

バスレフ型スピーカーシステムの力学(2)

バスレフ型スピーカーシステムの運動方程式の導き方

S. Suzuki

2008年5月31日

3. 運動方程式の導き方

前章までで、バスレフ型スピーカーシステムの構造による分類と運動方程式について示した。しかし、バスレフ型スピーカーシステムの運動方程式を導くのは、多少厄介である。難しい訳ではないが、ややこしいため、間違えやすい。公式を導いた本人でさえ、間違ってしまうので、自分のメモという意味も兼ねて文書としてまとめることにした。

3.1 Helmholtz の共鳴箱(Cavity Resonator)の共振周波数の求め方

バスレフ型キャビネットは、Helmholtz の共鳴箱そのものなので、共振周波数の求め方は、物理的な固有振動の周波数を求めるだけである。この方法については、既に、『並列配置型小部屋構造(MCAP)スピーカーシステムの固有振動を求める計算式』の第3章に示してあるが、まとめる意味もあって再掲する。

Helmholtz の共鳴箱の式は、理想気体の状態方程式から導くことができる。理想気体の断熱条件での状態方程式は、(1)式で表される¹。

$$PV^\gamma = \text{constant} \quad (1)$$

ここで、P および V は下記の通りとする。

P : キャビネットの中の気圧 (絶対圧力) [Pa]

V : キャビネットの容積[m³]

γ : 空気の比熱比(無次元)

(1)式から、

$$d(PV^\gamma) = V^\gamma dP + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

両辺を $V^{\gamma-1}$ で割ると

$$V dP + \gamma P dV = 0$$

すなわち、

¹ (1)式は、断熱条件の状態方程式である。しかし、MCAPの場合は、等温条件 ($\gamma=1$) として計算したほうが実測値に近かったため、実際には、等温の式を用いて固有振動数を求めている。断熱条件と等温条件については、文中に記載する。

バスレフ型スピーカーシステムの力学

$$dP = -\frac{\gamma P}{V} dV \quad (2)$$

また、キャビネットを空気ばね、ダクトの中の空気を一塊の質点としたときの、フックの法則は(3)式で表される。

$$dF = -k dx \quad (3)$$

但し、

- k : 空気バネのバネ定数[N/m]
F : ダクト内の空気に働く復元力[N]

ここで

$$\begin{cases} dF = a dP \\ dV = a dx \end{cases} \quad (4)$$

但し、

- a : ダクトの断面積[m²]

となるので、(4)式を(3)式に代入すると

$$dF = -\frac{a\gamma P}{V} dV = -\frac{a^2\gamma P}{V} dx$$

よって、空気のダクトに対するばね定数は次式で表される。

$$k = \frac{\gamma \cdot a^2 P}{V} \quad (5)$$

因みに等温の条件では、空気のばね定数は、下記のようになる。

$$k = \frac{a^2 P}{V} \quad (5)'$$

以上から、シングルバスレフシステムの固有振動数を求めることができ、固有振動の周波数は、次式で表される。空気のばね定数が求められると、ダクト中の空気の質量がわかれば固有振動の周波数が(6)式で求められる。因みに、等温の条件の場合、で求めた(6)'式のようになり、約 18%の差があるのだが、MCAP システムで実測値と比較したところ、等温条件の式で求めたほうが測定値に近かったため、MCAP では等温条件として計算した²。断熱条件と等温条件とでは、(5)式以外は共通であるので、どちらで計算する場合にも補正は簡単である。

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma \cdot a \cdot P}{\rho \cdot l \cdot V}} \quad [\text{Hz}] \quad (6)$$

²元々、Newton は等温の条件で音速を計算していたが、実際の結果と合わなかったため、1816年にLaplace が断熱の式で計算しなおして正しい音速を導き出したということである。しかし、MCAP の計算では、等温の式のほうが明らかに実測に近い計算結果が得られた。

$$f_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a \cdot P}{\rho \cdot l \cdot V}} \quad [\text{Hz}] \quad (6)'$$

但し、

$$m = \rho \cdot a \cdot l$$

m : 各ダクトにおいて一体となって振動する空気の質量[kg]

ρ : 空気の密度[kg/m³]

l : ダクトの相当長さ(ダクトの補正長さ)[m]

3.2 直列配置型バスレフシステムの運動方程式の求め方

(5)式の通り、空気室のばね定数は、ダクトまたは振動板面積の関数になっている。このため、空気室のばね定数を、基準面積に対するばね定数として整理するほうが、一貫性のある式になり分りやすい。このため、ここでは、空気室のばね定数は、基準の面積に対するばね定数として定義している。数式で使用される各記号の定義は、Table3の通りとする。

n 連の直列配置型バスレフシステムの構造は Fig.3 に示した通りである。Fig.3 を見ると、 m_2 から m_{n-1} までの質点に働く力は両隣の空気室のばね定数と質点の変位によって定まることが分る。このため、 j 番目の質点 m_j に働く復元力の総和を求めれば良い。

Fig.3 から、 j 番目の質点とそれに関連する部分を抜き出すと、Fig.6 のようになる。

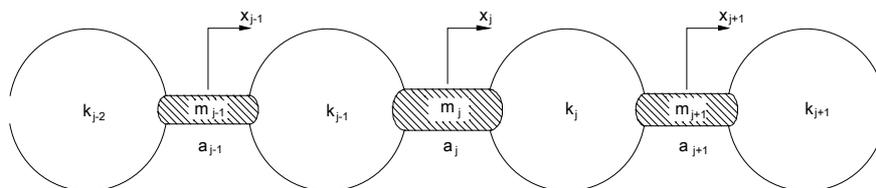


Fig.6

m_j のダクトの断面積は a_j なので、 m_j が基準位置から x_j だけ変位したときに k_{j-1} 側、 k_j 側から働く力を F_{j-1} 、 F_j とすると、それぞれ次式のように現される。このとき、その他の質点の変位はゼロであるとする。

$$F_{j-1} = -k_{j-1} \frac{a_j^2}{a_0^2} x_j = -k_{j-1} r_j^2 x_j$$

$$F_j = -k_j \frac{a_j^2}{a_0^2} x_j = -k_j r_j^2 x_j$$

次に、 m_j の変位をゼロとし、 m_{j-1} 、 m_{j+1} の変位が夫々 x_{j-1} 、 x_{j+1} としたとき、 k_{j-1} 側、 k_j 側

から働く力を F'_{j-1} 、 F'_j とすると、夫々次式のように表される

$$F'_{j-1} = k_{j-1} \frac{a_j^2}{a_0^2} \left(\frac{a_{j-1}}{a_j} x_{j-1} \right) = k_{j-1} \frac{a_{j-1}}{a_0} \frac{a_j}{a_0} x_{j-1} = k_{j-1} r_{j-1} r_j x_{j-1}$$

$$F'_j = k_j \frac{a_j^2}{a_0^2} \left(\frac{a_{j+1}}{a_j} x_{j+1} \right) = k_j \frac{a_j}{a_0} \frac{a_{j+1}}{a_0} x_{j+1} = k_j r_j r_{j+1} x_{j+1}$$

振動の方程式は、線型であり、重合せが可能なので、質点 m_j の運動方程式は、(7)式のように表される。

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + k_{j-1} r_j^2 x_j + k_j r_j^2 x_j - k_{j-1} r_{j-1} r_j x_{j-1} - k_j r_j r_{j+1} x_{j+1} = 0$$

即ち

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} - k_{j-1} r_{j-1} r_j x_{j-1} + (k_{j-1} + k_j) r_j^2 x_j - k_j r_j r_{j+1} x_{j+1} = 0 \tag{7}$$

j 番目の質点についての運動方程式が得られたので、後は両端の質点についての運動方程式を求めれば良い。

Fig.3 から、0、1 番目の質点とそれに関連する部分を抜き出すと、Fig.7 のようになる。

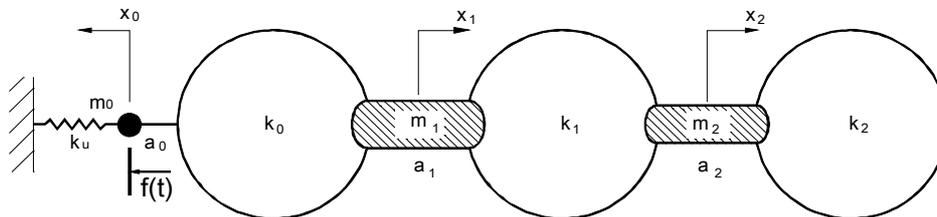


Fig.7

0 番目の質点は、振動板の実効質量であり、これが強制的に加振される部分である。 x_0 の方向が他と逆方向であることに注意し、(7)式を求めたのと同様に、質点 m_0 の運動方程式を導くと、(8)式ようになる。

$$m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} + k_u x_0 + k_0 x_0 + k_0 \frac{a_1}{a_0} x_1 = f(t)$$

即ち

$$m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} + (k_u + k_0) x_0 + k_0 r_1 x_1 = f(t) \tag{8}$$

同様に、質点 m_1 の運動方程式は(9)式ようになる。

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_0 r_1^2 x_1 + k_1 r_1^2 x_1 + k_0 r_1^2 \left(\frac{a_0}{a^1} x_0 \right) - k_1 r_1^2 \left(\frac{a_2}{a_1} x_2 \right) = 0$$

即ち、

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_0 r_1 x_0 + (k_0 + k_1) r_1^2 x_1 - k_1 r_1 r_2 x_2 = 0 \quad (9)$$

残る質点は、 n 番目の m_n であるので、これは、 m_{n+1} が存在しないことに注意して運動方程式を求めると、(10)式のようになる。また、部屋の大きさは各空気室の大きさよりも十分に大きいので、通常は $k_n=0$ である。

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} - k_{n-1} r_{n-1} r_n x_{n-1} + (k_{n-1} + k_n) r_n^2 x_n = 0 \quad (10)$$

式(7)~(10)をまとめると、Table2 に示した通りの n 連の直列配置バスレフ型システムの運動方程式となる。

上記で運動方程式は求められたが、このままよりも行列表現したほうが、分りやすいので、以下に 5 連の直列配置型の場合の運動方程式を行列表現で示す。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (11)$$

但し、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_u + k_0 & k_0 r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 r_1 & (k_0 + k_1) r_1^2 & -k_1 r_1 r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 r_1 r_2 & (k_1 + k_2) r_2^2 & -k_2 r_2 r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 r_2 r_3 & (k_2 + k_3) r_3^2 & -k_3 r_3 r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 r_3 r_4 & (k_3 + k_4) r_4^2 & -k_4 r_4 r_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_4 r_4 r_5 & k_5 r_5^2 \end{bmatrix}$$

シングルバスレフ型及びダブルバスレフ型の運動方程式については、 n 連の直列配置型の運動方程式で、 $n=1$ 及び $n=2$ とするだけなので、ここでは省略する。直列配置型の運動方程式の、質量行列 \mathbf{M} は、対角行列、剛性行列 \mathbf{K} は 3 重対角行列であり、固有値を求めるのは比較的容易である。

Fig.8 において、質点 m_0 に加わる復元力の総和は、(8)式に $k_2 \sim k_n$ による復元力を加算したことになるので、運動方程式は、(12)式のようになる。

$$m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} + (k_u + k_0)x_0 + k_0 r_1 x_1 + k_0 r_2 x_2 + \dots + k_0 r_j x_j + \dots + k_0 r_n x_n = f(t) \quad (12)$$

また、 m_j の運動方程式は、(12)式の着目する質点を m_0 から m_j に変更し、また、 k_j による復元力を考慮すると(13)式で表される。

$$\begin{aligned} & m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + k_0 r_0^2 \left(\frac{a_j}{a_0} x_0 \right) + k_0 r_1^2 \left(\frac{a_j}{a_1} x_1 \right) + \dots \\ & + k_0 r_j^2 \left(\frac{a_j}{a_j} x_j \right) + \dots + k_0 r_n^2 \left(\frac{a_j}{a_n} x_n \right) + k_j r_j^2 \left(\frac{a_j}{a_j} x_n \right) - k_j r_j^2 \left(\frac{a_{n+j}}{a_j} x_{n+j} \right) = 0 \\ & m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + k_0 r_0 r_j x_0 + k_0 r_1 r_j x_1 + \dots + k_0 r_j^2 x_j + \dots + k_0 r_n r_j x_n + k_j r_j^2 x_j - k_j r_j r_{n+j} x_{n+j} = 0 \\ & m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + k_0 r_0 r_j x_0 + k_0 r_1 r_j x_1 + \dots + (k_0 + k_j) r_j^2 x_j + \dots + k_0 r_n r_j x_n - k_j r_j r_{n+j} x_{n+j} = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

また、質点 m_{n+j} の運動方程式は、直列接続型の(10)式において

$$\begin{aligned} x_{n-1} & \rightarrow x_j \\ x_n & \rightarrow x_{n+j} \\ k_{n-1} & \rightarrow k_j \\ r_{n-1} & \rightarrow r_j \end{aligned}$$

と置き換えることにより下記のようになる。

$$m_{n+j} \frac{d^2 x_{n+j}}{dt^2} - k_j r_j r_{n+j} x_j + k_j r_{n+j}^2 x_{n+j} = 0 \quad (14)$$

以上で、並列配置型バスレフスピーカーシステムの運動方程式を導くことができた。

(12)~(14)式を、 $n=3$ について、行列表現すると次式のようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_u + k_0 & k_0 r_1 & k_0 r_2 & k_0 r_3 & 0 & 0 & 0 \\ k_0 r_1 & (k_0 + k_1) r_1^2 & k_0 r_1 r_2 & k_0 r_1 r_3 & -k_1 r_1 r_4 & 0 & 0 \\ k_0 r_2 & k_0 r_1 r_2 & (k_0 + k_2) r_2^2 & k_0 r_2 r_3 & 0 & -k_2 r_2 r_5 & 0 \\ k_0 r_3 & k_0 r_1 r_3 & k_0 r_2 r_3 & (k_0 + k_1) r_2^2 & 0 & 0 & -k_3 r_3 r_6 \\ 0 & -k_1 r_1 r_4 & 0 & 0 & k_1 r_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 r_2 r_5 & 0 & 0 & k_2 r_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 r_3 r_6 & 0 & 0 & k_3 r_6^2 \end{bmatrix}$$

3.4 相互接続バスレフ型システムの運動方程式の求め方

相互接続バスレフ型システムは、組合せが無数にあり、典型例を表すことは難しいが、Fig.5c の例について運動方程式を導いてみる。

Fig.5c では、 $n=2$ の並列配置バスレフ型の副空気室 1 と 2 を接続しただけなので、 m_0 の運動方程式は、(12)式で、 $n=2$ とすれば良い。

m_1 、 m_2 の運動方程式は、夫々

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_0 r_1^2 x_1 + k_0 r_1 r_2 x_2 + k_0 r_1 r_0 x_0 - k_1 r_1 r_3 x_3 - k_1 r_1 r_5 x_5 = 0 \quad (15)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_0 r_2^2 x_2 + k_0 r_2 r_1 x_1 + k_0 r_2 r_0 x_0 - k_2 r_2 r_4 x_4 + k_2 r_2 r_6 x_6 = 0 \quad (16)$$

となる。

m_3 、 m_4 の運動方程式は、夫々

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + k_1 r_3^2 x_3 + k_1 r_3 r_5 x_5 - k_1 r_1 r_3 x_1 = 0 \quad (17)$$

$$m_4 \frac{d^2 x_4}{dt^2} + k_2 r_4^2 x_4 - k_2 r_5 r_4 x_5 - k_2 r_2 r_4 x_2 = 0 \quad (18)$$

となる。

最後に、 m_5 の運動方程式は、下記のようになる。

$$m_5 \frac{d^2 x_5}{dt_2^2} + (k_1 + k_2) r_5^2 x_5 + k_1 r_5^2 \left(\frac{a_3}{a_5} x_3 - \frac{a_1}{a_5} x_1 \right) + k_2 r_5^2 \left(\frac{a_2}{a_5} x_2 - \frac{a_4}{a_5} x_4 \right) = 0$$

式を整理して、

$$m_5 \frac{d^2 x_5}{dt_2^2} + (k_1 + k_2) r_5^2 x_5 + k_1 \frac{a_5^2}{a_0^2} \left(\frac{a_3}{a_5} x_3 - \frac{a_1}{a_5} x_1 \right) + k_2 \frac{a_5^2}{a_0^2} \left(\frac{a_2}{a_5} x_2 - \frac{a_4}{a_5} x_4 \right) = 0$$

$$m_5 \frac{d^2 x_5}{dt_2} + (k_1 + k_2) r_5^2 x_5 + k_1 (r_5 r_3 x_3 - r_5 r_1 x_1) + k_2 (r_5 r_2 x_2 - r_5 r_4 x_4) = 0$$

即ち、

$$m_5 \frac{d^2 x_5}{dt_2} - k_1 r_5 r_1 x_1 + k_2 r_5 r_2 x_2 + k_1 r_5 r_3 x_3 - k_2 r_5 r_4 x_4 + (k_1 + k_2) r_5^2 x_5 = 0 \quad (19)$$

となり、相互接続型の特別な例について運動方程式を導くことができた。このようにひとつひとつの場合において、運動方程式を導くことは可能であるが、Fig.5a のような例の運動方程式を導くには時間がかかり、実用的ではない。また、次元が上がれば上がるほど、数値解の精度が悪くなることに注意する必要がある。

相互接続型バスレフシステムについては、以上のように動作解析は可能なものの、動作が複雑であり、位相管理も難しいため、実用化には、まだしばらく時間が必要であろう。

以上が、バスレフ型スピーカーシステムの基礎式であり、相互接続型以外は、公式として纏まっているので、一般的な動作解析が可能である。

次回以降しばらくは、実際の計算例を紹介する。