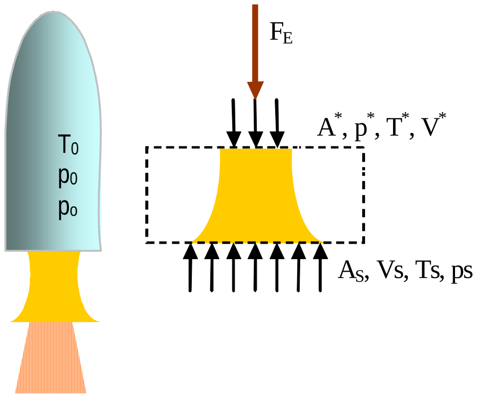
Problema 1. (Ex.1.I-07) Determine las áreas de garganta y de salida en un motor de cohete ideal para dar un empuje estático de 6670 N a 6100 m de altitud en una atmósfera estándar y cuya cámara tiene una presión absoluta de 1.035×10^{6} Pa y una temperatura de 3315 C. Encuentre la velocidad en la garganta. suponga que k=1.4 y R=355 N-m/kgK. igualmente suponga que la presión de salida es igual a la de los alrededores.

Datos:

$T_0 := (3315 + 273)\cdot K$ $\quad k := 1.4$ $\quad F_E := 6670\cdot N$

$p_0 := 1.035\times 10^{6}\cdot Pa$ $\quad R := 355\cdot\frac{J}{kg\cdot K}$ $\quad p_{atm} = 46548\ Pa$



Ecuación de cantidad e movimiento:

$$p_g A_g - p_s A_s + F_E = \rho_g V_g\cdot A_g\cdot(V_s - V_g)$$

Euación de continuidad:

$$\rho_g\cdot V_g\cdot A_g = \rho_s V_s\cdot A_s$$

Combinando estas ecuaciones, se tiene:

$$p_g A_g - p_s\frac{(\rho_g\cdot V_g\cdot A_g)}{(\rho_s V_s)} - F_E = \rho_g V_g\cdot A_g\cdot(V_s - V_g) \qquad (1)$$

Ecuación de la que se puede despejar el área de la garganta. Previamente se hacen los calculos necesarios:

Claculo de las condiciones de estado en la garganta:

Verificamos si la tobera esta estrangulada:

$$\frac{p_{atm}}{p_0} = 0.045$$

ademas para el aire

$$p^*/po= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 0.528$$

como 0.047 es menor que 0.528 la tobera está estrangulada, en la garganta se tienen condiciones sónicas.

la presión en la garganta será:

$$pg=p^*= 0.528\cdot p_0 = 546480\ Pa \qquad p_g = 546480\ Pa$$

$$Tg=T^*= T_0\cdot\left(\frac{2}{k+1}\right) = 2990\ K \qquad T_g = 2990\ K$$

la densidad en la garganta se puede calcular a partir de la ecuación de los gases ideales.

$$\rho^*= p^*/RT^*= \frac{p_g}{R\cdot T_g} = 0.515\ \frac{kg}{m^3} \qquad \rho_g = 0.515\ \frac{kg}{m^3}$$

La velocidad en la garganta, esta dada por:

$$V^*=c= \sqrt{k\cdot R\cdot T_g} = 1219\ \frac{m}{s} \qquad V_g = 1219\ \frac{m}{s}$$

Cálculo de las coniciones de estado en la sección de salida de la tobera:

con $ps := p_{atm}$ calculamos el número de Mach a partir de la condiciones de estancamiento:

$$M := \sqrt{\frac{2}{k-1}\cdot\left[\left(\frac{p_0}{ps}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right]} \qquad \boxed{M = 2.67}$$

Como el flujo es isentropico la temperatura de salida se puede calcular, de la siguiente manera

$$Ts := T_0 \cdot \left(\frac{ps}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \qquad Ts = 1479\,K$$

La densidad del aire a la salida se puede calcular con la ecuación de los gases ideales:

$$\rho s := \frac{ps}{R \cdot Ts} \qquad \rho s = 0.089\,\frac{kg}{m^3}$$

La velocida de salida se calcula a partir de:

$$Vs := M \cdot \sqrt{k \cdot R \cdot Ts} \qquad Vs = 2289.3\,\frac{m}{s}$$

Finalmente a partir de la ecuación 1, se obtiene:

$$\left[p_g A_g - p_s \frac{\left(\rho_g \cdot V_g \cdot A_g\right)}{\left(\rho_s V_s\right)}\right] + F_E = \rho_g V_g \cdot A_g \cdot \left(V_s - V_g\right)$$

$$A_g := \frac{-F_E}{p_g - p_s \frac{\left(\rho_g \cdot V_g\right)}{\left(\rho s\, Vs\right)} - \rho_g V_g \cdot \left(Vs - V_g\right)}$$

$$A_g = 0.053\,m^2$$

$$As := \frac{\left(\rho_g \cdot V_g \cdot A_g\right)}{\left(\rho s\, Vs\right)}$$

$$As = 0.165\,m^2$$