Algèbre et analyse tensorielles :

Application aux variétés - géodésiques

Le calcul tensoriel apparaît pour la première fois en 1900 dans un ouvrage de Ricci et Levi-Civita , et semble immédiatement prometteur pour toute la communauté scientifique , tant le nombre d'applications possibles paraît grand. Quelques années plus tard , la relativité s'inspirera largement des méthodes du calcul tensoriel ; puis viendra le développement de la géométrie différentielle , de la mécanique des milieux continus , de la cosmologie , etc...Toutes ces applications ne seront pas traitées dans ce rapport : le lecteur y trouvera cependant les bases de l'algèbre et de l'analyse tensorielle , avec comme application le calcul des opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes. La troisième partie , après avoir introduit sommairement la notion de variété , dégagera quelques propriétés des espaces de Riemann et généralisera le concept de droite dans les espaces euclidiens avec la notion de géodésique , notion qui sera abordée de deux manières différentes et qui conduiront toutes deux à l'établissement de l'équation des géodésiques.

I) Algèbre tensorielle.

1) Généralités.

Nous allons d'abord définir le produit tensoriel de deux espaces avant de généraliser à un nombre quelconque d'espaces , ceci afin de mieux comprendre ce qu'est le produit tensoriel.

a) Produit tensoriel de deux espaces.

Définition : soient deux espaces vectoriels E et F , de dimensions respectives p et q. A tout couple de vecteurs **(x** , **y**) élément de E x F , nous allons faire correspondre un élément noté **x**

$\otimes$ **y** d'un nouvel espace vectoriel , noté $E \otimes F$, à pq dimensions , élément possédant les propriétés suivantes:

i) $\otimes$ est distributive par rapport aux additions vectorielles;

ii) $\otimes$ est associative : si λ est un scalaire , on : $\lambda \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \lambda \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$

iii) si $(\mathbf{x_1}, ...\mathbf{x_p})$ et $(\mathbf{y_1}, ...\mathbf{y_q})$ forment deux bases de E et F , alors les $\mathbf{x_i} \otimes \mathbf{y_j}$ forment une base de $E \otimes F$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées , le nouvel espace ainsi formé est appelé le ***produit tensoriel*** des espaces E et F et ses éléments sont les produits tensoriels des vecteurs de E et F.

b) Expression analytique du produit tensoriel de deux vecteurs

Nous allons à présent étudier comment le produit tensoriel de deux vecteurs de E et F s'exprime dans une base du produit tensoriel des espaces E et F. Pour cela, on considère $(\mathbf{x_1}, ...\mathbf{x_p})$ une base de E , $(\mathbf{y_1}, ...\mathbf{y_q})$ une base de F et $((\mu_{ij})_{i,j})$ la base associé de $E \otimes F$ par iii).Soient maintenant deux vecteurs de E et F **x** et **y**, de composantes contravariantes x^i et y^j ; le produit tensoriel de ces deux vecteurs peut s'écrire dans la base $((\mu_{ij})_{i,j})$en développant ce produit grâce à i) et ii). Nous obtenons alors facilement que les composantes de $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ dans la base choisi sont les $x^i y^j$:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j \mu_{ij}$$

Inversement, si on suppose que ces quantités sont les composantes de $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ dans la base choisie pour $E \otimes F$, alors il est clair que i) et ii) sont vérifiées.Reste à vérifier iii) : pour cela prenons $(\mathbf{u_i})$ et $(\mathbf{v_i})$ deux bases quelconques de E et F ; on peut poser : $\mathbf{x_k} = a_k{}^i \mathbf{u_i}$ et $\mathbf{y_k} = b_k{}^j \mathbf{v_j}$. Par ailleurs , tout élément T de $E \otimes F$ peut se mettre sous la forme $T = t^{ij} \mu_{ij}$ .En remplaçant μ_{ij} par $\mathbf{x_i} \otimes \mathbf{y_j}$ et ces vecteurs par leurs expressions dans les nouvelles bases , on obtient après développement :

$$T = t^{kl} a^i{}_k b^j{}_l \mathbf{u_i} \otimes \mathbf{v_j}$$

Dans le cas particulier où T = 0 , et d'après sa première expression (celle dans la base $(\mu_{ij})_{i,j}$) , on voit clairement que les $\mathbf{x_i} \otimes \mathbf{y_j}$ sont libres et donc qu'ils constituent une base de l'espace produit tensoriel de E et F , ce qui démontre iii).

Ainsi, la seule loi de composition vérifiant i) , ii) et iii) est celle qui à **x** et **y** fait correspondre un élément de $E \otimes F$ dont les composantes sont les $x^i y^j$.

c) Produit tensoriel de plusieurs espaces (généralisation)

La définition énoncée ci-dessus pour deux espaces vectoriels s'étant assez facilement par récurrence à un nombre quelconque d'espaces vectoriels. Pour cela , il suffit de considérer E F comme un espace vectoriel , et en effectuer le produit tensoriel avec un autre espace G (en vertu de ce qui a été dit plus haut , ce produit tensoriel est associatif) pour obtenir l'espace $E \otimes F \otimes G$, et ainsi de suite. Les éléments de ces espaces vectoriels seront désormais appelés ***tenseurs***. Ces définitions préalables étant posées , on va maintenant s'intéresser à des cas particuliers de tenseurs , et notamment les tenseurs affines et surtout euclidiens , qui réapparaîtront dans la dernière partie.

2) Les tenseurs affines.

a) Définition.

Parmi les choix d'espaces vectoriels possibles pour le produit tensoriel , il en est un très particulier qui consiste à choisir un espace E à n dimensions , et à effectuer p fois le produit tensoriel avec lui même. L'espace obtenu est appelé la puissance pième de l'espace E. On peut également le multiplier par son dual E^* .On obtient alors des tenseurs dits affines:

Un tenseur affine relatif à un espace E est un élément d'espace vectoriel obtenu en effectuant le produit tensoriel d'espaces identiques à E ou à son dual E^* , l'ordre devant être précisé.

Si p est la puissance de E dans le produit tensoriel , le tenseur est dit p fois contravariant ; de même si q est la puissance de E^* dans ce produit , le tenseur est dit q fois covariant ; c'est alors un tenseur d'ordre (p+q).

Première propriété : ayant choisi une base de l'espace produit tensoriel , il est assez aisé de voir que tout tenseur affine peut se décomposer en une somme d'au plus n^{p+q-1} produits tensoriels de p+q vecteurs (p+q représentant l'ordre du tenseur et n la dimension de l'espace de départ E).

b) Changement de base.

Afin de faciliter les notations , nous allons d'abord raisonner sur un tenseur d'ordre p , p fois contravariant et établir les relations de changement de base.

Prenons alors $(\mathbf{u_i})$ et $(\mathbf{u'_i})$ deux bases de E , et considérons les bases associées de l'espace produit tensoriel : $\mathbf{u_{i1}} \otimes \mathbf{u_{i2}} ... \otimes \mathbf{u_{ip}}$ et $\mathbf{u'_{i1}} \otimes \mathbf{u_{i2}} ... \otimes \mathbf{u_{ip}}$. Donnons-nous les formules de passage des bases $(\mathbf{u_i})$ et $(\mathbf{u'_i})$:

$$\mathbf{u_i} = A^j_i\, \mathbf{u'_j} \ ; \ \mathbf{u'_j} = A^i_j\, \mathbf{u_i} \ .$$

En évaluant les composantes $t^{i1\,i2\,...ip}$ et $t^{j'1\,j'2\,...j'p}$ d'un tenseur T dans les deux bases mentionnées , et en utilisant les formules de passage , on obtient :

$$t^{i1\,i2\,...ip} = A^{i1}_{j'1}\, A^{i2}_{j'2} \dots A^{ip}_{j'p}\, t^{j'1\,j'2\,...j'p}$$

$$t^{j'1\,j'2\,...j'p} = A^{j'1}_{\ i1}\, A^{j'2}_{\ i2} \dots A^{j'p}_{\ ip}\, t^{i1\,i2\,...ip}$$

On obtiendrait des formules analogues (avec des positions d'indices inversées) si l'on supposait le tenseur p fois covariant , ou en envisageant le cas d'un tenseur l fois contravariant et m fois covariant , avec l + m = p .

On obtient même le résultat plus fort suivant : *pour qu'un système de n p quantités t i1 i2 ...ip attaché à une base donné de la puissance pième de E soit le système des composantes d'un tenseur contravariant , il est nécessaire (nous venons de le voir) et suffisant que ce système se transforme par changement de bases , selon les équations établies ci-dessus.*

c) Algèbre tensorielle affine.

Nous pouvons en effet construire une telle algèbre en définissant les opérations suivantes:

i) ***l'addition tensorielle*** : soient deux tenseurs de même ordre et de même nature (même indice de contravariance et de covariance) ,on définit la somme de ces deux tenseurs par un troisième tenseur de même ordre et de même nature , dont les composantes sont les sommes des composantes des deux premiers tenseurs.

ii) ***la multiplication par un scalaire*** : soit un tenseur T d'ordre p et un scalaire μ ;on définit la multiplication du tenseur T par le scalaire μ par un deuxième tenseur de même ordre p , dont les composantes sont celles de T multipliées par μ.

iii) ***la multiplication tensorielle*** : soient maintenant deux tenseurs d'ordres quelconques p et p' , on définit le tenseur produit par un troisième tenseur d'ordre p + p' , dont les composantes sont les produits des composantes des deux premiers tenseurs.

Munie de ces opérations , la somme directe des espaces vectoriels dont les dimensions sont de plus en plus grandes (et dont les éléments sont des tenseurs affines sont d'ordre (p,q) , où p et q décrivent R+) est une algèbre de dimension infinie , appelée ***algèbre tensorielle affine***.

Cette algèbre est munie d'une loi interne bilinéaire (la multiplication tensorielle) , dont on peut montrer qu'elle n'est pas commutative. On en déduit le résultat suivant :*l'algèbre tensorielle est associative , non-commutative , et de dimension infinie.*

d) Contraction des indices.

Définition : soit T un tenseur mixte , p fois contravariant et q fois covariant. La ***contraction d'un tenseur*** est l'opération qui consiste à choisir un indice de contravariance et un indice de covariance , à les égaler et à sommer par rapport à cet indice répété. On obtient ainsi les composantes d'un tenseur (p-1) fois contravariant et (q-1) fois covariant.

Il existe d'autres propriétés des tenseurs affines , mais intéressons-nous maintenant à un type de tenseur plus particulier que nous retrouverons plus par la suite :

3) Les tenseurs euclidiens

a) Définition et premières propriétés;

Nous considérons à présent le cas où E est un espace vectoriel euclidien. Nous savons dans ce cas que si l'on se donne un vecteur **x** de E , l'application **x -> ϕx : y** -> **x.y** permet de faire correspondre à **x** un élément de E* (on obtient même une *bijection* de E dans E*).On peut donc identifier l'élément de E de composantes x^i dans une base choisie avec l'élément de E* de composantes x^i dans la base duale associée , les relations entre les composantes s'écrivant : $x_i = g_{ij} x^j$.

Finalement , on considérera que *E et son dual sont identiques* , cette remarque permettant de s'affranchir de la distinction faite jusqu'ici entre les tenseurs contravariants , covariants et mixtes.

Ainsi , un même tenseur possède plusieurs composantes selon que l'on considère des composantes contravariantes ou covariantes. Par exemple, considérons le tenseur T suivant :

$$T = \mathbf{x_1} \otimes \mathbf{x_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{x_p}$$

Si $x^i{}_k$ sont les composantes contravariantes de $\mathbf{x_k}$, alors celles de T s'écrivent :

$$t^{i1\, i2 \ldots ip} = x^{i1}{}_1\, x^{i2}{}_2 \ldots x^{ip}{}_p$$

Remplaçons à présent $\mathbf{x_1}$ par la forme linéaire associée de E*.On obtient une autre composante de T :

$$t_{i1}{}^{i2 \ldots ip} = x_{i1\, 1}\, x^{i2}{}_2 \ldots x^{ip}{}_p$$

En écrivant que : $x_{i1\, 1} = g_{i1\, j1}\, x^{j1}{}_1$, on trouve la relation entre deux des composantes de T :

$$t_{i1}{}^{i2 \ldots ip} = g_{i1\, j1}\, t^{i1\, i2 \ldots ip}$$

En étendant cette démonstration par linéarité à un tenseur quelconque (somme de q produits tensoriels), nous arrivons au résultat suivant :

les différentes composantes contravariantes, covariantes ou mixte d'un tenseur euclidien se déduisent les unes des autres par multiplication par g_{ij} ou g^{ij} et sommation , cette opération pouvant être répétée un nombre quelconque de fois.

Tenseurs symétriques et antisymétriques : par définition , un tenseur d'ordre deux est dit symétrique (resp antisymétrique) si le tenseur affine contravariant associé est symétrique : $t^{ij} = t^{ji}$ (resp antisymétrique : $t^{ij} = - t^{ji}$).

Tenseur fondamental : il est induit par l'expression du produit scalaire de deux vecteurs , produit qui est invariant par changement de base et qui s'exprime sous la forme : $\mathbf{x.y} = g_{ij} x^i y^j$.

Ce tenseur est bien sûr symétrique.

b) Algèbre tensorielle euclidienne.

Les opérations d'addition et de multiplication définies pour les tenseurs affines sont a fortiori définies pour des tenseurs euclidiens , ce qui permet de définir l'algèbre tensorielle euclidienne , qui est en fait une sous-algèbre de l'algèbre tensorielle affine.

II. Analyse tensorielle

1) Champ de tenseur

Ayant défini une base en un point M, soit $\varepsilon_{\mathbf{i}}$ (M), on peut en construire un repère rectiligne de **l'espace ponctuel**, géométrique. On peut aussi l'utiliser pour engendrer un espace vectoriel du type $\mathbf{R}^3$**,** qu'on notera $\mathbf{R}^3$ (M). Si une grandeur physique est définie en M, on peut le considérer comme un élément de $\mathbf{R}^3$ (M), même si elle n'est pas de nature géométrique (l'assimilation d'espaces isomorphes à l'un d'entre eux). On peut alors développer cette grandeur en M sur la base $\varepsilon_{\mathbf{i}}$ (M), par exemple le champ magnétique en M pourrait s'écrire sous ma forme : **B** (M) = $B^i \varepsilon_{\mathbf{i}}$ (M).

De même on introduit l'espace dual $\mathbf{R}^{3\,*}$ (M) associé à $\mathbf{R}^3$ (M), ce qui permet de développer toute grandeur tensorielle définie en M, sur la base standard associée à $\varepsilon_{\mathbf{i}}$ (M) .

$$\text{Par exemple : } T = t^{\,i\,j}{}_{k}\, \varepsilon_{\mathbf{i}}(M) \otimes \varepsilon_{\mathbf{j}}(M) \otimes \varepsilon^{*\mathbf{k}}(M)$$

Sachant que la tensorialité est liée au caractère intrinsèque de la grandeur considérée elle suivra les lois de changement de base. Donc si **au même point M** nous définissons une nouvelle base $\mathbf{e_i}$ (M) = $\alpha_i{}^j\, \varepsilon_{\mathbf{j}}$ (M) les composantes de T deviennent :

$$T^{\,I\,J}{}_{K} = \beta^{\,I}{}_{i\,\beta}{}^{J}{}_{j\,\alpha}{}^{k}{}_{K}\, t^{\,i\,j}{}_{k}\ , \text{ avec } [\beta\ ] = [\alpha\ ]^{-1}$$

ce, qui est la définition de tensorialité en M.

Si maintenant la grandeur est intrinsèquement définie en tout point M de l'espace, ou d'un domaine de l'espace, il s'agit d'un **champ de tenseur**. Pour être plus concret, on peut donner comme un exemple la température et le champ magnétique, qu'on peut mesurer ou repérer aux différents points de l'espace qui constituent respectivement un champ scalaire (tenseur d'ordre 0) et un champ vectoriel (tenseur d'ordre 1) : θ (M) et **B** (M)

On peut dès lors développer le champ de tenseur en chaque point de M qur la base définie en ce point :

$$T(M) = t^{ij}{}_{k}(M)\,(\varepsilon_{\mathbf{i}} \otimes \varepsilon_{\mathbf{j}} \otimes \varepsilon^{*\mathbf{k}})_{(M)}\,.$$

Donc si on veut comparer les valeurs T (M) et T (M) du champ en deux points différents, on doit comparer les deux bases définies en ces deux points, par exemple en développant $\varepsilon_{\mathbf{i}}(M_1)$ sur $\varepsilon_{\mathbf{i}}(M_2)$.

2) Coordonnées curvilignes

a) Coordonnées rectilignes

Dans l'espace ordinaire on représente souvent la position d'un point M à l'aide de coordonnée cartésiennes x^{i} (i = 1, 2, 3). Pou cela on choisit une origine O dans l'espace et on définit trois axes rectilignes portant chacun un vecteur de base $\varepsilon_{\mathbf{i}}(O)$.

Le repère ainsi constitué (non nécessairement orthonormé) définit ***les coordonnées rectilignes*** du point M, qui sont les composantes du vecteur géométrique " position de M " : **OM** = $x^{i}\,\varepsilon_{\mathbf{i}}$ (O).

Chaque repère de ce type (trois droites concourantes orientées, munies de vecteurs de base) définit les coordonnées rectilignes pour tout point M.

Notons que pour un système de coordonnées rectilignes donné, il y a bijection entre les points M de l'espace, et les valeurs de la suite (x^{i}). Sans cela ; il y aurait ambiguïté dans la mesure où un point pourrait y avoir plusieurs suites de coordonnées, ou qu'une valeur de la suite serait associée à plusieurs points.

Les lois de transformation entre les coordonnées rectilignes d'un même point sont linéaires. Chaque vecteur de base d'un système est une combinaison linéaire des vecteurs de l'autre, et un changement d'origine correspond à une translation : **OM = OO' + OM** est développé en **OM =** $x^{i}\,\varepsilon_{\mathbf{i}}(O)$ dans le premier repère.

Dans le deuxième repère, M est représenté par :

$$\mathbf{O'M} = x'^{i}\,\varepsilon'_{\mathbf{i}}(O'), \text{ avec } \varepsilon'_{\mathbf{i}}(O') = \theta^{j}{}_{i}\,\varepsilon_{\mathbf{j}}(O),$$

ou inversement $\varepsilon_{\mathbf{j}}(O) = \eta^{i}{}_{j}\,\varepsilon'_{\mathbf{i}}(O')$.

De plus **OO'** = $\chi^{i}\,\varepsilon_{\mathbf{i}}(O)$, d'où on tire les relations linéaires :

$$x'^{i} = \eta^{i}{}_{j}\,(x^{j} - \chi^{j}).$$

Ce type de coordonnées n'est possible utilisé que dans les espaces euclidiens.

b) Coordonnées sphériques

En pratique, on utilise aussi souvent un système de coordonnées u^1, u^2, u^3, appelées ***coordonnées sphériques**,* celles-ci étant généralement notées $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \phi$. Ces coordonnées sont définies à partir d'un repère fixe cartésien de E_3 que l'on note (O, i, j, k). Les coordonnées sphériques sont définies par les relations suivantes :

$$x^1 = r \sin\theta \cos\phi \quad ; x^2 = r \sin\theta \sin\phi \quad ; x^3 = r \cos\theta$$

Les coordonnées rectilignes x^i sont des fonctions $x^i(r, \theta , \phi)$ continûment dérivables par rapport aux coordonnées r, θ , ϕ (sauf pour $x^1 = x^2 = 0$). Le jacobien de transformation est différente de zéro ce qui assure la biunivocité de la correspondance entre un point M et ses coordonnées sphériques. On obtient inversement les relations :

$$r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2} \text{ ; } \phi = \arctan (x^2/x^1) \text{ ; } \theta = \arccos x^3/ [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$$

Les coordonnées sphériques constituent un exemple de système de ***coordonnées curvilignes*** dans l'espace E_3 (valable seulement sur l'espace privé d'une droite).

c) Coordonnées curvilignes

Pour la définition exacte des coordonnées curvilignes on considère un espace ponctuel E_n et un repère (O, $\mathbf{e°_i}$) de cet espace. Soit x^i les coordonnées rectilignes d'un point M de E_n par rapport à ce repère. Un système de coordonnées u^k , k = 1 à n, est obtenu en se donnant n fonctions arbitraires f^i des paramètres u^k telles que : $x^i = f^i (u^1, u^2,.., u^n)$; i = 1 à n

Les fonctions f^i satisfont aux propriétés :

1. Elles sont continûment dérivables jusqu'à un certain ordre supérieur ou égal à 2 (ça implique la permutabilité des dérivations : $\partial_{kl} f^i = \partial_{lk} f^i$). Si on écrit un déplacement infinitésimal **d M** à partir du point M, il correspond à une variation du même ordre pour les x^i : $\mathbf{dM} = dx^i\, \varepsilon_{\mathbf{i}}$.
2. On peut résoudre le système de n équations par rapport aux variables u^k et les exprimer en fonction des x^i : $u^k = g^k (x^1, x^2, \ldots, x^n)$; k = 1 à n

3. Quand les variables u^k varient dans un domaine Δ , les variables x^i varient dans un domaine Δ '. Le jacobien des fonctions $x^i = f^i (u^1, u^2,.., u^n)$

$$D(\partial_k x^i) = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 x^1 \ldots \partial_1 x^n \\ \partial_2 x^1 \ldots \partial_2 x^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial_n x^1 \ldots \partial_n x^n \end{pmatrix} \end{vmatrix}$$

sera supposé différent de zéro dans le domaine Δ ainsi que le jacobien $D(\partial_i u^k)$ des fonctions $u^k = g^k (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ qui est l'inverse du jacobien $D(\partial_k x^i)$.

En général, pour ce type de coordonnées des lignes coordonnées ne sont pas des droites, mais des courbes. Pour cette raison on appelle ces coordonnées u^k les coordonnées curvilignes.

d) Changement de base naturel de coordonnées curvilignes

Dans l'espace dit non-euclidien, pour lequel on ne peut pas définir une base valable dans tout l'espace, on est amené à définir la tensorialité en chaque point, de construire des bases particulières commodes en chaque point séparément. Pour les coordonnées curvilignes la base naturel (ou le repère naturel) est constitué par la suite $\mathbf{e_i}$ (M) = $\partial_{\mathbf{i}}\mathbf{M}$, définie en M par: $\mathbf{dM} = \partial_{\mathbf{i}}\mathbf{M}\, du^i = \mathbf{e_i}\, du^i$.

A chaque système de coordonnées curvilignes u^i et u'^k données par $u^i = u^i (u'^1, u'^2,\ldots, u'^n)$; $u'^k = u'^k (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ sont associées respectivement, en un même point M de E_n, des repères naturels (M, $\mathbf{e_i}$) et (M, $\mathbf{e'_k}$) dont les bases naturels : $\mathbf{e_i} = \partial M/\partial u^i$; $\mathbf{e'^k} = \partial M/\partial u'^k$ sont liées par les relations : $\mathbf{e_i} = A_i'^k\, \mathbf{e_k}$; $\mathbf{e'_k} = A_k^i\, \mathbf{e_i}$. A tout changement de coordonnées curvilignes correspond un changement de base donné par $A_i'^k = \partial u'^k/\partial u^i$; $A_k^i = \partial u^i/\partial u'^k$..

3) Le problème fondamental de l'analyse tensorielle

En physique, l'étude des champs de tenseurs constitue l'essentiel de l'analyse tensorielle. Le tenseur *générique* $T = t^{ijk}\, \varepsilon_{\mathbf{i}} \otimes \varepsilon_{\mathbf{j}} \otimes \varepsilon_{\mathbf{k}}$ de ce champ est une fonction du point M et on le note T(M). Si le tenseur T est une fonction seulement de M, le champ considéré est appelé un champ fixe. Si le tenseur T est dépendent d'un ou plusieurs paramètres α autre que les coordonnées de M, ce champ est variable et on le note T (M,α).

Les différentes opérations algébriques sur les tenseurs T(M) associés à un même point M ne représentent pas des difficultés particulières. La dérivée de T(M) par rapport à un paramètre α conduit à utiliser les résultats classiques relatifs à la dérivation des vecteurs. Par contre, une difficulté nouvelle apparaît quand on cherche à calculer le dérivée d'un tenseur T (M) par rapport aux coordonnées curvilignes.

Pour pouvoir comparer le tenseur T(M) et T(M') on est amené à étudier comment varie un repère naturel, pour un système de coordonnées donné, lorsqu'on passe d'un point M au point infiniment voisin M'.

D'une part, le point M' sera parfaitement défini par rapport à M si on détermine le vecteur **dM** tel que **MM'** = **dM**. Pour des coordonnées curvilignes u^k, la décomposition d'un vecteur élémentaire **dM** est donnée par la relation : $\mathbf{dM} = \partial_{\mathbf{k}}\mathbf{M}\, du^k = \mathbf{e_k}\, du^k$. Les quantités u^k sont les composantes contravariantes du vecteur **dM** sur la base naturel $\mathbf{e_k}$.

D'autre part, les vecteur $\mathbf{e'_i}$ vont pouvoir être déterminés en calculant les variations élémentaires $\mathbf{de_i}$ des vecteurs $\mathbf{e_i}$, par rapport au repère naturel (M, $\mathbf{e_i}$), lorsqu'on passe de M en M', on a alors $\mathbf{e'_i} = \mathbf{e_i} + \mathbf{de_i}$. **Le calcul des vecteurs $\mathbf{de_i}$ reste donc le problème essentiel à résoudre.**

4) les symboles de Christoffel

a) Définition

Pour trouver des vecteurs $\mathbf{de_i}$, on développe $\mathbf{e_i}$ (M') et $\mathbf{e_i}$ (M). En suite on utilise l'intermédiaire de la base fixe ε_i qui a justement le mérite de pouvoir servir en tout point. Nous écrivons :

$$\mathbf{e_i}(M) = \mathbf{a^j_i}(M)\,\varepsilon_j \text{ avec } \mathbf{a^j_i}(M) = (\partial_{\mathbf{i}}\,\mathbf{x^j})_{(M)} = (\partial x^j / \partial u^i)_{(M)}$$

On a de même : $\mathbf{e_i}(M') = \mathbf{a^j_i}(M')\,\varepsilon_j$ **.**

On peut donc calculer la différence :

$$\mathbf{e_i}(M') - \mathbf{e_i}(M) = [\,(\partial_{\mathbf{i}}\,\mathbf{x^j})_{(M')} - (\partial_{\mathbf{i}}\,\mathbf{x^j})_{(M)}]\,\varepsilon_{\mathbf{j}}.$$

Or, l'une des conditions pour que les u^i soient des coordonnées curvilignes, est que les dérivées d'ordre 2 satisfassent au théorème de Schwarz. Nous admettrons donc l'existence de ces dérivées d'ordre 2. On peut donc écrire :

$$(\partial_{\mathbf{i}}\,\mathbf{x^j})_{(M')} - (\partial_{\mathbf{i}}\,\mathbf{x^j})_{(M)} = (\partial_{k\,\partial\,i}\,x^j)_{(M)}\,du^k + O_2$$

Il en résulte: $\mathbf{e_i}(M') - \mathbf{e_i}(M) = [\,(\partial_{k\,\partial\,i}\,x^j)_{(M)}\,du^k + O_{2]}\,\varepsilon_{\mathbf{j}}$, ce qui permet de faire apparaître le terme d'ordre 1 dans cette différence : $\mathbf{de_i} = (\partial_{k\,\partial\,i}\,x^j)_{(M)}\,du^k\,\varepsilon_{\mathbf{j}}$.

On remplace maintenant les vecteurs de la base fixe par leur expression en fonction de la base naturelle en M $\varepsilon_{\mathbf{j}} = (b^l_j)_{(M)}\,\mathbf{e_l}(M)$, avec $(b^l_j)_{(M)} = (\partial u^l/\partial x^j)_{(M)}$.

On a donc $\mathbf{de_i} = (\partial_{k\,\partial\,i}\,x^j)_{(M)}\,(\partial u^l/\partial x^j)_{(M)}\,du^k\,\mathbf{e_l}(M)$.

On peut réécrire cette formule sous la forme :

$$\mathbf{de_i} = \Gamma^{\,j}_{\ i\,k}\,\mathbf{e_j}\,du^k$$

Les coefficients $\Gamma^{\,j}_{\ i\,k}$ sont les coefficients de Christoffel définis, comme les $\mathbf{e_i}$ (M), en chaque point M.

D'où on trouve : $\Gamma^{\,j}_{\ i\,k}(M) = (\partial_{k\partial\,i}\,x^l)_{(M)}\,(\delta_{\,l}\,u^j)_{(M)}$.

En fait, le théorème de Schwarz devant être vérifié, $\partial_k\partial_l\,x^l = \partial_l\,\partial_k\,x^l$, il en résulte que les coefficients de Christoffel sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs :

$$\Gamma^{\,j}_{\ i\,k}(M) = \Gamma^{\,j}_{\ k\,i}(M).$$

D'autre part, on peut poser $\mathbf{de_i} = \omega^{\,j}_{\ i}\,\mathbf{e_j}$, où les $\boldsymbol{\omega}^{\,j}_{\ i}$ désignent les composantes contravariantes de $\mathbf{de_i}$. Ces composantes sont des formes linéaires par rapport au vecteur **dM**, c'est-à-dire des formes linéaires par rapport aux différentielles du^k.

On peut donc écrire : $\omega^{j}_{i} = \Gamma^{j}_{k\,i}\, du^{k}$.

b) Relations entre les coefficients de Christoffel

Dans la suite, on peut aussi présenter quelques relations entre les coefficients de Christoffel. Connaissant l'élément linéaire de l'espace $ds^2 = g_{i\,j}\, du^i du^j$, où $g_{i\,j} = \mathbf{e_i}\,\mathbf{e_j}$ et utilisant les expression au-dessus on trouve la relation

$g_{i\,h}\omega^{h}_{j} + g_{j\,h}\,\omega^{h}_{i} = dg_{i\,j}$.

Cette relation nous conduit à introduire, en même temps que les ω^{j}_{i}, les composantes covariantes $\omega_{j\,i}$ du vecteur $\mathbf{de_i}$ et en même temps que les $\Gamma^{j}_{k\,i}$, les coefficients $\Gamma_{k\,j\,i}$ de du^k dans $\omega_{j\,i}$: $\omega_{j\,i} = \Gamma_{k\,j\,i}\, du^k$

Ces différentes quantités sont liées par les relations :

$$\omega_{j\,i} = g_{j\,h}\,\omega^{h}_{i}\ ;\ \Gamma_{k\,j\,i} = g_{j\,h}\,\Gamma^{h}_{k\,i}\ ;\ \Gamma^{j}_{k\,i} = g^{j\,h}\Gamma_{k\,h\,i}$$

Avec ces notations on peut réécrire la formule $g_{i\,h}\omega^{h}_{j} + g_{j\,h}\,\omega^{h}_{i} = dg_{i\,j}$, comme $\omega_{j\,i} + \omega_{i\,j} = dg_{i\,j}$, ou $\Gamma_{k\,i\,j} + \Gamma_{k\,j\,i} = \partial g_{i\,j} / \partial u^k$

Par permutation circulaire et sachant que $\Gamma_{k\,i\,j} = \Gamma_{j\,i\,k}$, on peut trouver

$\Gamma_{j\,i\,k} + \Gamma_{k\,j\,i} = \partial g_{i\,j} / \partial u^k$

$\Gamma_{k\,j\,i} + \Gamma_{i\,k\,j} = \partial g_{j\,k} / \partial u^i$

$\Gamma_{i\,k\,j} + \Gamma_{j\,i\,k} = \partial g_{k\,i} / \partial u^j$

Finalement, on en déduit la valeur explicite

$$\Gamma_{k\,j\,i} = ½\, [\, \partial g_{i\,j} / \partial u^k + \partial g_{j\,k} / \partial u^i - \partial g_{k\,i} / \partial u^{j]}$$

qui représente ***le symbole de Christoffel de première espèce*** et la valeur $\Gamma^{j}_{k\,i} = g^{j\,h}\,\Gamma_{k\,h\,i}$ qui représente ***le symbole de Christoffel de deuxième espèce***.

Remarque : Il faut noter que les ω^{i}_{i} ou les $\Gamma^{j}_{k\,i}$ ne constituent pas les composantes d'un tenseur.

5) Dérivées covariantes et différentielles absolues

Les calculs tensoriels sont utilisés à la physique pour exprimer précisément des propriétés intrinsèques, ça veut dire indépendantes du système de coordonnées utilisé pour les expliciter. On obtient donc des relations qui seules sont susceptibles d'exprimer une réalité physique.

a) Démonstration de dérivée covaraiante

On peut démontrer ce fait assez facilement. Il suffit de prendre la dérivée le long d'une courbe. La dérivée ordinaire des composantes d'un vecteur le long d'une courbe ne vérifie pas la loi de transformation des composantes d'un tenseur. Par contre, sachant que deux vecteurs devaient être comparés entre eux par la translation le long d'une droite on étudie les *variations des composantes* d'un vecteur lors d'une **translation le long d'une géodésique**, qui est une droite dans l'espace euclidien, on obtient finalement :

$$d\,(v_i\,(du^i/ds)) = (\partial_j v_k - v_i\,\Gamma_{k\,j}^{\,i})\,(du^i/ds)\,(du^k/ds)\,ds$$

où s est l'abscisse d'un point de la droite comptée sur celle-ci à partir d'une origine fixe et v_i sont les composantes covariantes d'un vecteur V.

Les quantités $\nabla_j\,v_k = \partial_j v_k - v_i\,\Gamma_{k\,j}^{\,i}$ sont les composantes covariantes d'un tenseur de seconde ordre qui est appelé la dérivée covariante du vecteur V.

Pour le démontrer, on part des relations de transformations des composantes covariantes d'un vecteur, lorsqu'on passe des coordonnées y^i aux coordonnées y'^k :

$$v'^i = v_r\,\partial\,y^r/\partial\,y'^i = v_r\,\partial_i\,y^r$$

où v'_i représente une composante covariente de **V** dans le système de coordonnées y'^k. On note la dérivation partielle par rapport à y'^i par le symbole ∂_i et on a :

$$\partial_k\,v'^i = \partial_k\,v_r\,\partial_i\,y^r + v_r\,\partial_{ki}\,y^r$$

En utilisant l'expression de la dérivée seconde $\partial_{ki}\,y^r = \Gamma'^{\,s}_{i\,k}\,\partial_s\,y^r - \Gamma^{\,r}_{s\,t}\,\partial_i\,y^s\,\partial_k\,y^t$ (on ne le démontre pas), où les symboles de Christoffel $\Gamma'^{\,s}_{i\,k}$ sont relatifs aux coordonnées y'^k, on peut alors écrire la relation précédent comme :

$$\partial_k\,v'^i = (\partial\,v_r\,/\,\partial\,y^s)\,\partial_i\,y^r\,\partial_k\,y^s + \Gamma'^{\,t}_{i\,k}\,v'_t - \Gamma^{\,t}_{r\,s}v_t\,\partial_i\,y^r\,\partial_k\,y^s$$

Cette dernière expression peut être écrite sous la forme suivante :

$$(\partial\,v'_t\,/\,\partial\,y'^k) - \Gamma'^{\,t}_{i\,k}\,v'_t = ((\partial\,v_r\,/\,\partial\,y^s) - \Gamma^{\,t}_{r\,s}v_t)\,\partial_i\,y^r\,\partial_k\,y^s$$

Cette relation, vérifiant la loi de changement de coordonnées des composantes covariantes d'un tenseur d'ordre deux, montre que les quantités $\nabla_j\,v_k$ sont les **composantes covariantes** d'un tenseur d'ordre deux qui est appelé ***la dérivée covariante*** du vecteur **V**.

Jusqu'à maintenant on a traité la dérivée covariante pour les composantes covariantes. Les **composantes mixtes** du tenseur de dérivée covariante sont données par : $g^{i\,k}\,\nabla_j\,v_k = g^{i\,k}\,\partial_j v_k - v_r\,\Gamma_{k\,j}^{\,r}$. Sachant que $\partial_j\,(g^{ik}\,v_k) = v_k\,\partial_j\,g^{ik} + g^{ik}\,\partial_j\,v_k = \partial_j\,v_i$ et que $\partial_k\,g^{ik} = -\,g^{il}\,\Gamma_{j\,l}^{\,k} - g^{kl}\,\Gamma_{j\,l}^{\,i}$ (ce qu'on trouve à partir des relations entre les symboles de Christoffel et g^{ij}) on peut écrire

$$g^{i\,k}\,\nabla_j\,v_k = \partial_j\,v_i - v_k\,\partial_j\,g^{ik} - g^{ik}\,v^r\,\Gamma_{k\,j}^{\,r} = \partial_j\,v_i + v_k\,g^{kl}\,\Gamma_{j\,l}^{\,i}$$

Les deux derniers termes de cette équation font apparaître les composantes contravariantes v^l du vecteur **V**. Les composantes mixtes du tenseur dérivée covariante $\nabla_j\,v^i$ sont donc données par :

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + v^l \Gamma_{j\,l}^{\,i}.$$

b) Généralisation

Les calculs précédents s'étendent assez facilement à des tenseurs d'ordre quelconque. On va le montrer sur un exemple où on considère les composantes u^r_{st} d'un tenseur de troisième ordre. Soient trois champs de vecteurs uniformes de composantes respectives a_r, b^s, c^t. En formant le produit contracté $u^r_{st}a_r b^s c^t$ on obtient un scalaire dont la variation élémentaire s'écrit :

$$d(u^r_{st}a_r b^s c^t) = (\partial_k u^r_{st}a_r b^s c^t + u^r_{st}b^s c^t\, \partial_k a_r + u^r_{st}a_r c^t \partial_k b^s + u^r_{st}a_r\, b^s \partial_k c^t)\, dy^k$$

Les champs de tenseur étant uniformes, les dérivées covariantes de leurs composantes sont nulles et l'on obtient donc comme une expression de leurs dérivées partielles :

$$\partial_k a_r = a_i\, \Gamma_{k\,r}^{\,i}\,;\ \partial_k b^s = -\, b^i\, \Gamma_{i\,k}^{\,s}\,;\ \partial_k c^t = -\, c^i\, \Gamma_{i\,k}^{\,t}$$

En utilisant la relation précédente donnant la variation élémentaire, il vient :

$$d(u^r_{st}a_r b^s c^t) = (\partial_k u^r_{st} + u^i_{st}\Gamma_{k\,i}^{\,r} - u^r_{it}\, b^i\, \Gamma_{k\,s}^{\,i} - u^r_{si}\, c^i\, \Gamma_{k\,t}^{\,i})\, a_r b^s c^t dy^k$$

Cette relation met en évidence le système tensoriel suivant:

$$\nabla_k u^r_{st} = \partial_k u^r_{st} + u^i_{st}\Gamma_{k\,i}^{\,r} - u^r_{it}\, b^i\, \Gamma_{k\,s}^{\,i} - u^r_{si}\, c^i\, \Gamma_{k\,t}^{\,i}$$

qui généralise les expressions de la dérivée covariante d'un vecteur. Par définition, les quantités $\nabla_k u^r_{st}$ sont les dérivées covariantes des composantes mixtes u^r_{st} du tenseur **U**. Quant aux **propriétés de la dérivée covariante** d'un tenseur ils sont de même que pour le vecteur, ça veut dire la linéarité ($\nabla_k u^r_s v_t = v_t \nabla_k u^r_s + u^r_s \nabla_k v_t$), la permutabilité de la contraction et la dérivation covariante ($\delta_r^{\,t}(\nabla_k u^r_{st}) = \nabla_k(\delta_r^{\,t} u^r_{st})$).

c) Différentielle absolue

Pour trouver la différentielle absolue d'un vecteur on effectue la multiplication contractée de la dérivée covariante d'un vecteur $\nabla_j u^k$ par la différentielle dy^j. On obtient donc la somme suivante :

$$D\, u^k = \nabla_j u^k\, dy^j = (\partial_j u^k + u^i\, \Gamma_{i\,j}^{\,k})\, dy^j$$

qui est appelé la différentielle absolue de la composante contravariante u^k du vecteur **U**. La différentielle absolue du vecteur **U** est noté d**U** et son expression sur un repère naturel est :

$d\mathbf{U} = D\, u^k\, \mathbf{e_k} = (\partial_j u^k + u^i\, \Gamma_{i\,j}^{\,k})\, dy^j\, \mathbf{e_k}$

Les propriétés de la différence absolue :

1. $d\mathbf{U} = du^k\, \mathbf{e_k} + u^k\, d\mathbf{e_k}$

2. $\delta_r^{\ t} (D u^r_{\ st}) = D(\delta_r^{\ t} u^r_{\ st})$

Pour les composantes covariantes on obtient la formule suivante :

$d\mathbf{U} = (du_k - u_j\, \omega^j_{\ k})\, \mathbf{e^k}$

Pour être plus exhaustif on peut mentionner aussi *la dérivée absolue le long d'une courbe* sur laquelle est facile à démontrer le sens physique : $Du^k/dt = d\, u^k/dt + \Gamma_r{}^k{}_s\, u^r\, dy^s/dt$

Pour un système de coordonnées cartésiennes tous les symboles de Christoffel sont nuls et la dérivée absolue coïncide avec la dérivée ordinaire.

On peut généraliser ces résultats sur les tenseurs d'ordre supérieur que 1. Effectuons le produit contracté de la dérivée covariante $\nabla_k u^r_{\ st}$ d'un tenseur par la différentielle dy^k ; on obtient les composantes mixtes, $(Du)^r_{\ st,}$ d'un tenseur d'ordre trois :

$$(Du)^r_{\ st} = \nabla_k u^r_{\ st}\, dy^k$$

Ces composantes sont appelées les **différentielles absolues des composantes $\mathbf{u^r_{\ st}}$** du tenseur **U**. Si on remplace les dérivées covariantes des composantes par leur expression $\nabla_k u^r_{\ st} = \partial_k u^r_{\ st} + u^i_{\ st}\Gamma_k{}^r{}_i - u^r_{\ it}\, b^i\, \Gamma_k{}^i{}_s - u^r_{\ si}\, c^i\, \Gamma_k{}^i{}_t$, on obtient donc

$$(Du)^r_{\ st} = (\partial_k u^r_{\ st} + u^i_{\ st}\Gamma_k{}^r{}_i - u^r_{\ it}\, b^i\, \Gamma_k{}^i{}_s - u^r_{\ si}\, c^i\, \Gamma_k{}^i{}_t)\, dy^k.$$

On a les mêmes propriétés pour les dérivées covariantes et pour les différentielles absolues.

Pour rappeler, on donne l'expression pour la différentielle absolue d'un produit tensoriel $d(\mathbf{U}\otimes \mathbf{V}) = d\mathbf{U}\otimes \mathbf{V} + \mathbf{U}\otimes d\mathbf{V}$, ,ce qui donne $d\mathbf{U} = d(u^{ij}\, \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}) = du^{ij}\, \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j} + u^{ij}\, d\mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j} + u^{ij}\, \mathbf{e_i} \otimes d\mathbf{e_j}$. Cette formule peut être généralisée pour des tenseurs d'ordre quelconque.

6) Opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes

1. Vecteur gradient

Considérons un champ de scalaires défini en chaque point d'un espace ponctuel E_n par une fonction $F(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ des coordonnées curvilignes y^i.

On trouve que les dérivées partielles $\partial_k F$ d'un champ de scalaires sont les composantes covariantes d'un vecteur, parce qu'elle se transforment comme les vecteurs de base ($\mathbf{e_i}$) du repère naturel de E_n. Les dérivées $\partial_k F$ sont donc des quantités covariantes qui constituent les composantes d'un tenseur d'ordre un.

Ce tenseur d'ordre un est appelé le vecteur ***gradient* de F**. Sa décomposition sur la base réciproque est donnée par **grad** $F = \partial_k F\, \mathbf{e_k}$.

Les composantes covariantes du vecteur gradient sont $\mathrm{grad}_k F = \partial_k F$

Les composantes contravariantes $\mathrm{grad}^i F$ sur la base $\mathbf{e_i}$ sont données par $\mathrm{grad}^i F = g^{ik} \partial_k F$

2. Rotationnel d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs **V** de composantes covariantes v_i. La dérivée covariante du vecteur **V** a pour composantes covariantes les quantités données par : $D_j v_i = \partial_j v_i - v_k \Gamma^k_{ij}$.

On peut en déduire $D_j v_i - D_i v_j = \partial_j v_i - \partial_i v_j$ qui représente les composantes d'un nouveau tenseur appelé *tenseur rotationnel* du vecteur V.

C'est un tenseur antisymétrique et on a : $\mathbf{rot\ V} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)\, \mathbf{e_i} \otimes \mathbf{e_j}$

3.Divergence d'un champ de vecteurs

Considérons un champ de vecteurs **V** dont la dérivée covariante est $\nabla_k v^i$. Par contraction du tenseur $\nabla_k v^i$ on obtient un scalaire $\nabla_i v^i$ appelé ***divergence*** **du vecteur V**.

$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = \nabla_i v^i$$

On reprend l'expression de dérivée covariante $\nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma^i_{kj}$ et on trouve l'expression de la divergence sous forme :

$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = \partial_i v^i + v^j \Gamma^i_{ij}$$

Si l'on prend, en plus, l'expression du symbole de Christoffel contracté Γ^i_{ij}, donnée par la relation : $\Gamma^i_{ij} = 1/(2g)\, \partial_k g = 1/(|g|)^{1/2} \partial_k (|g|)^{1/2}$, on peut écrire

$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = \partial_i v^i + v^i\, 1/(|g|)^{1/2} \partial_i (|g|)^{1/2}$$

Cette dernière expression peut être transformée à l'aide de relation : $(1/a)\, d(ba) = db + (b/a)da$ en

$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = 1/(|g|)^{1/2} \partial_i (v^i (|g|)^{1/2})$$

4. Laplacien d'un champ de scalaires

Le **laplacien** d'un champ de scalaires défini par une fonction $F(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ à valeurs scalaires est donné par : $\Delta F = \mathrm{div}\ \mathbf{grad}\ F$

A partir des définitions de la divergence et des composantes contravariantes du gradient $g^{ik} \partial_k F$ on peut obtenir deux expressions du laplacien possibles :

$\Delta F = g^{ik}(\partial_{ik} F - \Gamma^{l}_{ik}\,\partial_l F)$ ou $\Delta F = 1/(|g|)^{1/2}\,\partial_i((|g|)^{1/2} g^{ik}\partial_k F)$

Remarque : Pour un système de coordonnées orthonormées, $g^{ik} = \delta^{ik}$, on retrouve l'expression classique du laplacien : $F = \partial_{kk} F$

Calcul : On peut essayer de calculer le laplacien d'une fonction F en coordonnées sphériques :

On introduit un système de coordonnées locales :

$$y^1 = r\ ;\ y^2 = \theta\ ;\ y^3 = \phi\ ;$$

grad F a pour composantes : $\partial_1 F = \partial F / \partial r$, $\partial_2 F = \partial F / \partial \theta$, $\partial_3 F = \partial F / \partial \phi$.

En connaissant le tenseur conjugué : $g^{11}=g^{rr} = 1$, $g^{22}=g\theta\,\theta = 1/r^2$, $g^{33}=g\phi\,\phi = 1/(r^2\sin^2\theta)$

On déduit les composantes contravariantes correspondantes $g^{ij}\,\partial_j F$:

$grad^1 F = \partial F / \partial r$; $grad^2 F = (1/r^2)\,\partial F / \partial \theta$; $grad^3 F = (1/(r^2\sin^2\theta))\,\partial F / \partial \phi$;

On peut alors sachant que $(|g|)^{1/2} = r^2\sin^2\theta$ écrire :

$$\Delta F = (1/ r^2\sin^2\theta)\ [\ (\partial / \partial r)(r^2\sin^2\theta\,(\partial F / \partial r)) + (\partial / \partial \theta)(r^2\sin^2\theta\,(1/r^2)\,(\partial F / \partial \theta)) + (\partial / \partial \phi)(r^2\sin^2\theta\,(1/(r^2\sin^2\theta))\,(\partial F / \partial \phi))] =$$

$$1/ (r^2\sin^2\theta)[(\partial/ \partial r\,(r^2\sin^2\theta\,(\partial F/\partial r))) + (\partial/\partial\theta\,(r^2\sin^2\theta\,(1/r^2)(\partial F/\partial\theta))) + (\partial/\partial f\,(r^2\sin^2\theta\,(1/(r^2\sin^2\theta))(\partial F/\partial\phi)))]$$

$$= \partial^2F/\partial r^2 + (\partial F/\partial r)(2/r) + (1/r^2)(\partial F^2/\partial\theta^2) + (2\sin\theta\cos\theta / (r^2\sin^2\theta))(\partial F/\partial\theta) + (1/(r^2\sin^2\theta))(\partial^2F/\partial\phi^2)$$

$$= \partial^2F/\partial r^2 + (\partial F/\partial r)(2/r) + (1/r^2)(\partial F^2/\partial\theta^2) + (2/ (r^2\tan\theta))(\partial F/\partial\theta) + 1/(r^2\sin^2\theta)(\partial^2F/\partial\phi^2)\phi$$

On obtient donc les résultats bien connus des physiciens….

III) Variétés et espaces de Riemann.

1) Notion de variétés.

On peut définir la notion de ***variétés*** de plusieurs manières selon que l'on se place du point de vue du physicien ou du mathématicien. Une première définition (physique) possible serait la suivante :

une variété est un *ensemble de points situé dans un espace préexistant*. Mais on peut aussi définir une variété in abstracto , c'est alors *un espace de points à n dimensions , représenté par un ensemble de coordonnées u i.*

exemple de variété : de manière générale , une surface (sphère , tore , paraboloïde hyperbolique , etc...) est une variété à deux dimensions.

2) Espaces de Riemann.

a) Définition

Définition: un ***espace de Riemann*** est une variété munie d'une métrique.Ceci signifie que dans chaque partie de la variété , représentée comme on l'a dit par un système de coordonnées u^i , on s'est donné une forme différentielle quadratique :

$$ds^2 = g_{ij} u^i u^j$$

qui constitue la métrique de l'espace. Les coefficients g_{ij} doivent en outre vérifier les relations suivantes :

i) ils sont *symétriques* par rapport aux indices i et j : $g_{ij} = g_{ji}$

ii) le *déterminant* de la matrice $[g_{ij}]$ est *non nul*;

iii) la forme différentielle que l'on s'est donné (et de ce fait la notion de distance) est *invariante* par changement de coordonnées;

iv) les g_{ij} sont de *classes* C^2

La métrique ainsi définie est dite *riemannienne*. Si elle est définie positive , l'espace est dit *proprement riemannien*.

A ce stade, on peut s'interroger sur la distinction entre une métrique riemannienne et une métrique euclidienne. En fait , tout espace euclidien admet des BON telles que $g_{ij} = \delta_{ij}$. On dira alors qu'une métrique d'un espace est euclidienne lorsque tout tenseur fondamental de cet espace peut s'écrire par changement de base , sous la forme ci-dessus. On voit ici que les espaces euclidiens sont donc des *cas particuliers* d'espaces riemanniens.

Nous allons maintenant établir des propriétés des espaces riemanniens , en essayant de généraliser celles des espaces euclidiens. Pour cela , l'idée la plus naturelle consiste à identifier localement, lorsque c'est possible, l'espace de Riemann considéré avec un espace euclidien.

b) Métrique euclidienne tangente en un point et propriétés géométriques

Considérons un espace de Riemann Rn dont la métrique donnée par :

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

est définie positive. Soit alors M_0 un point de cet espace de coordonnées $(u^i)_0$.

On appelle ***métrique euclidienne tangente*** à la métrique définie précédemment , au point M_0 , la métrique définie par :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j$$

construite avec le même système de coordonnées (u^i) et telle que $(\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0$.

Une manière simple de trouver une telle métrique consiste à choisir les éléments γ_{ij} constants.

Dans ce cas , l'élément linéaire peut se ramener à une somme de carrés de la forme $d\sigma^2 = dy^i dy^j$,

ceci grâce à deux changements de variables : $u^i = a_k{}^i x^k$ qui ramène le tenseur γ_{ij} à une forme diagonale et $y^i = (a^i{}_i)1/2\, x^i$

Changement de coordonnées : passons à présent des coordonnées u^i aux coordonnées v^i.Notons

$\gamma_{ij} = (g_{ij})_0$ et $\gamma'_{kl} = (g'_{kl})_0$ les composantes du tenseur fondamental euclidien tangent dans ces deux systèmes de coordonnées. L'application des formules de transformation des composantes covariantes d'un tenseur donne :

$$\gamma_{ij} = (\partial_i v^k)_0 (\partial_j v^l)_0 (g'_{kl})_0$$

Pour pouvoir étendre les propriétés des espaces euclidiens aux espaces riemanniens , il faut que la notion de métrique euclidienne tangente soit indépendante du système de coordonnées utilisé. On est donc amené à faire la convention que les coefficients g_{ij} de la métrique d'un espace de Riemann se transforment , par changement de coordonnées , comme les composantes covariantes d'un tenseur:

$$g_{ij} = \partial_i v^k \partial_j v^l g'_{kl}$$

Cette convention étant posé , on dit que la notion de métrique euclidienne tangente a la caractère intrinsèque.

Espace euclidien tangent en un point : munir l'espace de Riemann d'un métrique euclidienne en M0 revient à dire que l'on a construit une représentation de l'espace de Riemann sur l'espace euclidien.

Mais comme il existe a priori plusieurs espaces euclidiens tangents en un point donné , on ne pourra s'intéresser qu'aux propriétés géométriques vérifiées par tous les espaces euclidiens.

Propriétés géométriques déduites des métriques euclidiennes tangentes.

A un point M de l'espace riemannien , on va faire correspondre un point m de l'espace euclidien tangent que l'on supposera rapporté à son repère naturel (m , $\mathbf{e}_i$). On dira que l'on définit un vecteur **v** de l'espace de Riemann en M en se donnant les composantes d'un vecteur au point m par rapport au repère naturel. Ceci permet de définir un champ de vecteur ou de tenseur dans l'espace de Riemann. On peut alors transposer toutes les propriétés algébriques des vecteurs euclidiens aux vecteurs d'un espace de Riemann:

le *produit scalaire* de deux vecteurs **v** et **w** d'un tel espace , de composantes respectives v^i et w^i , est donné par : $\mathbf{v}.\mathbf{w} = g_{ij} v^i w^j$

la *longueur s d'un arc de courbe* est donnée par :

$s = \int (g_{ij} du^i du^j)1/2$

Cette formule sera le point de départ de l'établissement de l'équation des *géodésiques*...

Mais malgré la possibilité d'étendre ces propriétés géométriques aux espaces riemanniens , on ne peut pas encore comparer des tenseurs attachés à deux points distincts de ces espaces. La notion de dérivée nous manque donc encore , et cela justifie la définition d'une nouvelle notion , celle d'espace euclidien osculateur.

c) Métrique euclidienne osculatrice et propriétés différentielles.

métrique euclidienne osculatrice *au point M0 à la métrique riemannienne* : c'est la métrique

définie par:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j$$

telle que les coefficients γ_{ij} , ainsi que leurs dérivées partielles premières , ont en M_0 les mêmes valeurs que ceux de l'élément linéaire de l'espace riemannien. (g_{ij}).

Nous allons démontrer que de telles métriques existent. Pour cela , on considère l'espace euclidien rapporté à un repère naturel cartésien (O , $\mathbf{e}_i$) , où les vecteurs $\mathbf{e}_i$ sont définis par les relations:

$$\mathbf{e}_i . \mathbf{e}_j = (g_{ij})_0$$

D'autre part , il nous faut un système de coordonnées u^i de l'espace euclidien qui permettent de vérifier l'égalité des coefficients γ_{ij} avec g_{ij} , ainsi que celles entre leurs dérivées premières. Pour cela, on peut prendre (par exemple) :

$$x^i = (u^i - u_0{}^i) + (1/2) (\Gamma_l{}^i{}_m)_0 (u^l - u_0{}^l) (u^m - u_0{}^m)$$

Soit M un point de l'espace euclidien , de coordonnées x^i ;on a alors :

$$(\partial \mathbf{M}/dx^i)_0 = (\partial \mathbf{M}/du^i)_0 = \mathbf{e_i}$$

On a aussi : $\mathbf{e_i} . \mathbf{e_j} = (\gamma_{ij})_0 = (g_{ij})_0$

Ainsi que: $\partial_{jk} \mathbf{M} = \partial_j \mathbf{e_k} = \Gamma_j{}^l{}_k \mathbf{e_l}$

ce qui s'écrit en $u^i = u_0{}^i$: $(\partial_{jk} \mathbf{M})_0 = (\partial_j \mathbf{e_k})_0 = (\Gamma_j{}^l{}_k)_0 \mathbf{e_l}$

On peut aussi définir les *coefficients de Christoffel* ($\Gamma^*{}_j{}^l{}_k$) dérivant des γ_{ij} ;on obtient également : $(\partial_{jk} M)_0 = (\Gamma^*{}_j{}^l{}_k)_0 \mathbf{e_l}$

On déduit alors l'égalité des symboles de Christoffel de deuxième espèce , puis de première espèce.

Ceci nous donne finalement : $(\partial_k g_{ij})_0 = (\partial_k \gamma_{ij})_0$, et achève la démonstration.

La notion de métrique euclidienne osculatrice a également le *caractère intrinsèque*.

Espace euclidien osculateur : comme on l'a fait pour l'espace euclidien tangent , on parlera d'espace euclidien osculateur au lieu de métrique. Les propriétés de ce dernier espace seront aussi celles de l'espace de Riemann , ce qui permet de définir la différentielle absolue des vecteurs et tenseurs dans cet espace.

d) Champ de tenseurs et différentielle absolue.

champ de tenseur dans un espace riemannien : en tout point M d'un tel espace , on fait correspondre un repère (m , $\mathbf{e_i}$) dans l'espace euclidien osculateur , compatible avec la métrique riemannienne en M. Cela permet de se donner les composantes d'un tenseur dans ce repère. La donnée de ces composantes en tout point M constitue la donnée du ***champ de tenseurs*** (par exemple , la donnée des g_{ij} d'un espace de Riemann constituent les composantes covariantes d'un champ de tenseurs).

Différentielle absolue : considérons un champ de vecteurs **V** attaché au point M_0 d'un espace de Riemann. La différentielle absolue de leurs composantes contravariantes v^i , dans l'espace euclidien osculateur , par rapport au repère naturel ,en M_0 est :

$$(Dv^i)_0 = (dv^i)_0 + (w_j{}^i)_0 v_0{}^j$$

avec $(w_j{}^i)_0 = (\Gamma^*{}_k{}^i{}_j)_0 du^k$. Ces derniers symboles de Christoffel sont ceux de l'espace euclidien osculateur , et ils sont égaux à ceux calculés dans la métrique riemannienne en $u^i = u_0{}^i$.

Ceci conduit à une extension de la notion de différentielle absolue dans les espaces de Riemann :

la différentielle absolue d'un vecteur **V** aura par définition pour composantes contravariantes :

$Dv^i = dv^i + w_j{}^i v^j = dv^i + \Gamma_k{}^i{}_j v^j du^k$

et elle aura pour composantes covariantes :

$$Dv_i = dv_i - w_i{}^j v_j$$

<u>Dérivée covariante</u> : cette notion se généralise de la même façon ; les quantités :

$$\nabla_k v^i = d_k v^i + \Gamma_k i_j v^j$$

sont les composantes covariantes du tenseur dérivée covariante.

Les formules donnant la différentielle absolue et la dérivée covariante des tenseurs euclidiens se généralisent de la même façon aux tenseurs riemanniens.

3) L'équation des géodésiques.

Les géodésiques sont la généralisation dans les espaces de Riemann des droites dans les espaces euclidiens. On peut les définir de deux manières différentes , mais équivalentes : ce sont tout d'abord les *courbes qui réalisent les extrémales de la longueur des arcs de courbes joignant deux points donnés de l'espace*. Mais on peut aussi les définir par des considérations cinématiques : pour cela , on considère un point mobile M qui se déplace en fonction d'un paramètre t (que l'on assimilera au temps). Ce point décrira une géodésique si son mouvement se fait à *accélération nulle* (on retrouve ici les droites dans les espaces euclidiens).

Nous allons dans un premier temps établir l'équation des géodésiques en écrivant l'accélération du point mobile (approche cinématique). Puis nous rétablirons cette équation à partir de la longueur d'un arc de courbe (établie précédemment) , pour constater que les deux approches sont effectivement équivalentes.

approche cinématique: le vecteur vitesse **V** du point M a pour composantes contravariantes :

$$v^i = du^i / dt$$

Quant au vecteur accélération , ses composantes contravariantes s'exprime grâce à la différentielle absolue: $a^i = Dv^i / dt = 0$ pour les géodésiques.

Mais nous avons vu que : $Dv^i = dv^i + w_j{}^i v^j = dv^i + \Gamma_k{}^i{}_j v^j du^k$

On en déduit :

$$d^2u^i / dt^2 + \Gamma_k{}^i{}_j (du^j / dt)(du^k / dt) = 0$$

approche en terme d'extrémale de longueur : nous avons vu que la longueur d'un arc de courbe joignant deux points d'un espace de Riemann s'exprime par:

$$s = \int (g_{ij} du^i du^j)1/2 = \int F (u^i , du^i / dt , t) = \int ds$$

Une condition nécessaire d'extremum de s est que F doit vérifier les *équations d'Euler-Lagrange* :

$$d/dt (dF/du'^i) - dF / du^i = 0$$

Effectuant la dérivation , on obtient alors (les g_{ij} étant symétriques) :

$$d/dt (g_{ij} u'^j / F) - (1/2F) u'^j u'^k d/du^i (g_{jk}) = 0$$

Le paramètre t étant arbitraire , on peut prendre t = s. Dans ce cas , on a bien sûr F = 1 et :

$$d/ds (g_{ij} du^j /ds) - (1/2) (du^j /ds)(du^k /ds) d_i (g_{jk}) = 0$$

$$g_{ij} d^2u\, j /ds^2 + (du^j /ds)(d g_{ij} /ds) - (1/2) (du^j /ds)(du^k /ds) d_i (g_{jk}) = 0$$

Or , on a : $d g_{ij} /ds = d_k g_{ij} du^k /ds$, d'où :

$$g_{ij} d^2u^j /ds^2 + (d_k g_{ij} - (1/2) d_i g_{jk})(du^j /ds)(du^k /ds) = 0$$

Mais par symétrie des rôles joués par j et k , on a :

$$d_k g_{ij} = (1/2)(d_k g_{ij} + d_j g_{ik})$$

On en déduit : $g_{ij} d^2u^j /ds^2 + (1/2)(d_k g_{ij} + d_j g_{ik} - d_i g_{jk})(du^j /ds)(du^k /ds) = 0$

Et, par définition des symboles de Christoffel Γ_{jik} :

$$g_{ij} d^2u^j /ds^2 + \Gamma_{jik} (du^j /ds)(du^k /ds) = 0$$

On multiplie finalement par g^{ri} pour obtenir (en utilisant en outre la relation $\Gamma_k{}^j{}_i = g^{jh} \Gamma_{khi}$) :

$$d^2u^r /ds^2 + \Gamma_j{}^r{}_k u'^j u'^k = 0$$

On retrouve ainsi l'équation établie plus haut par l'approche cinématique.

I) Algèbre tensorielle. *

1) Généralités. *

*a) Produit tensoriel de deux espaces. **