



# **TTL Mécanique céleste**

## **Détermination des éléments d'une orbite – application au calcul d'éphémérides.**

*Présenté par*

**Petra Pechova  
&  
Sébastien Procureur**

Encadrant : Claude Lamoureux

## I. Introduction.

Lors de la découverte d'un nouvel astre – comète, planète, astéroïde – il est important de pouvoir établir rapidement les caractéristiques de sa trajectoire afin de pouvoir le localiser pour de nouvelles observations. C'est surtout le cas de comètes ou astéroïdes, pour lesquelles la magnitude peut décroître dans les semaines qui suivent sa découverte, le rendant ainsi introuvable. Les calculs de trajectoire permettent également d'identifier le retour périodique d'une comète, ou de localiser les planètes pour les astronomes en quête d'observations. Bref, il s'agit d'un élément essentiel de l'astronomie observationnelle.

Nous allons présenter ici l'une des principales méthodes de détermination des éléments d'une orbite elliptique, méthode que l'on doit au mathématicien allemand Gauss. A l'origine, cette méthode se fondait essentiellement sur des approximations successives et des calculs numériques simples, faute d'outils puissants. Nous verrons que le développement de l'informatique permet aujourd'hui de s'affranchir de ses approximations, en utilisant des logiciels de résolution performants. Nous appliquerons alors cette méthode à la détermination des éléments de Jupiter. Munis de ces résultats, nous présenterons – et appliquerons - la méthode qui permet de calculer les éphémérides de la planète.

## **II. Les systèmes de coordonnées en astronomie de position.**

Il existe en astronomie de position un certain nombre de systèmes de repérages, plus ou moins adapté à l'observation ou au calcul d'éphémérides. Nous allons présenter ici les quatre principaux, en les introduisant dans un ordre « naturel » pour un observateur.

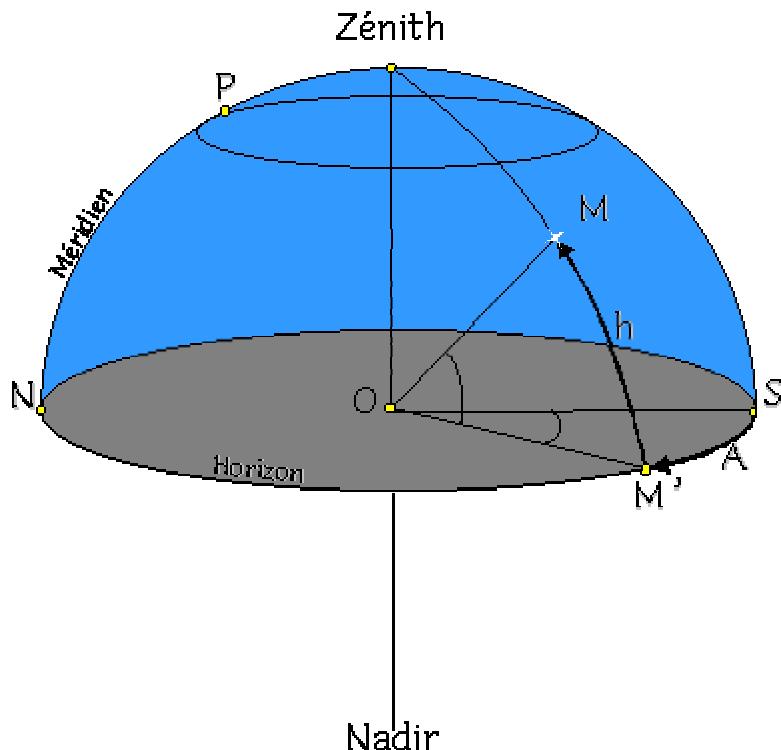
### **1) Système de coordonnées azimutales .**

Il s'agit du système de repérage le plus immédiat. Il utilise le plan horizontal pour un observateur au centre de la sphère céleste, ainsi que la verticale en ce point. On définit alors :

- l'horizon comme le cercle intersection du plan horizontal avec la sphère céleste ;
- le zénith comme le point intersection de la verticale avec la sphère céleste, et situé au-dessus de l'observateur (le point diamétralement opposé est appelé le nadir) ;
- le plan méridien du lieu d'observation comme le plan passant par le zénith – et le nadir – contenant la direction nord-sud.

On repère alors un point M de la sphère céleste –étoiles, planètes ou tout autre corps – au moyen de deux coordonnées angulaires : sa hauteur apparente  $h$  au-dessus de l'horizon et l'angle que fait par rapport à la direction du sud, la droite joignant le centre de la sphère céleste à la projection de M sur le plan horizontal. Ce dernier angle est appelé l'azimut a du point M ; il varie de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ , et est compté positivement vers l'ouest.  $h$ , lui varie de  $-90^\circ$  à  $90^\circ$ , et est compté positivement vers le nord.

Ce système de repérage, bien que très naturel pour un observateur, est finalement très peu utilisé pour la raison suivante : a et h sont des fonctions (parfois compliquées !) du temps, et dépendent en plus du lieu d'observation. Il est donc très malaisé d'employer ces coordonnées dans les tables d'éphémérides. On va donc essayer , par étapes, d'introduire des coordonnées qui ne sont plus fonctions du temps – ie indépendantes de la rotation de la Terre.



## 2) Système de coordonnées horaires.

Ce système privilégie l'axe de rotation de la Terre sur elle-même. On définit alors :

- l'équateur céleste comme le cercle intersection du plan perpendiculaire à cet axe avec la sphère céleste ;
- les pôles nord et sud comme les points intersection de l'axe de rotation de la Terre avec la sphère céleste ;
- le méridien du lieu comme le demi-cercle passant par les pôles et par le zénith.

On repère alors un point M de la sphère par sa hauteur apparente par rapport à l'équateur céleste, ainsi que par l'angle, mesuré dans l'équateur céleste, entre le méridien et la projection de M sur cet équateur. Ces angles sont appelés respectivement déclinaison et angle horaire. La déclinaison varie entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ , et est comptée positivement vers le pôle nord. L'angle horaire varie de 0 à 24h – l'équateur étant alors gradué de 0 à 24h –, et est comptée positivement vers l'ouest.

On voit tout de suite que la déclinaison de M reste invariable pour une étoile fixe, puisqu'elle décrit un petit cercle parallèle à l'équateur céleste. Il n'en va pas de même pour l'angle horaire qui, comme l'azimut, est une fonction du temps. D'où l'introduction des coordonnées équatoriales, sur lesquelles la rotation de la Terre ne joue cette fois plus aucun rôle.

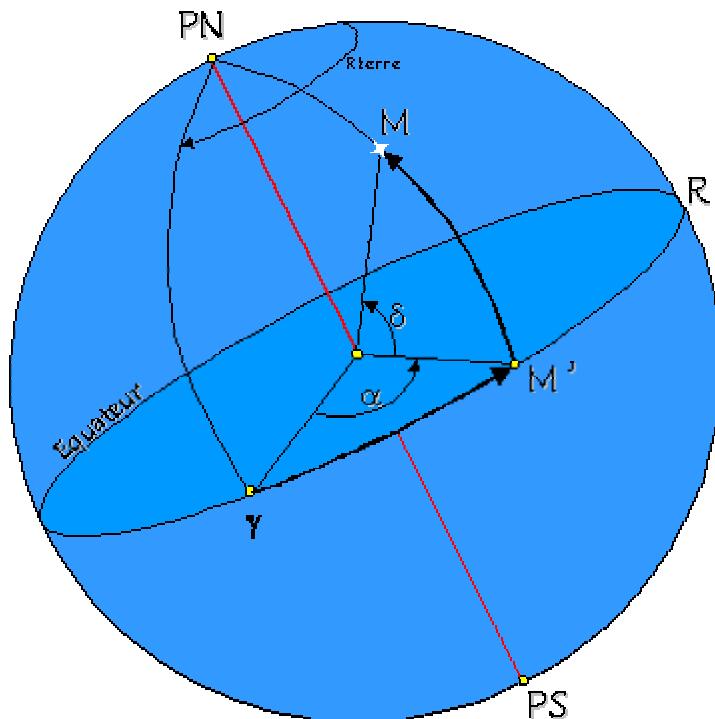
## 3) Système de coordonnées équatoriales.

On garde ici les mêmes éléments que dans le paragraphe précédent, mais on introduit en plus un point appartenant à l'équateur céleste, immobile dans la sphère des fixes, et appelé point vernal. C'est en fait le point où se trouve le Soleil à l'équinoxe de Printemps. Un point M est alors repéré par sa déclinaison – c'est le même angle que précédemment – et par l'angle,

toujours mesuré dans l'équateur céleste, entre la projection de M et le point vernal. Cet angle est appelé l'ascension droite de M ; il varie entre 0 et 24h, et est compté positivement vers l'est.

Ce dernier système répond aux exigences que nous nous étions fixées sur l'invariance dans le temps des coordonnées du point M, ou plus exactement sur l'indépendance de ces coordonnées avec la rotation de la Terre .

A ce stade, on pourrait penser que l'on a terminé de décrire les principaux systèmes de repérages. Il se trouve qu'en pratique, on utilise parfois un quatrième système de repérage, lié non plus à la rotation de la Terre sur elle-même, mais à la rotation de la Terre autour du Soleil.



#### **4) Système de coordonnées écliptiques.**

On privilégie dans ce système le plan contenant le Soleil et la trajectoire de la Terre, plan que l'on appelle plan de l'écliptique. Son intersection avec la sphère céleste est un cercle – appelé écliptique – qui coupe l'équateur céleste en deux points diamétralement opposés, dont l'un est précisément le point vernal ( l'autre correspondant à l'équinoxe d'automne). On repère alors un point M par sa latitude et sa longitude écliptiques, dont les définitions sont analogues à la déclinaison et l'ascension droite , mais pris cette fois par rapport au plan de l'écliptique.

On peut bien sûr établir des formules de passage d'un système de coordonnées à un autre.

### **III. Eléments de mécanique céleste.**

#### ***Eléments de l'orbite d'une planète.***

Lors de la découverte d'une planète ou d'une comète, il est essentiel à partir des observations de déterminer l'ensemble des caractéristiques nécessaires au suivi de l'objet découvert, et à l'établissement d'éphémérides. Le choix de ces éléments n'est pas unique<sup>1</sup>, mais en pratique, on utilise essentiellement les 7 éléments qui vont être définis ci-dessous.

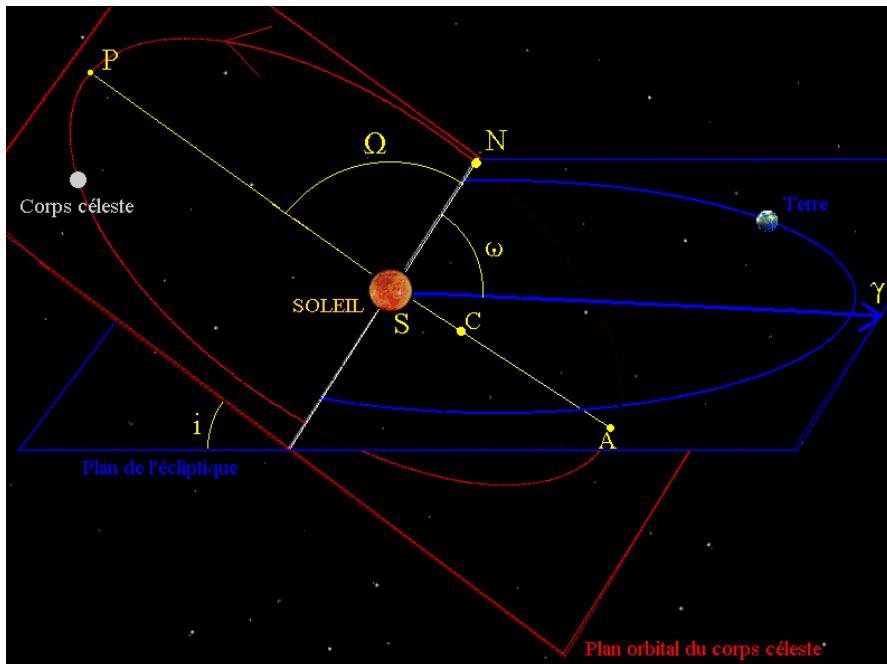
Considérons tout d'abord l'orbite (que nous supposerons elliptique, ce qui est le cas de planètes, astéroïdes et de nombreuses comètes) de l'astre étudié, ainsi que le plan de cette orbite. Le plan de référence sera celui de l'écliptique, ie celui contenant la trajectoire de la Terre autour du Soleil (cf figure ci-dessous). On définit alors :

- la ligne des nœuds comme la droite intersection de ces deux plans orbitaux ; cette droite coupe la trajectoire de l'astre étudié en deux points N et N', appelés respectivement nœud ascendant et descendant ;
- la longitude du nœud ascendant qui est l'angle  $(S\gamma, SN) = \omega$  ;
- l'argument du périastre (le périastre P désignant le point de la trajectoire le plus proche du Soleil S) qui est l'angle  $(SN, SP) = \Omega$  ;
- l'inclinaison de l'orbite  $i$  comme l'angle que font entre eux les deux plans orbitaux,  $i$  étant compté de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  ;
- l'instant de passage au périastre,  $\tau$ , qui permet de préciser la position de l'astre sur son orbite.
- Le moyen mouvement  $n$ , égal à  $2\pi/T$  où  $T$  désigne la période de révolution sidérale.

On choisit alors généralement les 6 paramètres suivants qui, une fois connus, permettent de déterminer entièrement le mouvement d'un astre :  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ , ou bien encore  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  et  $n$  – ceux que nous allons calculer dans la suite.

---

<sup>1</sup> La résolution de l'équation du mouvement, qui est du second ordre, introduira six constantes du mouvement – par exemple les vecteurs positions et vitesses initiales. Ces quantités sont généralement d'un emploi malaisé, ne serait-ce que par la difficulté de les connaître par l'observation. On utilise alors des relations de passage avec un jeu de six autres constantes, plus accessibles et plus commodes dans les calculs, relations qui permettent de redéfinir les conditions initiales à l'aide de ces nouvelles constantes.



### **Détermination d'une orbite planétaire - méthode de Gauss.**

La méthode de Gauss permet de déterminer les éléments d'une orbite elliptique à partir de trois observations - pas trop éloignées dans le temps - de l'astre étudié. Historiquement, c'est l'une des premières méthodes du genre, elle a donc l'avantage de pouvoir être mise en œuvre très facilement, sans outils puissants de calculs. Avant de présenter le principe de cette méthode, fondée dans sa forme originelle sur des approximations successives, nous allons tout d'abord démontrer un certain nombre de relations générales qui nous seront utiles pour établir le système d 'équations qu'il nous faudra résoudre.

Considérons tout d'abord la trajectoire – elliptique- d'une planète autour du Soleil S. Notons  $a$  et  $b$  les demi-axes de l'ellipse, et  $e$  son excentricité. On appellera O le centre de l'ellipse, et on rapporte le plan à un repère (Oxy), (Ox) étant l'axe joignant O à S. On appellera C le cercle de centre O et de rayon  $a$ , M la position de la planète sur son orbite, M' le point de C qui a la même abscisse x que M. On pose enfin  $r = SM$ ,  $(OS, OM') = u$  et  $(OS, SM) = v$ , ces angles étant respectivement l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne. Les coordonnées rectilignes de M, rapportées au repère choisi, s'expriment comme suit<sup>2</sup> :

---

<sup>2</sup> On utilisera ici certaines propriétés, que nous ne démontrerons pas, des ellipses, à savoir :  $b = a \sqrt{1 - e^2}$ ,

$$\frac{y_M}{y_{M'}} = \frac{b}{a} \text{ et } OS = ae.$$

$$x = a \cos u \quad (1)$$

$$y = a \sqrt{1-e^2} \sin u \quad (2)$$

On peut également écrire des relations portant sur le rayon vecteur  $r$  :

$$r \cos v = x - ae = a(\cos u - e) \quad (3)$$

$$r \sin v = y = a \sqrt{1-e^2} \sin u \quad (4)$$

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (5)$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire grâce à la seconde loi de Kepler sur la constance de la vitesse aréolaire que :

$$\pi ab \frac{t-\tau}{T} = \frac{1}{2} ab(u - e \sin u) \quad (6)$$

relation dans laquelle  $t - \tau$  désigne le temps écoulé depuis le passage de la planète au périhélie, et  $T$  est sa période de révolution sidérale.

Nous tirons de cette dernière relation l'équation dire de Kepler :

$$u - e \sin u = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (7)$$

Le terme de droite est généralement noté  $M$  et appelé l'anomalie moyenne.

Signalons encore un dernier type de relation exprimant  $v$  en fonction de  $u$  : en effectuant la somme (resp la différence) des relations (3) et (5), on obtient en effet :

$$\sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u}{2} \quad (8)$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u}{2} \quad (9)$$

Considérons à présent le Soleil  $S$  ainsi que les trois positions observées de la planète  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), de coordonnées héliocentriques  $x_i, y_i, z_i$ , aux dates  $t_i$ . On posera :  $\theta_1 = t_2 - t_1$ ,  $\theta_2 = t_3 - t_2$ ,  $\theta_3 = t_3 - t_1$ . Notons  $S_1$  (resp  $S_2, S_3$ ) l'aire du triangle  $SP_1P_2$  (resp  $SP_2P_3, SP_1P_3$ ). La première remarque que l'on peut faire est que le plan  $P_1 P_2 P_3$  passe par l'origine  $S$  du repère (héliocentrique). On en déduit que la matrice des coordonnées des  $P_i$  a un déterminant nul:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

En développant ce déterminant, on trouve que :

$$x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) = 0 \quad (10)$$

Par ailleurs, l'aire de  $S_1$  (par exemple) est donnée par le module de  $.5 * \mathbf{SP}_1 \mathbf{SP}_2$ ; la projection de  $S_1$  sur le plan  $Syz$  est donc précisément la quantité  $(y_1 z_2 - y_2 z_1)$ . Les triangles considérés étant tous coplanaires, le rapport de l'aire projetée sur l'aire initiale est le même, ce qui nous permet d'écrire:

$$\frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{y_1 z_3 - y_3 z_1} = \frac{S_1}{S_3} \quad (11)$$

Ainsi qu'une formule similaire pour  $S_2/S_3$ . En reportant ces égalités dans (10), on peut alors écrire:

$$x_1 \frac{S_2}{S_3} - x_2 + x_3 \frac{S_1}{S_3} = 0 \quad (12a)$$

Des relations semblables peuvent de même être établies en développant le déterminant par rapport aux autres colonnes:

$$y_1 \frac{S_2}{S_3} - y_2 + y_3 \frac{S_1}{S_3} = 0 \quad (12b)$$

$$z_1 \frac{S_2}{S_3} - z_2 + z_3 \frac{S_1}{S_3} = 0 \quad (12c)$$

Ces formules donnent des relations entre les coordonnées de l'astre, en faisant intervenir les rapports des aires.

Ces rapports étant a priori inconnus, il est nécessaire d'en trouver une expression, expression que nous nous proposons d'établir maintenant.

Notons  $\Sigma_3$  l'aire du secteur curviligne limitée par les rayons vecteurs  $r_1$  et  $r_3$  et l'arc d'orbite  $P_1 P_3$ . Posons en outre :

$$\gamma_3 = \frac{\Sigma_3}{S_3}$$

On a alors:

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\Sigma_2}{\gamma_2} \frac{\gamma_3}{\Sigma_3}$$

Nous allons introduire à présent la constante des aires  $C$ , définie comme le double de la vitesse aréolaire :

$$C = r^2 \frac{dv}{dt}$$

C est relié de manière simple à  $\Sigma$ , puisque l'on a en effet :

$$\Sigma_3 = 2C\theta_3$$

On en déduit alors l'expression des rapports des aires :

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} \frac{\theta_2}{\theta_3} \quad (13)$$

avec une formule analogue pour le rapport  $\frac{S_1}{S_3}$ .

Bien sûr, nous n'avons fait que déplacer le problème, car  $\gamma$  est inconnu. Nous devons donc à présent établir une équation permettant de calculer  $\gamma$ .

Connaissant l'aire de l'ellipse et la période de révolution sidérale, on peut tout d'abord mettre C sous la forme plus utilisable suivante :

$$C = \frac{2\pi}{T} a^2 \sqrt{1-e^2}$$

On posera  $n = \frac{2\pi}{T}$  (moyen mouvement, déjà introduit plus haut).

On écrit alors  $\Sigma_3$  sous la forme suivante :

$$2 \Sigma_3 = n a^2 \theta_3 \sqrt{1-e^2} = a^2 (M_3 - M_1) \sqrt{1-e^2}$$

En utilisant alors l'équation (7), on trouve :

$$2 \Sigma_3 = a^2 \sqrt{1-e^2} (2(u_3 - u_1) - e(\sin u_3 - \sin u_1)) \quad (14)$$

L'expression de  $S_3$  est, elle, obtenue à partir des relations (3) et (4) écrites à la fois pour les positions 1 et 3 :

$$2 S_3 = r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1) = a^2 \sqrt{1-e^2} (\sin(2(v_3 - v_1)) - e(\sin u_3 - \sin u_1)) \quad (15)$$

Nous pouvons donner une autre expression de  $S_3$  : pour cela, on utilise les relations (5),(7),(8) et (9), écrites à la fois pour la position 1 et la position 3 :

$$\sqrt{r_1} \cos \frac{v_1}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u_1}{2} \quad \sqrt{r_3} \cos \frac{v_3}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{u_3}{2}$$

$$\sqrt{r_1} \sin \frac{v_1}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u_1}{2} \quad \sqrt{r_3} \sin \frac{v_3}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{u_3}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r_1 r_3} \cos \frac{v_3 - v_1}{2} = a(\cos g - e \cos \frac{u_3 + u_1}{2}) \quad (16)$$

$$\text{ainsi que: } \sqrt{r_1 r_3} \sin \frac{v_3 - v_1}{2} = a \sqrt{1 - e^2} \sin g \quad (17)$$

Notons que le terme de gauche de la relation (16) vaut également  $\sqrt{\frac{r_1 r_3 + x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3}{2}}$ , quantité que nous appellerons  $\chi_3$  par la suite.

$$r_1 = a(1 - e \cos u_1) \quad r_3 = a(1 - e \cos u_3)$$

$$\Rightarrow \frac{r_1 + r_3}{2} = a(1 - e \cos \frac{u_3 - u_1}{2}) \cos \frac{u_3 + u_1}{2} \quad (18)$$

La multiplication des relations (16) et (17) fait alors apparaître l'aire S3 :

$$S_3 = \chi_3 a \sqrt{\frac{1 - e^2}{2}} \sin g \quad (19)$$

En élevant au carré cette expression, et en remarquant que  $a^2 (1 - e^2) = p = \frac{C^2}{k} = 4 \frac{\Sigma_3^2}{k \theta_3^2}$ , on aboutit à la relation :

$$\gamma_3^2 = \frac{k \theta_3^2}{2 \chi_3^2 a \sin^2(\frac{u_3 - u_1}{2})} \quad (20)$$

Soustrayons alors les équations (14) et (15) :

$$\Sigma_3 - S_3 = \frac{a^2}{2} \sqrt{1 - e^2} (u_3 - u_1 - \sin(u_3 - u_1)) \quad (21)$$

Divisons maintenant par (13), ce qui élimine l'inconnue  $e$  et fait introduire  $\gamma$  :

$$\gamma_3 - 1 = \frac{a}{\chi_3 \sqrt{2}} \frac{u_3 - u_1 - \sin(u_3 - u_1)}{\sin(\frac{u_3 - u_1}{2})} \quad (22)$$

On multiplie enfin (20) par (22), ce qui élimine cette fois l'inconnue  $a$  :

$$\gamma_3^3 - \gamma_3^2 = \frac{k \theta_3^2}{2 \sqrt{2} \chi_3^3} \frac{u_3 - u_1 - \sin(u_3 - u_1)}{(\sin(\frac{u_3 - u_1}{2}))^3} \quad (23)$$

Nous obtenons ainsi une équation dans laquelle n'interviennent que deux inconnues, à savoir  $\gamma_3$  et  $(u_3 - u_1)$ .

Nous devons donc établir une autre relation portant sur ces deux inconnues. Pour cela, nous allons réutiliser la relation (16), couplée cette fois avec (18) qui ne nous a pas encore servi.

Ces deux relations faisant intervenir  $e$ , nous pouvons éliminer cette inconnue, ce qui permet d'obtenir :

$$e \cos\left(\frac{u_3 + u_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{u_3 - u_1}{2}\right) - \frac{\chi_3}{a\sqrt{2}} = \frac{1 - \frac{r_1 + r_3}{2a}}{\cos\left(\frac{u_3 - u_1}{2}\right)}$$

D'où :

$$a \sin^2\left(\frac{u_3 - u_1}{2}\right) = \frac{r_1 + r_3}{2} - \frac{\chi_3}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{u_3 - u_1}{2}\right) \quad (24)$$

Ceci permet de réécrire l'équation (20) sous la forme :

$$\gamma_3^2 = \frac{k\theta_3^2}{2\chi_3^2} \frac{1}{\frac{r_1 + r_3}{2} - \frac{\chi_3}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{u_3 - u_1}{2}\right)} \quad (25)$$

Ceci fournit une deuxième relation entre  $\gamma_3$  et  $(u_3 - u_1)$ .

Les relations que nous venons d'écrire sont bien sûr valables pour les autres positions de la planète, et nous sommes donc en mesure de calculer les éléments de l'orbite à partir de trois observations de la planète.

Notons  $\delta_i$  et  $\alpha_i$  les coordonnées équatoriales de la planète, relevées aux dates  $t_i$ . Rappelons que nous avons noté les coordonnées héliocentriques de la planète  $(x_i, y_i, z_i)$ . Les coordonnées héliocentriques de la Terre aux dates  $t_i$  seront notées  $(X_i, Y_i, Z_i)$ . Nous avons donc :

$$x_i = \Delta_i \cos \delta_i \cos \alpha_i - X_i = \lambda_i \Delta_i - X_i$$

$$y_i = \Delta_i \cos \delta_i \sin \alpha_i - Y_i = \mu_i \Delta_i - Y_i$$

$$z_i = \Delta_i \sin \delta_i - Z_i = \nu_i \Delta_i - Z_i$$

En remplaçant ces expressions dans les relations (12) établies plus haut, on trouve les trois premières équations de notre système :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - \lambda_2 \Delta_2 + \lambda_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} &= \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} X_1 - X_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} X_3 \\ \mu_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} &= \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} Y_1 - Y_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} Y_3 \\ \nu_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - \nu_2 \Delta_2 + \nu_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} &= \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} Z_1 - Z_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} Z_3 \end{aligned}$$

Ces équations font intervenir 6 inconnues, à savoir les  $\Delta_i$  et les  $\gamma_i$ . Mais nous avons établi des relations portant sur ces mêmes  $\gamma_i$ . Ces dernières faisaient intervenir un autre type

d'inconnues, à savoir les quantités du type :  $\frac{u_3 - u_1}{2}$ . Ceci fait un total de 9 inconnues, pour les 9 équations qui constituent le système suivant :

$$\lambda_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - \lambda_2 \Delta_2 + \lambda_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} = \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} X_1 - X_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} X_3$$

$$\mu_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - \mu_2 \Delta_2 + \mu_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} = \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} Y_1 - Y_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} Y_3$$

$$v_1 \Delta_1 \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} - v_2 \Delta_2 + v_3 \Delta_3 \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} = \frac{\theta_2 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_2} Z_1 - Z_2 + \frac{\theta_1 \gamma_3}{\theta_3 \gamma_1} Z_3$$

$$\gamma_1^3 - \gamma_1^2 = \frac{k \theta_1^2}{2\sqrt{2} \chi_1^3} \frac{u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1)}{(\sin(\frac{u_2 - u_1}{2}))^3}$$

$$\gamma_1^3 - \gamma_1^2 = \frac{k \theta_1^2}{2\sqrt{2} \chi_1^3} \frac{u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1)}{(\sin(\frac{u_2 - u_1}{2}))^3}$$

$$\gamma_2^3 - \gamma_2^2 = \frac{k \theta_2^2}{2\sqrt{2} \chi_2^3} \frac{u_3 - u_2 - \sin(u_3 - u_2)}{(\sin(\frac{u_3 - u_2}{2}))^3}$$

$$\gamma_3^3 - \gamma_3^2 = \frac{k \theta_3^2}{2\sqrt{2} \chi_3^3} \frac{u_3 - u_1 - \sin(u_3 - u_1)}{(\sin(\frac{u_3 - u_1}{2}))^3}$$

$$\gamma_1^2 = \frac{k \theta_1^2}{2 \chi_1^2} \frac{1}{\frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{\chi_1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{u_2 - u_1}{2})}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{k \theta_2^2}{2 \chi_2^2} \frac{1}{\frac{r_2 + r_3}{2} - \frac{\chi_2}{\sqrt{2}} \cos(\frac{u_3 - u_2}{2})}$$

$$\gamma_3^2 = \frac{k \theta_3^2}{2 \chi_3^2} \frac{1}{\frac{r_1 + r_3}{2} - \frac{\chi_3}{\sqrt{2}} \cos(\frac{u_3 - u_1}{2})}$$

La résolution de ce système permet de déterminer les  $\Delta_i$ , et donc les rayons vecteurs. On peut également déterminer  $a$ , à partir de l'équation (20) par exemple ; dès lors, le calcul de  $e$  devient très aisés. Quant à l'inclinaison et la longitude du périhélie, elles s'obtiennent grâce aux calculs des projections des aires  $S_i$ , obtenues à l'aide des coordonnées  $x_i, y_i, z_i$  de la planète. Nous terminons la détermination avec  $\omega$ , obtenu grâce à des relations entre rayons vecteurs et coordonnées écliptiques héliocentriques, puis  $n$ , établie via la loi de Kepler.

## IV. Application : calcul des éléments de l'orbite de Jupiter.

### ***Calcul des éléments de l'orbite.***

Nous avons utilisé les trois observations suivantes pour le calcul des éléments de l'orbite de Jupiter, observations espacées chacune de 10 jours :

01/01/2000 : ascension droite : 1h35m24.47892s ; déclinaison :+8°35'10.5123''

11/01/2000 : ascension droite : 1h37m26.00387s ; déclinaison :+8°50'9.7596''

21/01/2000 : ascension droite : 1h40m39.31252s ; déclinaison :+9°11'47.2238''

A partir de ces observations, ainsi que des positions héliocentriques de la Terre à ces mêmes dates, nous calculons tout d'abord les coefficients  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ , et  $v_i$  déjà introduits :

	01/01/2000	11/01/2000	21/01/2000
$\lambda_i$	0.9043425	0.9001721	0.8934619
$\mu_i$	0.3998433	0.4075474	0.419742
$v_i$	0.1492981	0.1536075	0.15982

Nous sommes alors en mesure de faire résoudre le système précédent par un logiciel de résolution numérique. Nous avons utilisé Maple et Mathematica, et nous avons obtenu les résultats suivants :

$$\Delta_1 = 4.613910830 \quad \gamma_1 = 1.000040259 \quad g_1 = -0.007583625130$$

$$\Delta_2 = 4.771563042 \quad \gamma_2 = 1.000040228 \quad g_2 = -0.007581653186$$

$$\Delta_3 = 4.931807155 \quad \gamma_3 = 1.000160988 \quad g_3 = -0.01516528094$$

Nous calculons alors les coordonnées équatoriales héliocentriques de Jupiter :

	01/01/2000	11/01/2000	21/01/2000
$x_i$	4.0041102258	3.95792727689	3.91078870354
$y_i$	2.73372588115	2.79222691426	2.85005369857
$z_i$	1.07424163241	1.10044337792	1.12637911694

Ainsi que les coordonnées écliptiques héliocentriques, qui s'obtiennent grâce à l'angle  $\varepsilon$  que font le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur céleste:

$$x'_i = x_i$$

$$y'_i = y_i \cos \varepsilon + z_i \sin \varepsilon$$

$$z'_i = -y_i \sin \varepsilon + z_i \cos \varepsilon$$

	01/01/2000	11/01/2000	21/01/2000
$x'_i$	4.0041102258	3.95792727689	3.91078870354
$y'_i$	2.93545197995	2.99954809377	3.06291978539
$z'_i$	-0.101852596764	-0.101084132859	-0.100291515403

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'inclinaison de l'orbite et la longitude du périhélie en calculant les projections d'aires :

$$\begin{aligned}2 S_3 \cos i &= x'_1 y'_3 - x'_3 y'_1 = 0.784335990512 \\2 S_3 \sin i \sin \Omega &= y'_1 z'_3 - y'_3 z'_1 = 0.01756540636 \\2 S_3 \sin i \cos \Omega &= x'_1 z'_3 - x'_3 z'_1 = -0.003254297535\end{aligned}$$

De tout ceci nous déduisons:

$$\begin{aligned}S_3 &= 0.392269703127 \\i &= 1^\circ 18' \\ \Omega &= 100^\circ 29'\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi calculer les rayons vecteurs, ainsi que  $\chi_3$  et donc a par (20) :

$$\begin{aligned}\chi_3 &= 49.2935424629 \\a &= 5.21910\end{aligned}$$

D'où aussi e :

$$e = 0.05771$$

Le moyen mouvement (introduit plus haut) est obtenue grâce à la loi de Képler qui exprime que le rapport  $a_3/T^2$  reste constant. Connaissant ce rapport pour la Terre, ainsi que le demi grand axe de Jupiter, on peut donc en déduire son moyen mouvement n :

$$\begin{aligned}n &= 0.98560767 a^{-3/2} \\D'où n &= 305.4535'' \text{ par jour.}\end{aligned}$$

Pour calculer  $\omega$ , on utilise les relations entre les rayons vecteurs et les coordonnées écliptiques héliocentriques. On a en effet par projection :

$$z'_1 = r_1 \sin i \sin(v_1 + \omega)$$

L'autre inconnue de cette relation est  $v_1$ , qui peut être déterminée grâce à la formule suivante, valable pour toute trajectoire elliptique :

$$e \cos v_1 = \frac{p}{r_1} - 1 \quad , \text{ avec } p = C^2/k \text{ et } C = 2S_1\gamma_1/\theta_1$$

Munis de ces relations, nous trouvons finalement :

$$\omega = -95.99^\circ$$

Voici donc les éléments de l'orbite de Jupiter que nous trouvons à l'issue de nos calculs :

$$\begin{aligned}a &= 5.219010 \\e &= 0.05771 \\i &= 1^\circ 18' 30'' \\n &= 305.4535'' \\ \omega &= -95.99^\circ \\ \Omega &= 100^\circ 29'\end{aligned}$$

Ces valeurs sont à comparer avec celles communément admises. Notons que l'inclinaison trouvée ne s'écarte que de quelques secondes de la valeur « exacte ». Pour  $a$  et  $\Omega$ , l'erreur est inférieure à 1%. Elle est de 2% pour  $n$ , mais atteint 10% pour  $\omega$  et 16% pour  $e$  :

Tableau récapitulatif	Valeur trouvée	Valeur « exacte »	Ecart relatif
$a$	5.21910	5.2026	0.3%
$e$	0.05771	0.0483	16%
$i$	1°18'28"	1°18'30"	0.05%
$\omega$	-95°99'	-86°44'	9.8%
$\Omega$	100°29'	99°27'	1%
$n$	305.45335"	299.13"	2%

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les éphémérides de la planète Jupiter, à partir des éléments que nous avons calculés. Avant cela, il est important de préciser quelques notions sur la prise en compte des perturbations

### **Perturbations.**

La méthode que nous avons employée précédemment considère la trajectoire elliptique comme non perturbée, ie la planète n'est soumise qu'à une force centrale. En réalité, la situation est bien plus complexe, car les planètes interagissent entre elles et modifient ainsi les éléments de leurs orbites. Les masses des planètes étant faibles devant celles du Soleil, les effets sont bien sûr très faibles, mais un calcul précis d'éphéméride doit en tenir compte, car ces perturbations peuvent, dans certains cas et au bout d'un certain temps, écarter la planète de sa trajectoire non perturbée de plusieurs dizaines de secondes d'arc.

Dans le cas de Jupiter, la principale source de perturbation est la planète Saturne, qui est d'ailleurs elle-même grandement influencée par Jupiter. Le calcul exact de la variation des éléments n'est en général pas réalisable, aussi va-t-on procéder par approximations successives en calculant les termes correctifs les uns après les autres, pour chaque élément. Nous allons prendre pour exemple le cas de  $a$ . Donnons-nous d'abord les relations<sup>3</sup> exprimant les variations de cet élément dans le temps, en fonction des composantes normale et tangentielle de la force, notées respectivement  $P$  et  $S$  :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{(1-e^2)}} \left( P \frac{p}{r} + S e \sin v \right)$$

Il est également possible d'exprimer cette variation en fonction de la fonction de force perturbatrice  $R$ , et de ses dérivées par rapport aux éléments de l'orbite :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}, \text{ dans laquelle } \epsilon \text{ représente la quantité } dM + d\Omega.$$

Au premier ordre, on écrira donc :

$$a = a_0 + \delta_a a, \text{ avec :}$$

---

<sup>3</sup> Nous ne démontrerons pas ces relations, mais le lecteur intéressé pourra se reporter aux ouvrages spécialisés, dont certains se trouvent dans la bibliographie.

$$\delta_1 a = \frac{2}{n_0 a_0} \int_0^t \left( \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right)_0 dt$$

On peut monter qu'en première approximation, on a :

$$R_0 = \sum F_0 \cos D_0 \quad , \text{ avec: } D_0 = j(n_0 t + \varepsilon) + j'(n'_0 t + \varepsilon') + k\varpi_0 + k'\varpi'_0 + l\Omega_0 + l'\Omega'_0$$

$j, k, l, j', k', l'$  désignant des entiers relatifs. Quant à  $F_0$ , il ne dépend que de  $a, e$  et  $i$ .

On a alors par intégration :

$$\delta_1 a = \frac{2}{n_0 a_0} \sum j F_0 \frac{\cos D_0}{jn_0 + j'n'_0}$$

D'où l'expression du premier terme correctif. On notera que cette expression ne fait intervenir que des fonctions sinusoïdales du temps ;on parle alors de termes correctifs périodiques. Le seul terme dépendant linéairement du temps est celui pour lequel  $j = j' = 0$ , mais ce terme est nul en raison de la présence du  $j$  en facteur de l'ensemble.

Signalons pour finir que le terme  $jn_0 + j'n'_0$  peut induire des phénomènes de résonance s'il existe  $j$  et  $j'$  tels que ce terme devienne très petit, ie si les périodes des deux planètes considérées sont dans un rapport quasi-rationnel. Or, on constate que :

$$n = 299.1283''$$

$$n' = 120.4547'',$$

$$\text{d'où } n/n' = 2.4833 \approx 2.5.$$

Plus précisément,  $5n' - 2n = 1467.1'' = 0.4075^\circ$  par an, d'où une période de cette perturbation de  $360/0.4075 = 883$  ans. On observe alors des variations de  $\Omega$  pouvant aller jusqu'à  $20'$  pour Jupiter et  $50'$  pour Saturne.

## V. Calculs des éphémérides

### *Introduction*

Pour prédire la position future d'une planète par rapport à la Terre (ou au Soleil) il ne suffit pas, en général, résoudre le problème des deux corps. Dans les situations réelles on serait amené à prendre en compte la masse des corps célestes, qui se trouvent dans l'environnement de ladite planète, les potentiels gravitationnels, qui ne sont pas rigoureusement sphériques, des forces d'origine non-gravitationnelles issues de la pression de radiation du Soleil, du frottement sur les poussières du milieu interplanétaire et des forces électromagnétiques. Il en résulte un mouvement dit perturbé par rapport au mouvement théorique du problème des deux corps.

Il n'est pas donc suffisant de définir qu'une seule orbite keplérienne pour un tel mouvement mais un ensemble d'orbites keplériennes, dites instantanées, de définition suivante: à l'instant  $t_0$ , l'astre A occupe une position  $A_0$  et possède un vecteur vitesse  $V_0$  dans son mouvement relatif au corps central S. Si à cet instant  $t_0$  on supprimait toutes les actions perturbatrices, l'astre décrirait alors une orbite keplérienne de foyer S. Cette orbite « théorique » est appelé orbite osculatrice à l'instant  $t_0$ , qui est l'époque d'osculation. Il est à

noter qu'elle est tangente en  $A_0$ . A chaque instant, l'astre A se trouve donc sur une orbite osculatrice et l'ensemble de ces orbites admet pour enveloppe l'orbite perturbée que décrit l'astre. Les points de contacts entre ces orbites sont évidemment les positions correspondantes de A à chaque instant.

L'orbite réelle n'est pas nécessairement plane. Pour connaître la position de l'astre A à chaque instant  $t$ , il faut connaître la position de A sur l'orbite keplérienne osculatrice correspondante, à  $t$ .

Il est donc nécessaire de repérer les orbites osculatrices à chaque instant, ou des orbites « voisines » comme c'est le cas pour les planètes (à ne pas oublier que certaines astres peuvent être fortement perturbés par un passage approché au voisinage des planètes géantes).

Des méthodes de calcul plus précises prennent en compte ces perturbations; elles furent mises en œuvre dès le 18ème siècle avec Euler et Clairaut notamment. Ces méthodes sont de deux types: l'une de caractère analytique constitue la théorie des Perturbations générales, l'autre, numérique, forme la théorie des Perturbations spéciales.

En utilisant la théorie des perturbations générales, on considère le système différentiel de six équations de premier ordre dénommées équations planétaires de Lagrange. Les seconds membres de ces équations contiennent, outre la fonction perturbatrice, les fonctions inconnues qui, sont les éléments osculateurs considérés comme les fonctions du temps. Les inconnues s'expriment (de façon approchée) par des développements de la forme:

$$Q = Q_0 + Q_1 T + Q_2 T^2 + \dots + \sum_{i=1}^n (A_i + B_i T) \sin\left(\sum_{j=1}^k \alpha_{ij} L_j\right), \text{ où } Q \text{ représente une des inconnues.}$$

$$\left( \frac{\text{_____}}{J} \right) \quad \left( \frac{\text{_____}}{P} \right)$$

$Q_0$  correspond à la partie non-perturbée de  $Q$ , donc la valeur qu'aurait le paramètre  $Q$  si le mouvement était keplérien.  $T$  correspond à la date d'observation exprimée en siècle julienne (ou en millénaire julien):  $T = \frac{N - 2451545}{36525}$  (origine 2000) avec  $N$  étant le jour julien de la

date.  $Q_1 T$ : constitue une approximation linéaire (du premier ordre par rapport au temps) et est appelée: inégalité séculaire (ou terme séculaire)<sup>4</sup>.

Les termes  $P$  contiennent des termes périodiques formés de sinus dont l'argument (la variable) est une combinaison linéaire des variables angulaires  $L_j$ , des astres concernés, ainsi que des termes mixtes  $B_i T \sin\left(\sum_j \alpha_{ij} L_j\right)$ .

Certains termes périodiques sont à longue période, les autres sont dits à courtes périodes<sup>5</sup>. L'ensemble des termes périodiques caractérise l'oscillation de l'élément osculateur calculé autour d'une **valeur moyenne** de cet élément, formée des termes séculaires.

$$Q = \sum_{p=0}^3 Q_p T^p, \text{ où } Q \text{ correspond à } i, \Omega, \omega \text{ (pour les éléments angulaires) et } e \text{ ou } M.$$

Ces **éléments moyens** de l'orbite définissent à chaque instant  $t$  une orbite „moyenne“ qui ne correspond évidemment pas à l'orbite osculatrice au même instant décrite plus haut.

<sup>4</sup> L'expression „inégalité“ est utilisée parce qu'en 19 siècle et au début de 20 siècle il fut démontré que dans le système solaire le demi grand-axe des orbites a des planètes et par suite leur moyen mouvement n'en contenait pas d'inégalités séculaires du premier ordre, ni du second. L'intégration approchée des équations de Lagrange s'effectue en plusieurs approximations qui donnent  $Q_1$  à la première approximation,  $Q_2$ , coefficient du terme séculaire du second ordre, à la deuxième approximation... Les coefficients  $Q_i$  sont très petits à partir de  $T^3$ .

<sup>5</sup> Ces termes sont dus à la nutation. Les termes à longue période (p.e. 26 000 ans) sont développés usuellement en série entière du temps.

Toute éphéméride établie en considérant ces éléments moyens comme éléments osculateurs à  $T$  est donc assez approximative (l'erreur commise peut être très importante pour des grandes planètes). Par contre, ce type de calcul est très simple.

Une plus grande précision peut être obtenue au prix de calculs volumineux, qui sont dus à la présence de centaines des termes sinusoïdaux dont les arguments sont les anomalies et les longitudes moyennes ainsi que les arguments de périhélie des planètes perturbés et perturbant. Les séries utilisées sont divergentes, c'est pourquoi on ne les utilise que sur des données réduites (quelques centaines années).

La méthode des perturbations spéciales, mise en œuvre dès le début du 19<sup>ème</sup> siècle, procède par intégration numérique des équations différentielles (système différentiel de second ordre non linéaire) du mouvement perturbé. Le principe en était plus simple que le précédent mais les calculs manuels furent laborieux.

Pour le calcul des éphémérides des planètes du système solaire on a choisi d'utiliser les éléments moyens à la place des éléments osculateurs en se satisfaisant d'un calcul moins précis. Notre but est aussi comparer nos résultats avec ceux du Bureau des Longitudes pour pouvoir conclure sur la précision de nos calculs.

### ***Calcul de la position des planètes***

Pour trouver les éphémérides d'une planète il faut déterminer d'abord sa position pour une date précise<sup>6</sup>; il faut donc connaître ses éléments d'orbite.

On va utiliser les éléments dit « moyens » des orbites de la planète qui sont de la forme  $Q=Q_0+Q_1T+Q_2T^2$ ,  $Q$  représentant un élément. On propose deux présentations différentes : l'une donnant directement les six fonctions ( $i$ ,  $\Omega$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\varpi$  (longitude de périhélie),  $L$  (longitude moyenne)), théorie TOP82 de J.L.Simon ; l'autre ne donnant pas directement des éléments, mais d'autres fonctions permettant de les retrouver, théorie VSOP82 de P. Bretagnon. Il faut noter que les coefficients des éléments d'orbite sont exprimés par rapport à une certaine date. Dans la suite, on va utiliser les éléments d'orbite rapportés à l'année 2000.

Pour les calculs suivants on a choisi la présentation de VSOP82 qui est aussi utilisé par le Bureau des Longitudes (parmi d'autres). Les fonctions données par cette théorie sont les suivantes<sup>7</sup> :

- |                                 |               |
|---------------------------------|---------------|
| - demi grand axe                | $a = f(T)$ ,  |
| - longitude moyenne             | $LM = f(T)$ , |
| - excentricité $x \cos(\varpi)$ | $KA = f(T)$ , |
| - excentricité $x \sin(\varpi)$ | $HA = f(T)$ , |
| - $\sin(i/2) x \sin(\Omega)$    | $P = f(T)$ ,  |
| - $\sin(i/2) x \cos(\Omega)$    | $Q = f(T)$ .  |

Sous cette présentation on voit aisément que les éléments d'orbites sont égaux :

- longitude de périhélie<sup>8</sup>       $\varpi = \arctg(HA/KA)$ ,

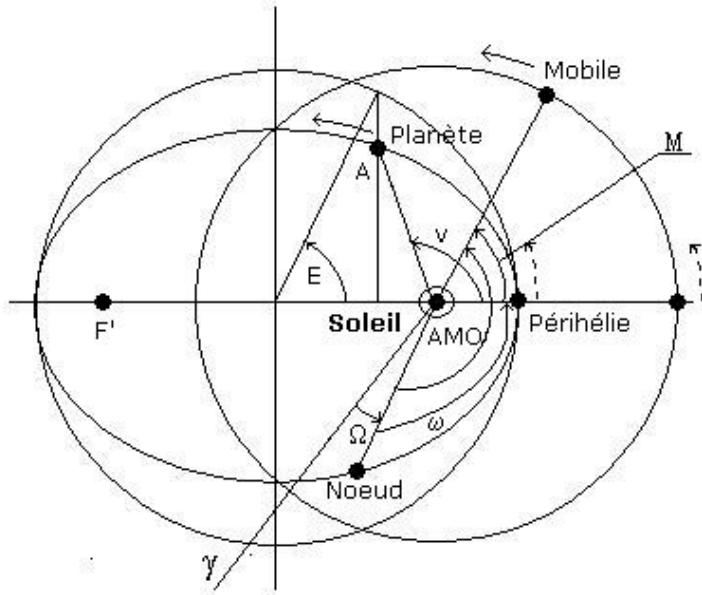
---

<sup>6</sup> Cette date va être dans les calculs suivants exprimée dans les milénaires juliens – ANNEXE.

<sup>7</sup> Certaines notations introduites (p.e. LM, KA, HA, P, Q) ne sont pas celles qui sont communément utilisées.

- excentricité  $e=HA/\sin(\varpi)$ ,
- longitude du nœud ascendant  $\Omega=\arctg(P/Q)$ ,
- inclinaison de l'orbite  $i=2\arcsin(P/\sin(\Omega))$ .

Pour pouvoir déterminer la position du Jupiter à partir de ces fonctions il faut trouver l'anomalie moyenne  $M$ . On regarde l'image suivant, où  $v$  l'anomalie vraie,  $AMO$  l'argument de mobile,  $\omega$  l'argument de la latitude du périhélie et  $E$  l'anomalie excentrique, qui va permettre de déterminer  $M$ .



La longitude moyenne ou la longitude vraie du mobile LM est définie comme la somme de la longitude du nœud ascendant  $\Omega$  et l'anomalie du mobile AMO ( $LM=\Omega+AMO$ ). Sur l'image on peut lire que  $M=AMO-\omega$ .

$$\text{On a donc } M=LM-\Omega-\omega=LM-\varpi.$$

Ensuite, on va calculer l'anomalie excentrique  $E$ , à l'aide de l'équation de Kepler :  $E=M+e\cdot\sin E$ . Cette anomalie peut être calculer numériquement par un calcul itératif – un boucle de 5 itération est en général suffisant.

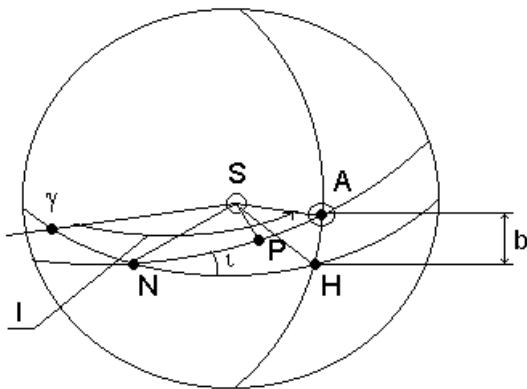
Il faut définir l'anomalie vraie  $v$  en connaissant  $v=2\arctg(((1+e)/(1-e))^{1/2}\cdot\tg(E/2))$ <sup>8</sup>.

Connaissant l'argument de latitude de la planète  $APL=\varpi+v-\Omega$  on peut déterminer la position de la planète dans les coordonnées écliptiques héliocentriques. Ces coordonnées porteront le nom de la latitude écliptique  $b$  et de la longitude écliptique  $l$ .

On voit sur l'image suivant à quoi correspondent ces deux coordonnées.

<sup>8</sup> La longitude du périhélie est donnée par le calcul d'un arctan, donc il y a ambiguïté de  $\pi$  sur le résultat en fonction du signe de  $K\Lambda$ . Si  $K\Lambda$  est négatif il faut ajouter  $\pi$  à la longitude de périhélie. La même chose va se passer avec la longitude du noeud ascendant, où pour  $Q$  négatif il faut ajouter  $\pi$  à  $\Omega$ .

<sup>9</sup> Le rayon vecteur et l'anomalie vraie s'obtiennent par :  $r \cos v = a(\cos E - e)$  et  $r \sin v = a(1-e^2)^{1/2} \sin E$ . En élevant ces expressions au carré et en additionnant ces deux relations, on trouve l'expression pour le rayon vecteur  $r=a \cdot (1-e \cdot \cos E)$ . En divisant l'expression  $r \cos v = a(\cos E - e)$  par l'expression pour le rayon vecteur, on obtient  $\cos v = (\cos E - e) / (1 - e \cdot \cos E)$ . Pour trouver une expression plus commode on utilise la relation  $\tg^2(v/2) = (1 - \cos v) / (1 + \cos v)$  qui mène au résultat indiqué plus haut.



La latitude écliptique  $b$  peut être déduite à l'aide de la formule pour les triangles :  $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B$ . On a donc  $\sin b / \sin i = \sin APL / \sin 90^\circ$ . D'où  $b = \arcsin(\sin i \cdot \sin APL)$

La longitude écliptique  $l$  peut être déduite à l'aide de la formule :  $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ .

Donc  $\cos APL = \cos NH \cdot \cos LA$ . Pour obtenir la longitude  $l$  il faut ajouter la longitude du nœud à l'arc  $NH$ . On obtient donc :  $l = \arccos(\cos APL / \cos b) + \Omega$ .

On a trouvé la position du Jupiter dans les coordonnées écliptiques héliocentriques. Pour pouvoir exprimer sa position par rapport à la Terre il faudrait introduire la position du Soleil par rapport à la Terre et la rajouter à la position de la planète par rapport au Soleil. Dans ce document on ne démontre pas le passage entre les différents systèmes de coordonnées, dans le chapitre suivant, on introduit tout de suite les relations correspondantes. Le passage entre les différents types de coordonnées est possible trouver dans tous les œuvres traitant la problématique en question.

### ***Calcul des éphémérides du Jupiter***

Les planètes décrivent des orbites autour du Soleil. C'est pourquoi, pour déterminer la position du Jupiter par rapport à la Terre, il faut calculer d'abord les coordonnées du Soleil par rapport à la Terre, puis les coordonnées des planètes par rapport au Soleil, et ensuite on combine les résultats de ces deux calculs.

Le déroulement du calcul est le suivant<sup>10</sup> :

1. Calcul de la date exprimée en millénaires juliens  $T$  (ad ANNEXE) et du temps sidéral  $TS$  (ad Programme) à partir de la date (jour, mois, année), de l'heure (heures, minutes, secondes), et des coordonnées terrestres du lieu d'observation (latitude  $L$  et longitude  $G$ ).

2. Calcul de Soleil pour obtenir la longitude écliptique du Soleil  $LOs$  ( $s$  désigne le Soleil) :  $LOs = AVs + LPs$ , où  $AVs$  est anomalie vraie du Soleil et  $LPs$  est la longitude du périhélie de Soleil.

$$IE=0.4090928042-0.0022696552*T-2.86e-7*T*T$$

$$A=1.00000101778$$

$$LM=4.895062967+6283.319668*T+5.3e-4*T*T$$

$$KA=-0.003740816-0.004793106*T+0.00028*T*T$$

$$HA=0.016284477-0.001532379*T-0.00072*T*T$$

<sup>10</sup> Les notations introduites sont utilisées pour rendre le programme plus compréhensible. Quelques notations communes sont mentionnées entre parenthèses.

$$LPs=\text{atan}(HA/KA) ; E= \text{abs} (HA/\sin (LPs)) ; AM=LM-LPs ; AE=AM+E*\sin AE ; AVs=2*\text{atan}(((1+E)/(1-E))^{1/2}*\tan(AE/2))$$

3. Calcul des coordonnées cartésiennes écliptiques géocentriques du Soleil : connaissant As (a), AEs (E) et Es (e) on a le rayon vecteur Soleil  $R=A x (1-E.\cos AE)$  ou  $r=a x (1-e.\cos E)$   
Les coordonnées du Soleil sont alors les suivantes :  $Xs=R_s x \cos LOs$  et  $Ys=R_s x \sin LOs$

4. Calcul des coordonnées écliptiques héliocentriques LO et LA du Jupiter, à l'aide des éléments fournis pour la planète :

$$\begin{aligned} A &= 5.20260319132+1.91323^e-6*T \\ LM &= 0.5995464972+529.9348075*T+3.9^e-4*T*T \\ KA &= 0.046985721-0.001796949*T-0.00204*T*T \\ HA &= 0.012003857+0.013628604*T+4^e-5*T*T \\ Q &= -0.002065611-0.001905724*T+0.00011*T*T \\ P &= 0.011183772-0.000839731*T-0.00016*T*T \end{aligned}$$

et des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} LN &= \text{arctg} (P/Q) (\Omega) ; IO = 2\arcsin(P/\sin LN) (i) ; \\ LP &= \text{arctg}(HA/KA) ; E = HA/\sin LP ; AM = LM-LP ; AE = AM+E.\sin AE ; \\ AV &= 2\text{arctg}(((1+E)/(1-E))^{1/2} x \tan(AE/2)) ; APL = LP+AV-LN \end{aligned}$$

Si on prend en compte aussi des perturbations à longue période pour le Jupiter, ce qui correspond à l'influence perturbatrice de Saturne avec sa période de l'inégalité de 883 ans, on introduit l'argument B, tel que :  $B=3.08686+7.3738*T$ . Les corrections à apporter sur les éléments sont les suivantes :

$$\begin{aligned} dA &= 4.6e-6 \cos B \\ dLM &= 5.78e-3 \sin B \\ dE &= 6.3e-6 \sin B + 2.25e-6 \cos B \text{ d'où } E \text{ corrigé } Ec=E+dE \\ dLP &= 1/Ec(1.22e-4 \sin B - 3.49e-4 \cos B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} LA &= \arcsin(\sin IO . \sin APL) \text{ ou } LA = \arcsin(\sin i . \sin \omega) \\ LO &= \arccos(\cos APL / \cos LA) + LN \text{ ou } LO = \arccos(\cos \omega / \cos LA) + \Omega \end{aligned}$$

5. Calcul du rayon vecteur R du Jupiter : si A est le demi grand axe de l'orbite du Jupiter, E l'excentricité et AE l'anomalie excentrique, on a :  $R=A x (1-E.\cos AE)$

6. Calcul des coordonnées cartésiennes écliptiques héliocentriques du Jupiter

$$\begin{aligned} X1 &= R . \cos LA . \cos LO \\ Y1 &= R . \cos LA . \sin LO \\ Z1 &= R . \sin LA \end{aligned}$$

7. Calcul des coordonnées cartésiennes écliptiques géocentriques du Jupiter

$$\begin{aligned} X2 &= Xs+X1 \\ Y2 &= Ys+Y1 \\ Z2 &= Z1 \text{ (car } Zs=0) \end{aligned}$$

8. Calcul des coordonnées sphériques écliptiques géocentriques du Jupiter : longitude LOG et latitude LAG

$$\text{LOG} = \arctg(Y_2/X_2) \text{ et si } X_2 \text{ négatif, on ajoute } \pi \text{ à LOG}$$
$$\text{LAG} = \arctg(Z_2/(X_2^2+Y_2^2)^{1/2})$$

9. Calcul des coordonnées de la planète dans le système géocentrique sphérique équatorial (changement d'axes écliptique-équatorial)

déclinaison D= $\arcsin(\sin \text{LAG} \cdot \cos \text{IE} + \cos \text{LAG} \cdot \sin \text{IE} \cdot \sin \text{LOG})$   
ascension droite AD= $\arctg((\cos \text{IE} \cdot \sin \text{LOG} - \sin \text{IE} \cdot \tan \text{LAG})/\cos \text{LOG})$  en sachant que si  $\cos \text{LOG}$  est négatif on ajoute  $\pi$  à AD

10. Calcul des coordonnées horaires du Jupiter

Si G est la longitude terrestre du lieu d'observation, et TS est le temps sidéral de Greenwich, les coordonnées horaires seront les suivantes : angle horaire AH = TS-AD-G et D

11. Calcul des coordonnées locales du Jupiter

hauteur HC =  $\arcsin(\sin D \cdot \sin L + \cos D \cdot \cos L \cdot \cos AH)$   
azimut AZ= $\arctg(\sin AH / (\sin L \cos AH - \cos L \tan D))$  avec la condition : si le dénominateur est négatif, ajouter  $\pi$  à AZ (L est la latitude terrestre du lieu).

Ces formules sont utilisées dans le programme suivant qui donc permet de déterminer la position du Jupiter pour une date et un lieu d'observation donnée. Ce programme est écrit pour MATLAB.

### **Programme : Ephémérides de Jupiter avec des perturbations de Saturn**

```
close all
format long

% Progamme: Ephémérides de Jupiter avec des perturbations de Saturn

% Définition de la longitude ( deg puis min)
D1=input('Definition de la longitude (que deg): ');
M1=input('Definition de la longitude (que min): ');

% définition de la latitude (deg puis min)
D2=input('Definition de la latitude (que deg) : ');
M2=input('Definition de la latitude (que min) : ');

% définition de jour, puis mois puis années d'observation
JO=input('Quel jour : ');
MO=input('Quel mois : ');
AN=input('Quel ans : ');

% Nombre de jours par mois
N(1)=0;
N(2)=31;
N(3)=59;
N(4)=90;
N(5)=120;
N(6)=151;
```

```

N(7)=181;
N(8)=212;
N(9)=243;
N(10)=273;
N(11)=304;
N(12)=334;

% définition de heures, minutes et secondes en temps mondial
H=input('Heures : ');
M=input('Minutes : ');
S=input('Secondes : ');

K=180/pi;
G=sign(D1)*(abs(D1)+M1/60)/K;           % longitude en rad
L=sign(D2)*(abs(D2)+M2/60)/K;           % latitude en rad
J2=N(MO)+JO+(H+M/60+S/3600)/24-1;      % nombre de jours pour la date de
l'observation

% calcul de la date julienne
AA=AN/4-floor(AN/4);
if AA==0
    AA=1;
end
if AA==1 & MO>2
    J2=J2+1;
end

T=((AN-2000)*365.25+0.5+J2-AA)/365250; % millénaires juliens
Tsi=((AN-2000)*365.25+0.5-AA)/36525;      % siècle julien pour le 1.1.
d'année                                     % d'observation (0h0m)

% temps sideral moyen de Greenwich à 0 heure pour l'année d'observation;
c'est aussi
% la longitude moyenne de la Terre à cette même date de référence

TSa=100.4606184+36000.77005361*Tsi+3.87929167e-4*Tsi^2-
0.000000025875*Tsi^3;
TS0=TSa-floor(TSa/360)*360;

if TS0<0
    TS0=TS0+360
end

TS1=TS0+360.98564735*J2;
TS=2*pi*(TS1/360-floor(TS1/360));        % temps sideral de Greenwich au
moment de                                 % l'observation

% PARAMETRES DU SOLEIL

% inclinaison écliptique par rapport au plan équatorial
IE=0.4090928042-0.0022696552*T-2.8604007e-7*T*T+8.789672e-6*T*T*T;

% demi grand axe de l'orbite terrestre exprimé en unités astronomiques
AS=1.00000101778;

% longitude moyenne du Soleil
LMS=4.895062967+6283.319663*T+5.3001819e-4*T*T+3.6942802e-7*T*T*T;

```

```

% excentricite x cos LP
KAS=-0.003740816-0.004793106*T+0.000281128*T*T+7.3831e-5*T*T*T;

% excentricite x sin LP
HAS=0.016284477-0.001532379*T-0.000720171*T*T+3.2299e-5*T*T*T;

LPS=atan(HAS/KAS);                                % longitude de perihelie
ES=abs(HAS/sin(LPS));                            % excentricite
AMS=LMS-LPS;                                     % anomalie moyenne
AES=AMS;                                         % anomalie excentrique

for I=1:5
    AES=AMS+ES*sin(AES);
end

% anomalie vraie
AVS=2*atan((sqrt((1+ES)/(1-ES)))*tan(AES/2));

ALS=AVS+LPS;                                     % argument de latitude du Soleil

% systeme equatorial
D=sin(sin(IE)*sin(ALS));                        % declinaison
AD=atan(cos(IE)*tan(ALS));                      % ascension droite

if (cos(ALS))<0
    AD=AD+pi;
end

if AD<0
    AD=AD+2*pi;
end

RVS=AS*(1-ES*cos(AES));                         % rayon vecteur du Soleil

% coordonnes cartesiennes pour le Soleil
XS=RVS*cos(ALS);
YS=RVS*sin(ALS);

AH=TS-AD-G;                                      % angle horaire

% COORDONNES POUR LE JUPITER

A=5.20260319132+1.91323e-6*T;                 % demi grande axe de Jupiter
LM=0.5995464972+529.9348075*T+3.9e-4*T*T;     % longitude moyenne
KA=0.046985721-0.001796949*T-0.00204*T*T;      % excentricite x cos LP
HA=0.012003857+0.013628604*T+4e-5*T*T;        % excentricite x sin LP

% sin (IO/2) x sin LN, où IO est l'inclinaison de l'orbite et LN est
% la longiude du noeud ascendant
Q=-0.002065611-0.001905724*T+0.00011*T*T;

% sin (IO/2) x cos LN, où IO est l'inclinaison de l'orbite et LN est
% la longiude du noeud ascendant
P=0.011183772-0.000839731*T-0.00016*T*T;

LP=atan(HA/KA);                                  % longitude de perihelie

if KA<0
    LP=LP+pi;
end

```

```

E=abs(HA/sin(LP));           % excentricite
B=3.08686+7.11355*T;       % arguemnt B pour prendre
                             % en compte des perturbations dues au Saturne
U1=sin(B);
V1=cos(B);
DA=4.5902e-6*V1;           % correction sur la demi-grande axe
A=A+DA;
DLM=5.78402e-3*U1;         % correction sur la longitude moyenne
LM=LM+DLM;
DE=6.3e-6*U1+2.2515e-6*V1; % correction sur l'excentricite
E=E+DE;
DLP=(1.2217e-4*U1-3.4906e-4*V1)/E; % correction sur la longitude du
perihelie
LP=LP+DLP;

% calcule des elements d'orbite

LN=atan(P/Q);              % longitude du noeud ascedent
if Q<0
    LN=LN+pi;
end
IO=2*asin(P/sin(LN));      % inclinaison de l'orbite
AM=LM-LP;                   % anomalie moyenne
AE=AM;                      % anomalie excentrique
for i=1:10
    AE=AM+E*sin(AE);
end

% anomalie vraie
AV=2*atan((sqrt((1+E)/(1-E)))*tan(AE/2));
ARP=LP+AV-LN;               % anomalie de latitude du Jupiter
LA=asin(sin(IO)*sin(ARP));   % latitude ecliptique heliocentrique
LO=acos(cos(ARP)/cos(LA))+LN; % longitude ecliptique heliocentrique
                             % (precision 0.01 degre d'angle)
if LA<0
    LO=2*pi-LO+2*LN;
end

R=A*(1-E*cos(AE));          % rayon vecteur duJupiter (en km)

% coordonnees du Jupiter par rapport au Soleil

X1=R*cos(LA)*cos(LO);
Y1=R*cos(LA)*sin(LO);
Z1=R*sin(LA);

% coordonnees de Jupiter par rapport a la Terre
X2=XS+X1;
Y2=YS+Y1;
Z2=Z1;

LOG=atan(Y2/X2);            % longitude geocentrique de Jupiter

if X2<0
    LOG=LOG+pi;
end

LAG=atan(Z2/sqrt(X2*X2+Y2*Y2)); % latitude geocentrique de Jupiter

% declinaison de Jupiter

```

```

D=asin(sin(LAG)*cos(IE)+cos(LAG)*sin(IE)*sin(LOG));

% ascemsion droite de Jupiter
AD=atan((cos(IE)*sin(LOG)-sin(IE)*tan(LAG))/cos(LOG));

if cos(LOG)<0
    AD=AD+pi;
end

if AD<0
    AD=AD+2*pi;
end

% angle horaire de Jupiter
AH=TS-AD-G;

% calcul des coordonnes horizontales de Jupiter
HC=asin(sin(D)*sin(L)+cos(D)*cos(L)*cos(AH)); % hauteur calcule
A1=sin(L)*cos(AH)-cos(L)*tan(D);
AZ=atan(sin(AH)/A1); % azimut

if A1<0
    AZ=AZ+pi;
end

if AZ<0
    AZ=AZ+2*pi;
end

P=tan(pi/2-abs(HC));
Q=abs(HC)*K;

if Q>=9

    % correction due a la refraction de l'atmosphère (degrés)
    R=0.016*P-1.858e-5*P*P*P+6.17e-8*P^5;

else
    R=0.61-0.15*Q+0.01546*Q*Q-0.00057*Q*Q*Q;
end

HCC=HC+R/K; % hauteur calcule corrigé

d='';
disp(d);

g='-----';
disp(g);
disp(d);

a='DECLINAISON D (en degrés):';
disp(a);
D=floor(D*K*1000)/1000
b='AS. DROITE AD (en degrés):';
disp(b);
ADD=floor(AD*K*1000)/1000
c=' soit (en heures):';
disp(c);
ADh=AD*K/15
disp(d);

e='HAUTEUR H (en degrés):';
f='AZIMUT AZ (en degrés):';

```

```

disp(e)
H=floor(HCC*K*1000)/1000
disp(f)
AZf=floor(AZ*K*1000)/1000
disp(d)
disp(g)

```

Pour le calcul des éphémérides sans prendre en compte les perturbations il faut enlever dans ce programme les termes qui incluent B.

## VI. Conclusion.

Nous venons de présenter les calculs des éléments d'une orbite elliptique ainsi que l'établissement d'une éphéméride. Nous avons représenté dans le tableau ci-dessous les valeurs calculées des coordonnées équatoriales de la planète Jupiter entre 1996 et 2010, valeurs obtenues avec ou sans prise en compte des perturbations, et comparées avec celles que fournit le Bureau des Longitudes :

	<b>DECLINAISON (degrés)</b>		
	<i>calcul sans pert.</i>	<i>calcul avec pert.</i>	<i>bdl</i>
<b>19. 06. 1996</b>	-22,676	-22,673	-22,666
<b>19. 06. 1997</b>	-14,989	-14,989	-14,9902
<b>19. 06. 1998</b>	-2,351	-2,358	-2,3769
<b>19. 06. 1999</b>	9,885	9,878	9,8564
<b>19. 06. 2000</b>	18,853	18,85	18,8381
<b>19. 06. 2001</b>	23,026	23,026	23,0235
<b>19. 06. 2002</b>	22,145	22,143	22,1479
<b>19. 06. 2003</b>	16,854	16,846	16,8587
<b>19. 06. 2004</b>	8,227	8,213	8,2367
<b>19. 06. 2005</b>	-2,405	-2,422	-2,3862
<b>19. 06. 2006</b>	-13,478	-13,491	-13,4515
<b>19. 06. 2007</b>	-21,723	-21,727	-21,7065
<b>19. 06. 2008</b>	-22,11	-22,111	-22,1309
<b>19. 06. 2009</b>	-13,337	-13,348	-13,393
<b>19. 06. 2010</b>	-0,483	-0,502	-0,5476

		<b>ASCENSION (degrés)</b>	
	<b><i>calcul sans pert.</i></b>	<b><i>calcul avec pert.</i></b>	<b><i>bdl</i></b>
<b>19. 06. 1996</b>	285,796	285,831	285,9029
<b>19. 06. 1997</b>	324,462	324,464	324,46
<b>19. 06. 1998</b>	357,617	357,602	357,5592
<b>19. 06. 1999</b>	27,047	27,029	26,9765
<b>19. 06. 2000</b>	55,735	55,722	55,6747
<b>19. 06. 2001</b>	84,291	84,29	84,2525
<b>19. 06. 2002</b>	112,199	112,214	112,1798
<b>19. 06. 2003</b>	138,543	138,571	138,53
<b>19. 06. 2004</b>	163,696	163,732	163,6753
<b>19. 06. 2005</b>	188,996	189,037	188,9557
<b>19. 06. 2006</b>	217,371	217,411	217,2946
<b>19. 06. 2007</b>	251,872	251,897	251,742
<b>19. 06. 2008</b>	291,555	291,548	291,3892
<b>19. 06. 2009</b>	329,535	329,502	329,3745
<b>19. 06. 2010</b>	1,978	1,935	1,8316

La méthode sans perturbation fournit les coordonnées de Jupiter avec une précision d'environ  $0^{\circ}.15$  sur quelques dizaines d'années, alors qu'en tenant compte des perturbations, la précision ne descend pas en-deçà de  $0^{\circ}.10$  ; la différence n'est donc pas notable, même si à long terme les méthodes ne considérant pas les perturbations s'éloignent peu à peu des observations. Ceci justifie la prise en compte des termes correctifs, malgré des temps de calcul qui augmentent exponentiellement avec le nombre de termes utilisés.

Signalons que le lecteur intéressé par la détermination des éléments d'une orbite parabolique pourra se reporter aux ouvrages spécialisés mentionnés en bibliographie.

## VII. Bibliographie

Astronomie & ordinateur, Guy Sérane, Dunod, 1987

Astronomie générale, André DANJON, éd Albert Blanchard, 1986

Astronomie pratique et informatique, C. Dumoulin, J.-P. Parisot, Masson, 1987

Eléments de mécanique céleste, Gianni Pascoli, éd Masson, 1997

Introduction aux éphémérides astronomiques, Bureau des longitudes, 1997

[http://www.bdl.fr/ephem/ephepos/ephepos\\_f1.html](http://www.bdl.fr/ephem/ephepos/ephepos_f1.html)

## VIII. ANNEXE

### **Détermination de la date en millénaires juliens**

L'année julien vaut 365.25 jours civils. Trois années de 365 jours sont suivis d'une année de 366 jours. L'année julienne est donc trop longue de 0.0078 jour civil (l'année tropique vaut actuellement 365.242198781...) et prend en 100 ans presque 1 jour de retard.

Les calculs relatifs à tous les astres requièrent des temps exprimés en millénaires juliens (ou siècles) à partir de J 2000,0.

Le calcul présenté par la suite est valide dans la période 1900- 2099. Le principe consiste à calculer le nombre de jours J qui sépare l'instant considéré de la date du 1.1.2000 à 12 heures, et à diviser ce nombre par 365 250 (ou 36 525) afin de les chiffrer en millénaires juliens (ou siècles julien).

Le calcul de J sera plus facile en considérant que trois années normales succèdent à une année bissextile, et donc que l'année est de 365.25 jours.

Dans ces conditions, pour les première, deuxième et le troisième années normales qui suivent une année bissextile, il importera d'ajouter respectivement un correctif de 0.75, 0.5 et 0.25 jour.

L'algorithme à utiliser est le suivant :

$$J = \text{Rang du jour} + (\text{AN}-2000)*365.25 - 0.5 + \text{correctif.}$$

# TTL MECANIQUE CELESTE

I.	INTRODUCTION.	1
II.	LES SYSTEMES DE COORDONNEES EN ASTRONOMIE DE POSITION.	2
1)	Système de coordonnées azimutales .	3
2)	Système de coordonnées horaires.	4
3)	Système de coordonnées équatoriales.	4
4)	Système de coordonnées écliptiques.	5
III.	ELEMENTS DE MECANIQUE CELESTE.	6
	Eléments de l'orbite d'une planète.	6
	Détermination d'une orbite planétaire - méthode de Gauss.	7
IV.	APPLICATION : CALCUL DES ELEMENTS DE L'ORBITE DE JUPITER.	14
	Calcul des éléments de l'orbite.	14
	Perturbations.	16
V.	CALCULS DES EPHEMERIDES	17
	Introduction	17
	Calcul de la position des planètes	19
	Calcul des éphémérides du Jupiter	21
	Programme : Ephémérides de Jupiter avec des perturbations de Saturn	23
VI.	CONCLUSION.	28
VII.	BIBLIOGRAPHIE	30
VIII.	ANNEXE	31
	Détermination de la date en millénaires juliens	31