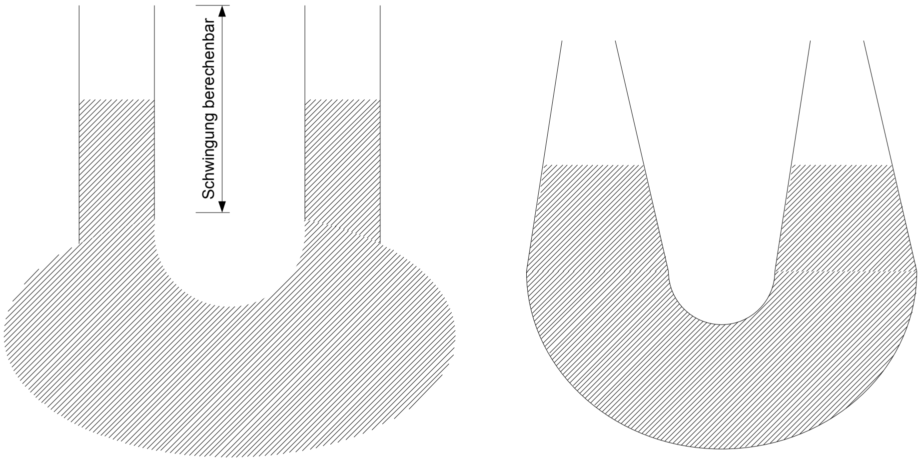
$$\begin{aligned} m_g \cdot \omega^2 &= 2 \cdot A \cdot \varrho \cdot g & (10)\\ \omega &= \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot \varrho \cdot g}{m_g}} & (11) \end{aligned}$$

Über die Beziehung

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \tag{12}$$

[1] Hier wird die *gesamte* Wassermenge m_g beschleunigt!

[2] Da $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v$ und $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s} = a$



(a) Form A (b) Form B

Abbildung 2: Skizzen verschiedener U-Rohr-Arten

mit der Periodendauer T kann man nun herleiten (Formel 11 in 12):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_g}{2 \cdot A \cdot \varrho \cdot g}} \tag{13}$$

Aus den Formeln 4 und 2 ergibt sich $A \cdot \varrho = \frac{m_G}{2 \cdot l_0}$ und weiter:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l_0 \cdot m_g}{2 \cdot m_g \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_0}{g}} \tag{14}$$

2 Rohrformen

Wichtig ist hierbei jedoch, dass der Rohrquerschnitt A In dem Bereich konstannt ist, in dem die Wassersäule schwingt. Trifft dies nicht zu (wie beispielsweise bei Form B von Abb. 2(b) auf Seite 3), so sind die Formeln 3 und 4 nicht mehr korrekt, und soit auch alle weiteren Rechnungen, die alle darauf aufbauen. Natürlich gelten die Formeln weiterhin als Nährung für sehr kleine Auslenkungen - diese müssten aber schon so klein sein, dass sie vermutlich nicht viel bringen.

Ist der Rohrquerschnitt außerhalb des Bereiches in dem die Wassersäule schwingt nicht konstannt, in dem Bereich hingegen schon (wie Form A in Abbildung 2(a) auf Seite 3), so muss man das in die Berechnung der Gesammtmasse m_g miteinbeziehen. Die Umformung zu 14 ist somit nicht mehr zulässig, weil man nun m_g nur in Sonderfällen auf die Art von Formel 4 ausrechnen kann. Natürlich kommt es durch diese Form dazu, dass Verwirbelungen etc. das Fließverhalten ändern - die Formeln dürften nur als Nährung gelten.

3 Messungen

Für unsere Untersuchungen mit verschieden hohen Wassersäulen ergaben sich folgende Messwerte:

$l[m]$	$T_1[s]$	$T_2[s]$	$T_{Durchschnitt}[s]$
0,400	0,840	0,840	0,840
0,416	0,980	0,820	0,900
0,442	0,840	0,920	0,880
0,465	0,780	0,740	0,760

Tabelle 1: Messwerte

Im Schaubild 3 auf Seite 4 sind die Messwerte eingezeichnet (gestrichelt mit Fehlerindikatoren), sowie eine errechnete Kurve (durchgezogen).

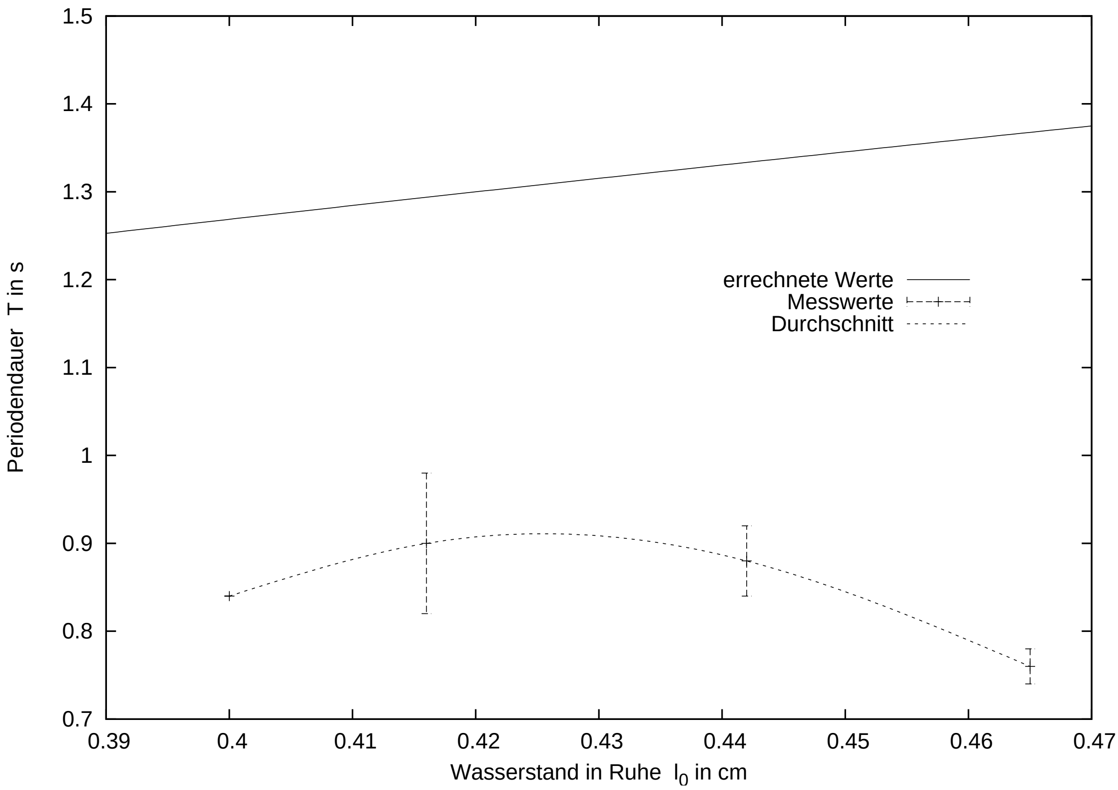


Abbildung 3: Graphische Auswertung der Messergebnisse aus Tabelle 1

4 Abweichungen

Wie in Abbildung 3 auf Seite 4 deutlich zu erkennen ist, hatten wir bei den Messungen mit Ungenauigkeiten zu kämpfen. Mögliche Ursachen dafür könnten sein:

- Die Elektroden tauchten zu tief in die Wassersäule ein.
  Dadurch beginnt die Zeitmessung nicht am oberen Punkt der Schwingung. Die Tatsache, dass unsere Messwerte immer *kleiner* als die berechneten Werte waren, unterstützt das. Es wird die Schwingung nämlich beispielsweise - wenn die Schwingung am oberen Umkehrpunkt beginnt ($t = 0$) - erst von $\frac{T}{8}$ gemessen, weil die Elektroden in diesem Zeitraum noch im Wasser sind. Logischerweise würde diese Messung dann auch schon bei $\frac{7 \cdot T}{8}$ wieder angehalten, somit misst man nur einen Bruchteil der Periodendauer.

- Die Messungen der Höhe ist nicht exakt, da schließlich um das U-*Rund* mitgemessen werden muss. Die schwingende Wassermenge bzw. die Höhe l_0 kann also in beide Richtungen (zu groß oder zu klein) abweichen.

- Mit unserer Methode der Zeitblesung ist das Ablesen äußerst schwer und fehleranfällig - man verzählt sich bei den kleinen Strichen sehr leicht. Dadurch kann die Periodendauer T nach oben oder unten abweichen.

- Die Schwingung der Wasersäule ist äußerst stark gedämpft - das weist darauf hin, dass starke Reibungskräfte vorliegen. Diese dürften die Messungen zusätzliche ungenau machen:
  Durch die starken Reibungskräfte ergibt sich eine gedämpfte Schwingung - in unseren Rechnungen sind wir jedoch von einer harmonischen Schwingung ausgegangen. Strenggenommen gilt damit schon Formel 1 nicht.
  Bei einer gedämpften Schwingung liegt keine *Harmonische Schwingung* mehr vor, dadurch verändert sich die gemessene Periodendauer T im Vergleich zur errechneten Periodendauer, da bei dieser von einer Harmonischen Schwingung ausgegangen wird. Da die Frequenz einer gedämpften Schwingung jedoch kleiner ist als die einer harmonischen[3], müsste die gemessene Periodendauer eingentlich *größer* sein, als die errechnete - dem ist aber seltsamer Weise nicht so.

[3] $\omega_{geämdpft} = \sqrt{\omega^2_{0,harmonisch} - k^2}$