

3.1.5 光の減衰

仮定

1. 光は媒質に平均的ビーム
2. ビーム径が有限な波による回折の影響を無視

→ $I = I_0 e^{-\alpha(\omega)d}$ で減衰

- $\alpha(\omega) < 0$: active
- $\alpha(\omega) \geq 0$: passive

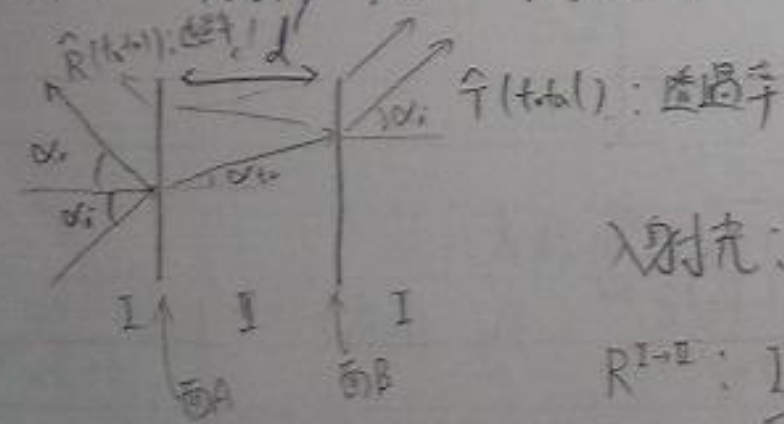
減衰の原因として2つに分けられる

- ① 吸収
- ② 散乱

- ① 吸収 ----- 熱(振動), 化学反応, 冷光がある
- ② 散乱 ----- Rayleigh, Raman, Brillouin 散乱がある
 - ① 散乱する粒子が波長よりも大きい
 - ⇒ 全ての色の光を散乱 - 例: 塩雲, 雪, 霧
 - ② 散乱する粒子が波長よりも小さい
 - ⇒ $\frac{I_{scat}}{I_{inci}} \propto \omega^4$ → 例: 赤い青を多く散乱

Beer's law : 粒子が希薄な場合, 減衰の1/2は粒子の濃度に対応する → $\alpha(\omega) = n_p \alpha_s(\omega)$

3.1.6 Fabry Perot resonator



入射光: coherent length l_c

R^{i-1} : 1/2の光が1/2の境界で反射する
反射率

① 吸収が大きいとき ($\alpha(\omega)d \gg 1$)

多重反射おきない 透過光おきない

$$\rightarrow \hat{R}(\omega) = R(\omega)$$

② 吸収がある程度大きいとき ($1 \leq \alpha(\omega)d \leq 5$)

1回程度の面Bでの反射の影響を考慮.

反射率 $R^{I \rightarrow II} = R^{II \rightarrow I} \equiv R$

③ 吸収の影響が小さいとき ($\alpha(\omega)d \leq 1$)

(i) $d \gg l_c$ のとき
干渉は起らない

$$\hat{T}(\omega) = (1-R)e^{-\alpha d}(1-R) + (1-R)RR(1-R)e^{-3\alpha d} + \dots$$

$$= (1-R)^2 e^{-\alpha d} \sum_{n=0}^{\infty} (R^2 e^{-2\alpha d})^n$$

$$= \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha d}}{1-R^2 e^{-2\alpha d}}$$

$\alpha d \leq 1, R < 1$ のとき
 $\hat{T}(\omega) \approx (1-R)^2 e^{-\alpha d}$

$$\hat{R}(\omega) = R + (1-R)R(1-R)e^{-2\alpha d} + \dots$$

$$= R + R e^{-\alpha d} \frac{(1-R)^2 e^{-\alpha d}}{1-R^2 e^{-2\alpha d}}$$

(ii) $d < l_c$ のとき

干渉が起る (媒質 II 中に 2 種類の波ができて干渉する)

反射率, 透過率ではなく電場の比を t, r とする.

$$\hat{T} = \left| t_F e^{-\frac{\alpha d}{2}} t_B + t_F e^{-\frac{\alpha d}{2}} r_B e^{-\frac{\alpha d}{2}} r_F e^{-\frac{\alpha d}{2}} t_B e^{i k d} e^{i k d} + \dots \right|^2 \quad \text{total}$$

$R = \frac{\omega}{c} n$

$$= |t_F|^2 |t_B|^2 e^{-\alpha d} \left| \frac{1}{1 - r_B r_F e^{-\alpha d + 2i k d}} \right|^2$$

$$= (1-R_F)(1-R_B) e^{-\alpha d} \frac{1}{1 + |r_B r_F|^2 e^{-2\alpha d} - 2r_B r_F e^{-\alpha d} \cos 2k d}$$

$$= \frac{A}{1 + F \sin^2 k d} \quad A = \frac{(1-R_F)(1-R_B) e^{-\alpha d}}{(1-R_\alpha)^2} \quad R_\alpha = \sqrt{R_F R_B} e^{-\alpha d} \quad F = \frac{4R_\alpha}{(1-R_\alpha)^2}$$

$$\hat{R} = \left| -r_F + t_F e^{-\frac{\alpha d}{2}} e^{i k d} r_B e^{-\frac{\alpha d}{2}} e^{i k d} t_F + \dots \right|^2 \quad \textcircled{2} -r_F^{I \rightarrow O} = r_F^{O \rightarrow I}$$

$$= \left| -r_F + t_F^2 (e^{-\frac{\alpha d}{2}} e^{i k d})^2 r_B (1 + r_F r_B e^{-\alpha d + 2i k d} + \dots) \right|^2$$

$$= \frac{|-r_F(1 - r_B r_F e^{-\alpha d + 2i k d}) + r_B t_F^2 e^{-\alpha d + 2i k d}|^2}{|1 - r_B r_F e^{-\alpha d + 2i k d}|^2} \quad r_F + t_F^2 = 1 \text{ (実数)}$$

$$= \frac{B + F \sin^2 k d}{1 + F \sin^2 k d} \quad B = \frac{R_F (1 - R_B / R_F)}{(1 - R_B)^2}$$

→ (簡単化) $R_F = R_B = R, \alpha d = 0$ のとき

$$\hat{T} = \frac{1}{1 + F \sin^2 k d} \quad \hat{R} = \frac{F \sin^2 k d}{1 + F \sin^2 k d} \quad \hat{T} + \hat{R} = 1$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

・ 上の \hat{T}, \hat{R} より $k d = m\pi$ (m : 整数) のとき $\hat{T} = 1$

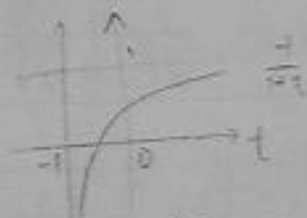
$$\rightarrow \frac{\omega}{c} n d = m\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} n d = m\pi \therefore \frac{\lambda}{n} m = 2d$$

(反射波と透過波の位相関係)

・ 逆に $k d \neq m\pi$ のとき

$$\hat{R} = \frac{F \sin^2 k d}{1 + F \sin^2 k d}$$

$$\hat{T} = \frac{1}{1 + \left(\frac{4R}{(1-R)^2}\right) \sin^2 k d}$$



$$R \ll 1 \text{ かつ } \hat{T} \ll 1$$

特に d が小さいときは \hat{T} は大きい

応用: 電子顕微鏡

3.17 複屈折と二色性

異方性を結晶がもつことによる影響 (こゝでは軸性のみ扱う)

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad \text{と仮定する}$$

Maxwell 方程式から $\nabla \cdot (E \times H) + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + E \cdot J = 0$
 $J = 0$ として $\nabla \cdot (E \times H) + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = 0$
 $L = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t}$

こゝで $\int_V (\nabla \times H) \cdot dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \mu_0 (W_m + W_e) \right) = 0$ となる

$$E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} W_e \quad (W_e = \frac{1}{2} E \cdot D)$$

$$\sum_i E_i \epsilon_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{ij} E_i \epsilon_{ij} E_j \right)$$

$$\therefore \sum_{ij} (\epsilon_{ij} E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} - \epsilon_{ji} \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j) = 0$$

$$\sum_{ij} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} = 0 \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

ϵ は対称テンソル \rightarrow 基底を変換して対角化できる

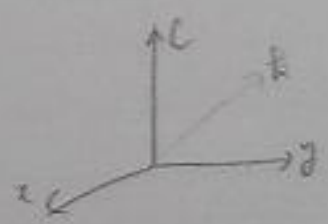
1軸性: $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$

- \hookrightarrow 現れる現象
- ① 複屈折: 偏光方向の違いによる屈折率(実部)の違い
 - ② 二色性: " " 減衰率(虚部) " " 波長域が広いと Polariser として使える
- 結晶の対称性と共鳴の選別則を調べる

① 複屈折

ある波長での現象と他の現象との関係 $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ は言えるが $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{3}$ には波長域が異なる

Maxwell 方程式より $\text{rot}(\text{rot} E) = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$
 $\Rightarrow \text{grad}^2 E - (\text{grad} \cdot E) \text{grad} - \omega^2 \mu_0 D = 0$



$k_i = 0$ とすると $(k_1^2 + k_2^2) E_1 - \frac{\omega^2}{c^2} n_o^2 E_1 = 0$
 $(k_1^2 + k_2^2) E_2 - (k_2 E_2 + k_3 E_3) k_2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_o^2 E_2 = 0$
 $(k_1^2 + k_2^2) E_3 - (k_2 E_2 + k_3 E_3) k_3 - \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2 E_3 = 0$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = n_o^2 \quad \epsilon_{33} = n_e^2 \quad \text{と仮定}$$

$$\begin{cases} (k_1^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2) E_1 = 0 & \text{--- ①} \\ (k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2) E_2 = k_2 k_3 E_3 & \text{--- ②} \\ (k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2) E_3 = k_2 k_3 E_2 & \text{--- ③} \end{cases}$$

①) $E_1 = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} (k_3^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2) & -k_2 k_3 \\ -k_2 k_3 & (k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0$$

$(E_2, E_3) \neq 0$ のとき $(k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2)(k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2) - k_2^2 k_3^2 = 0$

$$\therefore \frac{k_2^2}{n_e^2} + \frac{k_3^2}{n_0^2} - \frac{\omega^2}{c^4} = 0 \quad \text{④ 楕円 : extraordinary}$$

②) $|k|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2$ のとき
L④A

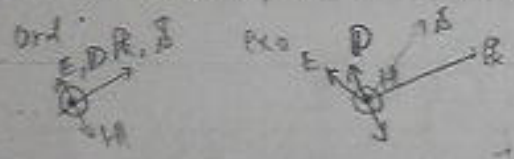
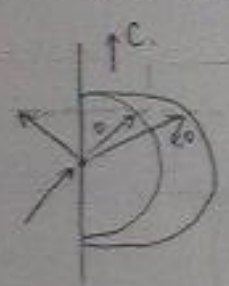
$$\begin{pmatrix} -k_2^2 & -k_2 k_3 \\ -k_2 k_3 & k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(\) = k_2^2 (-k_2^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_e^2 - k_3^2) = k_2^2 \frac{\omega^2}{c^2} (n_e^2 - n_0^2) \neq 0$$

$\therefore E_2 = E_3 = 0$: ordinary

k の方向を決めると、その方向と ④、⑤ の交点が k 、屈折率を決める
特に入射・屈折の場合、波数の保存を使えば求められる

P1



$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

よって $(k \times H) \propto D$

$(n_e > n_0 \text{ (7.4.3)})$
negative-uniaxial

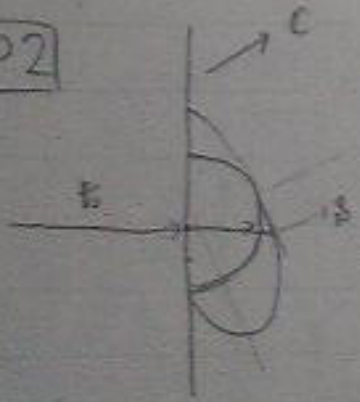
$$\text{よって } S = E \times H = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon^{-1} D \times H$$

$$= \frac{H}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n_e^2} D_2 \\ -\frac{1}{n_0^2} D_2 \end{pmatrix}$$

$$S \propto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n_e^2} k_2 \\ \frac{1}{n_0^2} k_2 \end{pmatrix}$$

$\frac{k_2}{n_e^2} + \frac{k_2}{n_0^2} = 1$ の grad は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{n_e^2} \\ \frac{k_2}{n_0^2} \end{pmatrix} \parallel S$

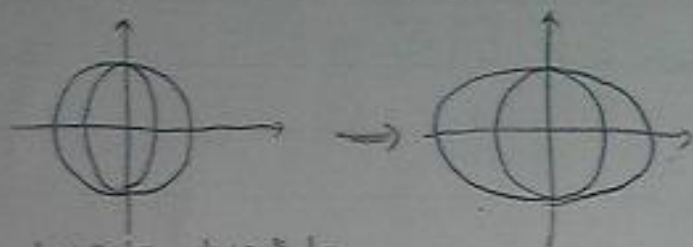
P2



右-効果: E に対して ϵ が異なる

factor " " " " " "

波長で書いた楕円を位相速度の図にするには長軸、短軸を逆数に
 可付けよ。



応用: 半波板, 半波板

3.1.8 光学活性

左右円偏光について位相速度が違う
 吸収については異なる

その構造をもちの+キラリティをもち有機分子が与える物質などに見られる

* ファラデー効果: 静磁場の存在に物質をまくと偏光回転子になる

媒質方程式
$$D = \epsilon E + i\epsilon_0 \xi \omega B$$

$$= \epsilon E + \epsilon_0 \xi \nabla \times E$$

$$E = E_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}$$

$$D = \epsilon E + i\epsilon_0 \xi k \times E$$

$$E = (E_0, \pm iE_0, 0), \quad k = (0, 0, k)$$

$$D = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} E_0 \\ \pm iE_0 \\ 0 \end{pmatrix} + i\xi k \begin{pmatrix} \mp iE_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \epsilon_0 (n^2 \pm \xi k) E_0$$

⇒ 左右円偏光で屈折率が異なる