

Cosmologia para pedestres

Sandro Silva e Costa

2º semestre de 2005

“O Universo não é uma idéia minha.
A minha idéia do Universo é que é uma idéia minha.
A noite não anoitece pelos meus olhos,
A minha idéia da noite é que anoitece por meus olhos.
Fora de eu pensar e de haver quaisquer pensamentos
A noite anoitece concretamente
E o fulgor das estrelas existe como se tivesse peso.”

Poema de Alberto Caeiro, um dos 'outros eus' de Fernando Pessoa.

1 Introdução

A cosmologia é um ramo da ciência preocupado com a descrição do universo. Nela, assume-se atualmente que o universo segue o modelo do Big Bang [1]:

“O universo começou em uma violenta explosão que ocorreu há cerca de 15 bilhões de anos atrás: esta é a hipótese moderna que tomou o lugar dos mitos clássicos da Grécia e de Roma, das antigas China e Índia. (...) Talvez daqui a mil anos no futuro, a teoria do Big Bang será ela mesma vista como um mito do século vinte.”

Apesar de algumas (poucas) críticas e problemas, o atual status da teoria do Big Bang pode ser avaliado, por exemplo, pela seguinte citação, retirada de

um livro de divulgação científica, “*As sete maiores descobertas científicas da história*” [2]:

“Este livro identifica as maiores dentre essas descobertas – sete achados tão fundamentais que quase todo o resto do que a humanidade conhece da ciência se baseia neles:

1. A gravidade e as leis básicas da física
2. A estrutura do átomo
3. O Princípio da Relatividade
4. O Big-Bang e a formação do universo
5. A evolução e o Princípio da Seleção Natural
6. A célula e a genética
7. A estrutura da molécula de DNA

Essas são as descobertas do que é (...).”

Por quê? O que há neste modelo do Big Bang que o faz ser o modelo padrão da cosmologia? Na verdade, há ótimas indicações observacionais a favor do modelo do Big Bang. Tais indicações começaram na década de 1920, quando a teoria não existia de forma organizada, com a descoberta, pelo astrônomo Edwin Hubble, do desvio para o vermelho das galáxias, efeito conhecido hoje pelo nome genérico de lei de Hubble. Outra observação importante para o modelo, a descoberta da radiação cósmica de fundo, ocorreu na década de 60, feita por Arno Penzias e Robert Wilson. Mais recentemente, diversas leituras de quantidades (ou abundâncias) de elementos químicos leves – 2H , 3He , 4He , Li – aumentaram a confiança na teoria por estarem de acordo com os valores por ela preditos [3]:

“Presentemente há bom acordo entre as abundâncias primordiais preditas de todos esses 4 elementos e suas abundâncias observadas (...). Este é um feito verdadeiramente notável, e forte evidência de que o modelo padrão é válido em tempos tão iniciais quanto 10^{-2} sec após o bang.”

Dada a importância científica e filosófica de se ter um modelo teórico da evolução do universo, baseado em idéias matemáticas e físicas bem estabelecidas, e que condiz com a realidade até onde se pode observá-la, é importante, então, divulgá-lo. Esta é a idéia básica deste texto. No entanto, a intenção aqui não é apresentar o modelo cosmológico padrão de forma completa ou atraente, mas apresentá-lo de forma introdutória, e com certo rigor matemático. Mesmo assim, esse papel é cumprido muito mais eficientemente do que poderia ser feito aqui em uma infinidade de textos escritos por diversos autores, com diferentes enfoques e profundidades. O que há neste texto é apenas o vislumbre de alguns resultados gerais que podem ser úteis numa primeira visão da cosmologia, como, por exemplo, a dedução de forma simplificada das equações que governariam a evolução do universo e a obtenção de soluções simples dessas equações.

2 Contração e expansão

Num sistema em contração ou expansão homogênea (i.e., igual em todos os pontos) e isotrópica (i.e., igual em todas as direções) pode-se definir o vetor posição \vec{r} , que indica a distância entre dois pontos quaisquer, como sendo uma função do tempo t ,

$$\vec{r}(t) = a(t) r_0 \hat{r}, \quad (1)$$

onde r_0 é uma constante, \hat{r} é o vetor unitário (ou seja, o versor) na direção radial, e $a(t)$ é uma função chamada de fator de escala, que contém a informação sobre a dependência no tempo do vetor posição¹. Derivando esta expressão em relação

¹Pode-se notar que o vetor posição pode ser escrito assim mesmo num sistema que não esteja em contração ou expansão, bastando fazer $a(t)$ uma constante. Deve-se notar ainda que $a(t)$ é uma quantidade adimensional.

ao tempo obtém-se que

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da}{dt} r_0 \hat{r} = \dot{a} \frac{\vec{r}}{a}, \quad (2)$$

onde \dot{a} significa a derivada da função $a(t)$ em relação ao tempo. Deste último resultado pode-se notar que, num sistema em expansão a distância entre dois pontos aumenta ou diminui com uma velocidade de aproximação ou afastamento dada pela relação linear

$$\vec{v} = H\vec{r}, \quad (3)$$

onde $H = H(t) \equiv \dot{a}/a$ é uma função que indica o afastamento ou a aproximação entre os pontos². Na cosmologia, esta relação foi verificada pelo astrônomo americano Edwin Hubble, em 1929, que notou que todas as galáxias estudadas por ele se afastavam da nossa galáxia, a Via Láctea, com $H > 0$. Tal descoberta foi vista como indicação de que o universo está se expandindo de forma homogênea e isotrópica. O valor atual da função H , que se escreve³ H_0 , é hoje conhecida como constante de Hubble, e a relação linear (3), com H_0 no lugar de H , é conhecida como lei de Hubble.

O que Hubble observou, na verdade, foi o desvio para o vermelho do comprimento de onda da luz emitida pelas galáxias. Tal efeito pode ser entendido lembrando que o comprimento de onda λ e a frequência ν de uma emissão luminosa são tais que $\lambda\nu = c$, onde c é uma constante, a velocidade da luz, que vale aproximadamente $300.000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Num universo em expansão um comprimento de onda λ_0 , que é uma distância, é ‘alongado’ de acordo com a relação

$$\lambda(t) = a(t) \lambda_0, \quad (4)$$

enquanto uma frequência ν_0 vai ser ‘comprimada’ de acordo com

$$\nu(t) = \frac{\nu_0}{a(t)}. \quad (5)$$

Se dois objetos luminosos idênticos vão se separando devido à expansão do universo a luz de um deles, tal como vista pelo outro, vai estar ‘desviada’ para o vermelho.

²É importante perceber que $1/H$ tem dimensão de tempo.

³Em cosmologia é comum usar o índice 0 subscrito a uma quantidade que varia no tempo para indicar seu valor atual. Assim, se $f = f(t)$, f_0 é o valor atual de f , no tempo atual t_0 .

Um modo de se quantificar esse desvio consiste em usar o *redshift*, z , definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{observado}} - \lambda_{\text{emitido}}}{\lambda_{\text{emitido}}} = \frac{\lambda_{\text{observado}}}{\lambda_{\text{emitido}}} - 1. \quad (6)$$

Num universo em expansão nota-se que num tempo t_1 tem-se $\lambda_1 = a_1 \lambda_0$ e num tempo t_2 tem-se $\lambda_2 = a_2 \lambda_0$, ou seja,

$$\frac{\lambda_1}{a_1} = \frac{\lambda_2}{a_2}. \quad (7)$$

Assim,

$$z + 1 = \frac{a_{\text{observado}}}{a_{\text{emitido}}}, \quad (8)$$

o que permite avaliar a evolução do fator de escala e, conseqüentemente, a expansão do universo, por meio de medidas do redshift de fontes luminosas distantes que sejam semelhantes a fontes luminosas próximas.

O conceito de redshift aparece na física clássica associado ao efeito Doppler, que é um efeito ligado à aparente distorção das ondas emitidas por uma fonte em movimento. De acordo com o efeito Doppler clássico, $z = v/c$, onde v é a velocidade de movimento da fonte emissora das ondas. Assim, a relação observada por Hubble foi

$$z = H_0 \frac{r}{c}, \quad (9)$$

que equivale à equação (3).

3 Gravidade e cosmologia

A lei de Hubble, quando usada em conjunto com noções básicas da física clássica, Newtoniana, leva a uma equação diferencial descrevendo o comportamento do fator de escala em função do tempo. Nesse tipo de análise considera-se um sistema em que a única força em atuação é a gravidade. Nesse sistema a energia potencial E_p de uma partícula de massa m , sob a influência de uma outra partícula de massa M , é dada pela expressão

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}, \quad (10)$$

onde r é a distância entre as duas partículas e G é a constante da gravitação universal de Newton. A energia cinética E_c deste sistema, por sua vez, depende das velocidades de cada uma das partículas ou, tomando a partícula de massa M como estando imóvel no centro do sistema [4],

$$E_c = \frac{1}{2}m (v_r^2 + r^2v_\theta^2) = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad (11)$$

onde v_r e v_θ são, respectivamente, as componentes radial e angular da velocidade da partícula de massa m , e L é o momento angular da partícula m .

Pode-se considerar agora que a velocidade radial é a soma da velocidade radial própria v_{0r} da partícula m com uma velocidade radial de afastamento ou de aproximação das partículas devida à contração ou expansão do sistema. Assim,

$$v_r = v_{0r} + Hr. \quad (12)$$

Logo, a energia total E do sistema é

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m (v_{0r} + Hr)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r}. \quad (13)$$

Os termos desta expressão podem ser reagrupados, de modo que se pode escrever

$$\left(H + \frac{v_{0r}}{r}\right)^2 - \frac{2E}{mr^2} = \frac{2GM}{r^3} - \frac{L^2}{m^2r^4}. \quad (14)$$

A energia total do sistema pode ser negativa, nula ou positiva, de forma que é conveniente usar a parametrização $k \equiv -2E/mr_0^2$, com k sendo uma constante que pode ser negativa, nula ou positiva. Já a densidade total de matéria, ρ , deste sistema é

$$\rho = \frac{M + m}{V} = \frac{M + m}{4\pi r^3/3}, \quad (15)$$

ou seja,

$$\frac{M}{r^3} = \frac{4\pi\rho}{3} - \frac{m}{r^3}. \quad (16)$$

Substituindo esses resultados em (14) tem-se então que

$$\left(H + \frac{v_{0r}}{r}\right)^2 + k\frac{r_0^2}{r^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{2Gm}{r^3} - \frac{L^2}{m^2r^4}. \quad (17)$$

Se, finalmente, a distância r é grande o bastante em relação a v_{0r} , L e Gm – em outras palavras, se as distâncias envolvidas são muito grandes (que é o que acontece em cosmologia) – pode-se desprezar os termos envolvendo estas quantidades⁴ e escrever-se somente

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (18)$$

Esta equação diferencial de primeira ordem, não-linear, obtida aqui por considerações simples⁵, para um sistema de apenas duas partículas, é a versão Newtoniana de uma equação relativística chamada de equação de Friedmann. Uma dedução mais adequada é feita usando-se todo o aparato da Relatividade Geral, onde se tem uma reinterpretação de cada um dos termos presentes. Por exemplo, na Relatividade Geral ρ representa a densidade de matéria e energia do sistema, que pode ter uma dependência funcional em a bastante diferente da densidade de matéria do sistema em consideração, que é proporcional apenas a r^{-3} e, portanto, proporcional a a^{-3} , ou seja, na Relatividade Geral, é importante saber qual a forma da função $\rho = \rho(a)$. Uma explicação mais detalhada de como pode ser essa dependência funcional de ρ pode ser obtida através de considerações termodinâmicas.

Por fim, na Relatividade Geral faz sentido considerar uma constante cosmológica Λ , devida talvez a uma densidade de energia do vácuo, enquanto a constante k , conhecida como parâmetro de curvatura, é reinterpretada em termos geométricos.

4 Uma equação de segunda ordem

Como uma espécie de exercício matemático, pode-se buscar uma equação envolvendo a segunda derivada do fator de escala, que talvez seja mais fácil de se

⁴Outra possibilidade de resultado semelhante é que se tenha $v_{0r} = L = 0$ e $M \gg m$.

⁵Outras maneiras mais rigorosas de se obter a versão Newtoniana da equação de Friedmann, envolvendo um número grande de partículas, podem ser encontradas na literatura, como, por exemplo, no livro clássico de cosmologia de D.W. Sciama [5], ou no texto mais moderno de R. D’Inverno [6].

resolver ou traga novas informações. Partindo da equação de Friedmann, multiplicada por a^2 , e derivando em relação ao tempo os dois lados, obtém-se a expressão

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho). \quad (19)$$

Multiplicando este resultado por a^{-2} e reagrupando os termos, vem que

$$2H \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi G}{3}\rho \right] = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}, \quad (20)$$

onde $H \equiv \dot{a}/a = a^{-1} (da/dt)$. Logo,

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{4\pi G}{3} \frac{d\rho}{dt} \frac{a}{\frac{da}{dt}}, \quad (21)$$

ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{4\pi G a}{3} \frac{d\rho}{da}. \quad (22)$$

Assim, aqui também é importante obter a dependência funcional de ρ com o fator de escala a . Portanto, deve-se estudar como a termodinâmica permite que seja a função $\rho = \rho(a)$.

5 Noções de termodinâmica

A descrição física de um sistema é, em geral, feita através de equações que mostram relações existentes entre as quantidades mensuráveis que podem ser usadas na caracterização do sistema⁶. Em termodinâmica, as grandezas usadas para tal descrição podem ser divididas em dois grupos: o das variáveis extensivas, que variam em proporção direta à massa do sistema, e o das variáveis intensivas, que não seguem esta proporção.

As variáveis extensivas mais importantes são a entropia S , a energia interna U , o volume V e o número de moles N do sistema. Uma relação entre estas quantidades é do tipo

$$S = S(U, V, N) \quad (23)$$

⁶Deve-se ressaltar que uma explanação mais detalhada dos conceitos de termodinâmica usados aqui pode ser encontrada em vários textos [7]–[9].

ou

$$U = U(S, V, N) . \quad (24)$$

Como essas variáveis são extensivas pode-se notar que, por exemplo, vale a relação

$$S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N) , \quad (25)$$

onde λ é uma quantidade escalar (um número) qualquer. Derivando esta expressão em relação a λ obtém-se que

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} U + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} V + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} N \\ &= \frac{1}{T} U + \frac{p}{T} V - \frac{\mu}{T} N , \end{aligned} \quad (26)$$

valendo as definições

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} \equiv \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} \equiv \frac{p}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} \equiv -\frac{\mu}{T}, \quad (27)$$

onde T é a temperatura, p é a pressão e μ o potencial químico do sistema. Esta última expressão, conhecida como relação de Euler, pode ser reescrita usando-se as definições de entropia por mol, $s \equiv S/N$, energia por mol, $u = U/N$, densidade molar, $n = N/V$, e densidade de energia do sistema, $\rho = U/V$, ou seja,

$$nsT = \rho + p - \mu n . \quad (28)$$

Da equação (23), em conjunto com (27), pode-se obter a diferencial da entropia,

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_{V,N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} dN \\ &= \frac{1}{T} (dU + pdV - \mu dN) , \end{aligned} \quad (29)$$

ou

$$Td(snV) = d(\rho V) + pdV - \mu d(nV) . \quad (30)$$

Expandindo e reagrupando os termos desta última expressão e usando (28), tem-se então que

$$ds = \frac{1}{nT} \left[d\rho - (\rho + p) \frac{dn}{n} \right]. \quad (31)$$

Esta relação bastante geral é conhecida como lei de Gibbs. Note que nela a entropia molar s é vista como uma função das variáveis independentes ρ e n , ou seja, $s = s(\rho, n)$.

No entanto, pode-se considerar também uma descrição termodinâmica que use como variáveis independentes outros conjuntos além das variáveis extensivas e quantidades ligadas a elas. Por exemplo, pode-se usar a temperatura como uma variável independente, de modo que passa-se a ter o sistema de equações

$$\begin{cases} s = s(n, T) \\ \rho = \rho(n, T) \end{cases}. \quad (32)$$

Nesse caso, a temperatura pode ser vista como um parâmetro que rotula diferentes estados do sistema, e o sistema acima pode ser visto com um sistema de equações paramétricas da equação mais geral $s = s(\rho, n)$.

De qualquer modo, pode-se escrever

$$s = s(n, T), \quad (33)$$

e, assim,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial n} \right)_T dn + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_n dT, \quad (34)$$

ou ainda

$$\rho = \rho(n, T), \quad (35)$$

com

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T dn + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n dT. \quad (36)$$

Substituindo (36) em (31), e comparando o que se obtém com (34) vem que

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_n = \frac{1}{nT} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \quad (37)$$

e

$$\left(\frac{\partial s}{\partial n}\right)_T = \frac{1}{n^2 T} \left[n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_T - (\rho + p) \right]. \quad (38)$$

Como deve-se ter

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right) = \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial T} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial n} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial n}\right), \quad (39)$$

consegue-se finalmente que

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n = (\rho + p) - n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_T. \quad (40)$$

Esse é um exemplo de uma manipulação algébrica que leva a relações conhecidas como relações de Maxwell.

6 Entropia e número de partículas

Até aqui tudo que foi escrito é bastante geral, válido para um sistema qualquer. No entanto, há sistemas físicos de interesse em que não há variação de entropia. Tais sistemas são ditos isoentrópicos e neles $dS = 0$. Outros sistemas interessantes são os em que há conservação do número de partículas, ou seja, $dN = 0$. Num sistema que ao mesmo tempo seja isoentrópico e tenha conservação de partículas vale então que

$$\begin{cases} V d\rho + \rho dV + p dV = 0 \Rightarrow V d\rho = -(\rho + p) dV \\ V dn + n dV = 0 \Rightarrow V dn = -n dV \end{cases}. \quad (41)$$

Partindo de (36) pode-se, então, escrever para esse sistema que

$$-\frac{\rho + p}{V} dV = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_T \frac{n}{V} dV + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_n dT, \quad (42)$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_n dT = \left[n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_T - (\rho + p) \right] \frac{dV}{V}. \quad (43)$$

Substituindo (40) nesse resultado vem que

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_n dT = - \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n \right] \frac{dV}{V}, \quad (44)$$

ou simplesmente

$$\frac{dT}{T} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_n \frac{dV}{V}. \quad (45)$$

7 Equações de estado

Uma equação que relacione as variáveis intensivas p , μ e T com as variáveis extensivas U , S , V e N é conhecida genericamente como equação de estado do sistema. São exemplos as relações

$$p = p(U, V, N) \quad (46)$$

e

$$p = p(\rho, n). \quad (47)$$

Uma forma simples de equação de estado é do tipo linear, isto é, por exemplo,

$$p = w\rho, \quad (48)$$

onde w é um número. Em geral, há apenas duas equações de estado independentes definindo as propriedades de um sistema. Para o gás ideal, por exemplo, a equação mais conhecida é $pV = NRT$, onde R é uma constante. Notando-se que o produto pV tem dimensões de energia, pode-se supor que $pV = NRT = \lambda U$, onde λ é uma constante numérica. Assim, as duas equações independentes que descrevem o gás ideal podem ser

$$\begin{cases} T = \lambda u/R \\ p = \lambda n u \end{cases}, \quad (49)$$

de onde sai também que $p = \lambda\rho$. Na verdade, considerações físicas mais cuidadosas levam a se concluir que para o gás ideal $p = 2\rho/3$.

Usando a relação linear (48) em (45) vem que

$$\frac{dT}{T} = -w \frac{dV}{V} \quad (50)$$

ou

$$TV^w = T_0 V_0^w, \quad (51)$$

onde T_0 e V_0 são constantes. Agora, combinando (41), (45) e (48), com $w \neq 0$, pode-se escrever ainda que

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1+1/w} \quad (52)$$

e

$$n = n_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1/w}, \quad (53)$$

onde ρ_0 e n_0 são constantes de integração.

O caso $w = 0$ merece uma observação: nesse caso a equação de estado linear (48) fornece $p = 0$, enquanto que a equação (51) fornece $T = T_0$. Isto significa que tal sistema, em que $w = 0$, não apresenta mudança de temperatura num processo isoentrópico. Na prática, isso é o que ocorre com matéria comum, ou seja, para a matéria comum $w = 0$.

Já no caso da radiação emitida por um corpo negro vale a lei de Stefan-Boltzmann,

$$u(T) \propto T^4. \quad (54)$$

Assim, comparando este resultado com a expressão (52) nota-se que, para a radiação, $w = 1/3$.

8 Contração e expansão revisitadas

Um sistema em contração ou expansão uniforme, homogênea e isotrópica pode ser descrito pelo vetor posição

$$\vec{r} = a(t) r_0 \hat{r}, \quad (55)$$

onde \hat{r} é o vetor constante unitário na direção radial e $a(t)$ é uma função que varia no tempo, conhecida como fator de escala do sistema. Assim $r = a(t) r_0$ e, portanto, $V \propto a^3$. Substituindo este resultado em (52) e usando (51) nota-se que, para um sistema em contração ou expansão homogênea, isotrópica, isoentrópica e com conservação do número de partículas, obedecendo à equação de estado linear (48), vale a relação

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}, \quad (56)$$

onde a_0 é uma constante.

Para matéria comum $w = 0$ e, assim,

$$\rho_{mat} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (57)$$

enquanto que para radiação $w = 1/3$ e, portanto,

$$\rho_{rad} = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (58)$$

9 Densidade de energia e o fator de escala

Num sistema isoentrópico com conservação do número de partículas vale que

$$dU + pdV = 0, \quad (59)$$

ou

$$d\rho = -(\rho + p) \frac{dV}{V}. \quad (60)$$

Deve-se notar que esta relação não é alterada se são feitas simultaneamente as substituições $\rho \rightarrow \rho + \lambda$ e $p \rightarrow p - \lambda$, onde λ é uma constante arbitrária. Agora, como $V = 4\pi r^3/3$ e $r = a(t) r_0$ então pode-se escrever que

$$d\rho = -3(\rho + p) \frac{da}{a}. \quad (61)$$

Usando-se neste último resultado a equação de estado linear $p = w\rho$, tem-se a relação

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w) \frac{da}{a}, \quad (62)$$

que pode ser facilmente integrada para obter-se

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3(1+w)}, \quad (63)$$

que é um resultado já obtido anteriormente.

10 Equações para o fator de escala

Substituindo o resultado obtido na equação (61) na equação de segunda ordem para o fator de escala, equação (22), verifica-se que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho - 4\pi G(\rho + p), \quad (64)$$

ou seja,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (65)$$

Multiplicando esta equação por 2 e somando o resultado com a equação de Friedmann original, obtem-se por fim que

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (66)$$

Logo, em resumo, há duas equações diferenciais ditando o comportamento do fator de escala $a(t)$, uma envolvendo a densidade de energia ρ ,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (67)$$

e outra envolvendo a pressão p ,

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp. \quad (68)$$

Tais equações podem ser generalizadas substituindo-se simultaneamente ρ por $\rho + \lambda$ e p por $p - \lambda$, onde λ é uma constante arbitrária. Pondo $\Lambda \equiv 8\pi G\lambda$, onde Λ leva o nome de constante cosmológica⁷, tem-se assim que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (69)$$

⁷Note que a constante cosmológica tem as mesmas dimensões do quadrado da constante de Hubble, isto é, s^{-2} .

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp + \Lambda. \quad (70)$$

Para resolver estas equações é necessário fazer uso de considerações termodinâmicas que liguem a densidade de energia e a pressão. Quem faz isso é uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$, cujo exemplo padrão é dado pela equação linear $p = w\rho$.

11 Modelos cosmológicos simples

O ponto de partida para a maioria dos modelos cosmológicos modernos consiste em um conjunto de equações envolvendo a pressão p e a densidade de energia ρ de cada um dos componentes do universo, e o fator de escala a , que representa a evolução do espaço [12]. Sumariamente estas equações são a equação de Friedmann com constante cosmológica,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (71)$$

obtida das equações cosmológicas da Relatividade Geral com o uso de umas poucas condições gerais,

$$d(\rho a^3) + pd(a^3) = 0, \quad (72)$$

que representa a conservação de energia, e uma equação de estado, i.e, uma relação entre p e ρ , que nos modelos mais simples consiste da relação linear

$$p = w\rho = (\gamma - 1)\rho, \quad (73)$$

onde $\gamma \equiv w + 1$ é, tal como w , um parâmetro que indica o tipo de fluido em consideração. Usando esta forma linear, com um único fluido, em (72) obtem-se

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3\gamma}. \quad (74)$$

A partir deste resultado pode-se obter expressões para o fator de escala a por substituição em (71).

Quando $\Lambda = 0$ é útil definir o tempo conforme η pela relação $ad\eta = dt$, para obter-se a equação diferencial

$$\frac{1}{a^4} \left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3\gamma}, \quad (75)$$

com a solução geral

$$a(\eta) = \begin{cases} \left(\frac{8\pi G}{3k} \rho_0 a_0^{3\gamma} \right)^{-1/(2-3\gamma)} \text{sen}^{-2/(2-3\gamma)} \left[\sqrt{k} \left(\frac{3\gamma-2}{2} \right) \eta \right] & , \quad \gamma \neq 2/3 \\ \exp \left[\left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 - k \right) \eta \right] & , \quad \gamma = 2/3 \end{cases}. \quad (76)$$

Para alguns valores de γ não é difícil converter esta solução para outra em termos do tempo cosmológico t . Por exemplo,

$$a(t) = \begin{cases} \left[2t \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^4} - kt^2 \right]^{1/2} & , \quad \gamma = 4/3 \\ \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 - k \right)^{1/2} t & , \quad \gamma = 2/3 \end{cases}. \quad (77)$$

Quando $\Lambda > 0$ é possível obter soluções analíticas também apenas para alguns valores de γ , usando-se, por exemplo, a substituição $z = a^{3\gamma/2}$, que fornece a equação diferencial

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{9\gamma^2 k}{4} z^{2-\frac{2}{3\gamma}} = 6\pi\gamma^2 G \rho_0 a_0^{3\gamma} + \frac{3\gamma^2 \Lambda}{4} z^2. \quad (78)$$

Deve-se notar que essa substituição não é válida para $\gamma = 0$. Outra substituição interessante é $a = 1/u$, que leva à equação diferencial

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + ku^4 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^{3\gamma} u^{3\gamma+2} + \frac{\Lambda}{3} u^2. \quad (79)$$

Assim, pode-se obter como soluções para o fator de escala

$$a(t) = \begin{cases} \left[\sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^4} \left(\frac{\text{senh } 2t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \right) - k \left(\frac{\text{senh } t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \right)^2 \right]^{1/2} & , \quad \gamma = 4/3 \\ \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 - k} \left(\frac{\text{senh } t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \right) & , \quad \gamma = 2/3 \end{cases}. \quad (80)$$

Não é difícil perceber que tais soluções, no limite $\Lambda = 0$, recaem naquelas obtidas para a equação de Friedmann sem constante cosmológica.

As soluções analíticas apresentadas acima – equações (77) e (80) – não representam soluções totalmente corretas, pois o universo não possui um único tipo de fluido, mas podem servir de guia para modelos mais realistas. Deve-se notar, no entanto, que em todas estas soluções

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0, \quad (81)$$

ou seja, de acordo com estas soluções o universo teria começado de um ponto sem volume⁸. Esta é a essência da teoria do Big Bang.

12 Parâmetros cosmológicos

Diversas quantidades que podem ser medidas em observações cosmológicas são definidas a partir do fator de escala e da equação de Friedmann. Tais quantidades são conhecidas como parâmetros cosmológicos. Por exemplo, o parâmetro de desaceleração q_0 é definido como

$$q_0 \equiv - \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \Big|_{t=t_0} = - \frac{\ddot{a}}{aH^2} \Big|_{t=t_0}. \quad (82)$$

Tal parâmetro aparece a partir da expansão em série de Taylor do fator de escala ao redor do tempo atual t_0 :

$$a(t) = a(t_0) + \frac{da}{dt} \Big|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{d^2a}{dt^2} \Big|_{t=t_0} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \quad (83)$$

Assim, lembrando que H_0 é a constante de Hubble medida no tempo atual t_0 , vem que

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) + \left[\left(\frac{1}{a} \right) \left(\frac{d^2a}{dt^2} \right) \right]_{t=t_0} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \quad (84)$$

ou seja,

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - q_0 H_0^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \quad (85)$$

⁸Deve-se notar, porém, que a equação de Friedmann com constante cosmológica e equação de estado linear também aceita soluções estáticas (i.e, que não variam no tempo) para o fator de escala $a(t)$.

Note-se que a equação envolvendo a segunda derivada do fator de escala, equação (65), generalizada para conter a constante cosmológica,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (86)$$

vale para qualquer tempo, incluindo o tempo atual t_0 , e assim,

$$q_0 H_0^2 = \frac{4\pi G}{3}(\rho_0 + 3p_0) - \frac{\Lambda}{3}, \quad (87)$$

onde ρ_0 e p_0 são, respectivamente, os valores atuais da densidade de matéria-energia do universo e da pressão. Usando a equação de estado linear $p = w\rho$, e supondo que pode haver diferentes tipos de matéria e energia no universo, tal relação pode ser escrita como

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3H_0^2} \sum_w (1 + 3w) \rho_{w,0} - \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \quad (88)$$

É interessante notar que a quantidade H^2/G tem as dimensões de uma densidade e, por isso, define-se a partir dela uma densidade crítica, ρ_c , tal que

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (89)$$

Logo, definindo⁹ $\Lambda \equiv 8\pi G\rho_\Lambda$, tem-se que

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_w (1 + 3w) \frac{\rho_{w,0}}{\rho_{c,0}} - \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{c,0}}. \quad (90)$$

Por fim, a razão entre uma densidade atual qualquer $\rho_{w,0}$ e a densidade crítica atual $\rho_{c,0}$ recebe o nome de parâmetro de densidade, $\Omega_{w,0}$, ou seja,

$$\Omega_{w,0} \equiv \frac{\rho_{w,0}}{\rho_{c,0}}. \quad (91)$$

Substituindo essa definição na última expressão para q_0 vem que

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_w (1 + 3w) \Omega_{w,0} - \Omega_\Lambda. \quad (92)$$

⁹Lembre que Λ tem as mesmas dimensões que H^2 e, portanto, a quantidade Λ/G também tem as dimensões de uma densidade.

Se o universo, por exemplo, contiver apenas matéria comum, com $w = 0$, e radiação, com $w = 1/3$, além da constante cosmológica, tem-se que

$$q_0 = \Omega_{rad,0} + \frac{1}{2}\Omega_{mat,0} - \Omega_\Lambda. \quad (93)$$

Voltando agora à equação de Friedmann, nota-se que ela pode ser escrita usando-se a densidade crítica ρ_c , pois

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = H^2 + \frac{k}{a^2} = H^2 \left(1 + \frac{k}{a^2 H^2}\right), \quad (94)$$

ou seja,

$$1 + \frac{k}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (95)$$

Lembrando das definições do parâmetro de densidade e da densidade associada à constante cosmológica vem, por fim, que

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \sum_w \Omega_w + \Omega_\Lambda - 1. \quad (96)$$

Tal expressão mostra que o valor do parâmetro de curvatura está diretamente ligado à soma das densidades das diferentes componentes do universo. Por exemplo, se o universo contiver apenas matéria comum, radiação e a constante cosmológica, tem-se que

$$k = a_0^2 H_0^2 (\Omega_{mat,0} + \Omega_{rad,0} + \Omega_\Lambda - 1). \quad (97)$$

É possível ainda definir uma densidade de curvatura, tal que

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2} = 1 - \left[\sum_w \Omega_w + \Omega_\Lambda \right]. \quad (98)$$

Outra definição bastante encontrada na literatura das observações cosmológicas é a do parâmetro de Hubble h , que envolve a ‘normalização’ da constante de Hubble,

$$h \equiv H_0/100, \quad (99)$$

válida quando H_0 é medida em $km \cdot s^{-1}/Mpc$.

Quantidade	Símbolo	Valor	Fonte
constante de Hubble	H_0	$70 \pm 7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	[13]
parâmetro de desaceleração	q_0	$-0,55 \pm 0,2$	[14]
idade do universo	t_0	$(13,5 \pm 1,3) \times 10^9 \text{ anos}$	[13]
distância de Hubble	$d_H(t_0)$	$4300 \pm 400 \text{ Mpc}$	[13]
temperatura da RCF	T_0	$2,725 \pm 0.001 \text{ K}$	[13]
razão bárions-fótons	η	$5,5 \times 10^{-10}$	[13]
densidade crítica	ρ_c	$(8,3 \pm 1,7) \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}$	[13]
		$(9,2 \pm 1,8) \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$	[13]
parâmetro de densidade total	Ω_0 ou Ω_T	$1,00 \pm 0,02$	[13]
		$1,11 \pm 0,07$	[14]
radiação	$\Omega_{r,0}$	$8,4 \times 10^{-5}$	[13]
bárions	$\Omega_{b,0}$	$0,04 \pm 0,01$	[13]
matéria	$\Omega_{m,0}$	$0,3 \pm 0,1$	[14]
‘energia escura’	$\Omega_{\Lambda,0}$	$\sim 0,7$	[13]

Tabela 1: Tabela de algumas quantidades observáveis da cosmologia, com os valores medidos recentemente.

Quantidade	Método	Referência
Ω_m	fração de bárions em aglomerados	[14]
	razão entre luz e massa em aglomerados	[14]
	espectro das flutuações de densidade	[14]
	evolução do número de aglomerados	[14]
	velocidades peculiares	[14]
q_0	diagrama de Hubble para supernovas	[14]
Ω_T	anisotropias da radiação cósmica	[14]

Tabela 2: Tabela citando alguns métodos de determinação de parâmetros cosmológicos [14].

13 Curvatura

O conceito de curvatura é bastante intuitivo: a superfície de uma esfera é encurvada, enquanto uma folha de papel é plana, sem curvatura. Assim, quando se representa a superfície da Terra, que é esférica, em mapas, que são folhas de papel, ocorrem deformações, que podem ser quantificadas. Para se mapear a superfície de uma esfera num plano pode-se, por exemplo, colocar a esfera sobre o plano. O ponto de contato entre a folha e o plano passa a ser o polo inferior enquanto o ponto oposto na superfície da esfera fica sendo o polo superior. A correspondência de cada ponto da superfície da esfera com pontos do plano é feita a partir das retas que saem do polo superior da esfera, pois cada reta que sai desse polo em direção ao plano intercepta a superfície da esfera em um único ponto e prossegue até alcançar um único ponto do plano. Tal tipo de mapeamento é chamado de projeção estereográfica da esfera e, nesse caso, a distância entre dois pontos na superfície da esfera é diferente da distância entre os pontos equivalentes no plano.

Para uma esfera de raio R a superfície obedece à relação

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (100)$$

que é satisfeita pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}, \quad (101)$$

de modo que a superfície da esfera, que é bidimensional, é descrita por duas coordenadas, θ e φ .

A esfera, entretanto, é tridimensional. Assim, a esfera vive imersa no espaço tridimensional euclidiano, onde a distância infinitesimal $d\ell$ entre dois pontos é dada por

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (102)$$

Usando nessa relação as equações paramétricas da superfície da esfera, a distância infinitesimal entre dois pontos na superfície da esfera é

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2). \quad (103)$$

No caso da projeção estereográfica, usando os dois polos da esfera, P_I , que é o ponto de contato entre a esfera e o plano, e P_S que é o polo superior, o ponto central da esfera, C , um ponto P qualquer da superfície da esfera e seu equivalente P' no plano, pode-se construir dois triângulos, um isósceles, P_SCP , e outro retângulo, $P_S P_I P'$. O ângulo central $\widehat{P_S C P}$ do triângulo isósceles é θ , enquanto o ângulo superior $\widehat{P P_S C}$ é o mesmo que o ângulo $\widehat{P' P_S P_I}$ do triângulo retângulo $P_S P_I P'$. Das relações entre esses triângulos sai que a distância, no plano, do ponto P' ao polo P_I é proporcional à cotangente de $\theta/2$. Explicitamente, rotulando as coordenadas do plano de u e v vem que

$$\begin{cases} u = 2R \cot \frac{\theta}{2} \cos \varphi \\ v = 2R \cot \frac{\theta}{2} \sin \varphi \end{cases}, \quad (104)$$

de modo que, após alguma matemática, obtem-se

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \frac{du^2 + dv^2}{\left(1 + \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right)^2}. \quad (105)$$

A superfície de uma esfera é uma versão bidimensional da circunferência, que é uma linha fechada. Do mesmo modo pode-se construir uma superfície hiperbólica, que é o equivalente bidimensional de uma hipérbole. No entanto, enquanto a esfera vive no espaço euclidiano tridimensional, a superfície hiperbólica, representada pela equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = -R^2, \quad (106)$$

vive num espaço não-euclidiano, onde a distância infinitesimal $d\ell$ é

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2. \quad (107)$$

As equações paramétricas da superfície hiperbólica podem ser

$$\begin{cases} x = R \sinh \theta \cos \varphi \\ y = R \sinh \theta \sin \varphi \\ z = R \cosh \theta \end{cases}, \quad (108)$$

de modo que a superfície hiperbólica, que é bidimensional, é também descrita por duas coordenadas, θ e φ , com o elemento de linha

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2) . \quad (109)$$

Analogamente ao que é feito com a superfície esférica, pode-se também projetar estereograficamente a superfície hiperbólica num plano, usando-se as equações

$$\begin{cases} u = 2R \tanh \frac{\theta}{2} \cos \varphi \\ v = 2R \tanh \frac{\theta}{2} \sin \varphi \end{cases} , \quad (110)$$

o que, novamente após alguma matemática, leva a

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\varphi^2) = \frac{du^2 + dv^2}{\left(1 - \frac{u^2+v^2}{4R^2}\right)^2} . \quad (111)$$

Os resultados para as projeções no plano das superfícies esférica e hiperbólica podem ser generalizados numa única expressão,

$$d\ell^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\left(1 + k \frac{u^2+v^2}{4}\right)^2} , \quad (112)$$

onde $k = 1/R^2$ para a superfície esférica e $k = -1/R^2$ para a superfície hiperbólica. Esta quantidade, k , é denominada a curvatura da superfície. Logo, uma esfera tem uma superfície com curvatura positiva, constante, enquanto uma superfície hiperbólica tem uma curvatura negativa, também constante. O caso em que $k = 0$ é o do plano, que não possui curvatura.

Outro modo de escrever o resultado genérico dado pela equação (112) é obtido a partir do uso de coordenadas polares no plano, dadas pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} u = \rho \cos \Omega \\ v = \rho \sin \Omega \end{cases} , \quad (113)$$

que levam a

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2}{\left(1 + \frac{k\rho^2}{4}\right)^2} . \quad (114)$$

Uma outra transformação,

$$r = \rho \left(1 + \frac{k\rho^2}{4} \right)^{-1}, \quad (115)$$

equivalente a

$$\rho = \frac{2}{kr} \left(1 - \sqrt{1 - kr^2} \right), \quad (116)$$

produz, por sua vez,

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (117)$$

Assim, esta é uma expressão bastante geral para a distância infinitesimal entre dois pontos de uma superfície bidimensional de curvatura constante, seja essa curvatura positiva, negativa ou nula. Fazer a generalização desta expressão para uma hipersuperfície tridimensional é bastante simples:

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right). \quad (118)$$

Na teoria da relatividade dá-se ao tempo um status equivalente ao das dimensões espaciais. Assim, medem-se distâncias não mais no espaço, mas no espaço-tempo, de forma que tem-se o intervalo infinitesimal ds entre dois eventos dado como¹⁰

$$ds^2 = dt^2 - d\ell^2. \quad (119)$$

Num universo em que o espaço está em expansão ou contração as distâncias espaciais variam como o tempo, e deve-se levar em conta o fator de escala $a(t)$, ou seja, nessa caso a expressão do intervalo invariante passa a ser

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\ell^2. \quad (120)$$

Substituindo nesse resultado a expressão para $d\ell$ da equação (118) vem que

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right]. \quad (121)$$

¹⁰Note que aqui está se usando que $c = 1$.

Tal expressão leva o nome de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson Walker (FLRW), em homenagem aos pesquisadores que a utilizaram independentemente em seus trabalhos pioneiros sobre cosmologia.

Um outro modo de se apresentar esse resultado consiste em colocar-se em evidência o fator de escala e definir-se um tempo conforme η , de modo que tem-se

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (122)$$

onde $dt = a d\eta$.

14 As soluções de de Sitter

Um bom exemplo, de importância histórica, da relevância da curvatura no estudo de possíveis soluções cosmológicas é dado pelas assim chamadas soluções de de Sitter, que representam soluções simples das equações de Einstein da relatividade geral (ou, equivalentemente, da equação de Friedmann) na ausência de matéria, isto é, no vácuo, e com constante cosmológica Λ positiva¹¹.

A forma mais comum dessa família de soluções é representada pela expressão do elemento de linha do espaço conhecido como espaço de *de Sitter*,

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (123)$$

Tal expressão nada mais é que o caso plano, sem curvatura (isto é, em que $k = 0$), da expressão tradicional

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (124)$$

¹¹No caso de uma constante cosmológica negativa a solução é conhecida como *anti-de Sitter*, representada pelo elemento de linha [15]

$$ds^2 = dt^2 - \gamma^{-2} \cos^2 \gamma t \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right],$$

representando um espaço hiperbólico, de curvatura negativa.

com¹²

$$a(t) = \frac{e^{\gamma t} + ke^{-\gamma t}}{2\gamma} \quad (125)$$

e $\gamma^2 \equiv \Lambda/3$.

Uma forma comum de representar tal solução é como um hiperbolóide, isto é, uma superfície hiperbólica num espaço fictício 5-dimensional, superfície essa dada por um vínculo [16],

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - v^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad , \quad (126)$$

sendo que o espaço 5-dimensional possui uma geometria não-euclidiana¹³, com elemento de linha¹⁴

$$ds^2 = dv^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad . \quad (127)$$

Diferentes foliações ou cortes deste hiperbolóide podem ser parametrizadas de diferentes modos, representando diferentes espaços cuja métrica obedece às equações (124) e (125).

Como primeiro exemplo as coordenadas (t, r, θ, φ) podem ser introduzidas nesse hiperbolóide através das equações

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma t + \frac{\gamma}{2} r^2 e^{\gamma t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma t - \frac{\gamma}{2} r^2 e^{\gamma t} \\ x = e^{\gamma t} r \sin \theta \cos \varphi \\ y = e^{\gamma t} r \sin \theta \sin \varphi \\ z = e^{\gamma t} r \cos \theta \end{array} \right. \quad , \quad (128)$$

¹²Note-se que se $k = 0$, aparece em $a(t)$ um fator extra $(2\gamma)^{-1}$ não presente na expressão do intervalo. Tal fator pode ser facilmente eliminado por um reescalonamento das coordenadas.

¹³Em termos mais técnicos, pode-se dizer que tal espaço possui uma métrica lorentziana.

¹⁴O espaço anti-de Sitter também pode ser imerso num espaço de 5 dimensões, só que agora num hiperbolóide com o vínculo [15]

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 - v^2 = -\gamma^{-2}$$

e o elemento de linha

$$ds^2 = dv^2 + dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad .$$

com $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r < \infty$, $-\infty < t < \infty$, dando o elemento de linha da equação (123). Neste caso é fácil ver que a parametrização do hiperbolóide é incompleta, pois $w + v \geq 0$.

Outra parametrização bastante comum é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\cosh^2 \gamma \bar{t}) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (129)$$

que segue as relações

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \cos \chi \\ x = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \sin \chi \cos \theta \end{cases} \quad (130)$$

Tal parametrização, com os limites $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \chi \leq \pi$, $-\infty < \bar{t} < \infty$, representa um espaço com topologia global $R \times S^3$, ou seja, representa um espaço fechado, esférico, e o seu elemento de linha é obtido das equações (124) e (125) fazendo-se $k = +1$ e $r = \sin \chi$. Outra parametrização semelhante, mas representando um espaço hiperbólico, de topologia $R \times H^3$, é obtida com $k = -1$ e $r = \sinh \chi$:

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - \frac{1}{\gamma^2} (\sinh^2 \gamma \bar{t}) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad , \quad (131)$$

onde

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \cosh \chi \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \bar{t} \\ x = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \bar{t} \sinh \chi \cos \theta \end{cases} \quad , \quad (132)$$

com¹⁵ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \chi < \infty$, $-\infty < \bar{t} < \infty$.

¹⁵Qualquer um, ao ver tantas diferentes parametrizações de um mesmo espaço, pode ficar um tanto quanto desconfiado sobre a validade destas parametrizações e sobre o que elas representam.

É importante citar que originalmente, em 1917, de Sitter [17] apresentou uma forma estática de um universo plano e vazio,

$$ds^2 = \cos^2 \gamma \bar{r} d\hat{t}^2 - d\bar{r}^2 - \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \gamma \bar{r} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad ; \quad (133)$$

tal forma aceita a parametrização

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sinh \gamma \hat{t} \cos \gamma \bar{r} \\ w = \frac{1}{\gamma} \cosh \gamma \hat{t} \cos \gamma \bar{r} \\ x = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \frac{1}{\gamma} \sin \gamma \bar{r} \cos \theta \end{cases} \quad . \quad (134)$$

Eddington rerepresentou esta solução de outro modo,

$$ds^2 = \left(1 - \gamma^2 \hat{r}^2\right) d\hat{t}^2 - \frac{d\hat{r}^2}{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} - \hat{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad , \quad (135)$$

usando a transformação $\hat{r} = \gamma^{-1} \sin \gamma \bar{r}$, o que possibilita escrever

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} \sinh \gamma \hat{t} \\ w = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2 \hat{r}^2} \cosh \gamma \hat{t} \\ x = \hat{r} \sin \theta \cos \varphi \\ y = \hat{r} \sin \theta \sin \varphi \\ z = \hat{r} \cos \theta \end{cases} \quad . \quad (136)$$

Na verdade há um livro, “*Expanding universes*”, de E. Schrödinger (Cambridge University Press, 1956), onde aparece no prefácio o seguinte texto:

“O universo de de Sitter é tratado [neste livro] em grande extensão. Partindo do fato de que seu tensor de matéria se anula, este universo permite diversas igualmente simples representações, as quais são tão diferentes que qualquer um se surpreende por elas representarem o mesmo objeto geométrico.”

Nesse livro há uma tentativa cuidadosa de mostrar graficamente algumas características das parametrizações permitidas pelo espaço de de Sitter e, assim, este é um texto bastante recomendável para quem quiser compreender mais profundamente a geometria das soluções de de Sitter.

Esta nova parametrização representa um universo estático¹⁶, e pode ser obtida diretamente de (123) ou (128) através das transformações

$$\begin{cases} \hat{r} = e^{\gamma t} r \\ \hat{t} = t - \frac{1}{\gamma} \ln \sqrt{1 - \gamma^2 r^2 e^{2\gamma t}} \end{cases}, \quad (137)$$

ou de (130) e (132) por meio das relações

$$\begin{cases} \hat{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\gamma^{-2} - (w^2 - v^2)} \\ \hat{t} = \gamma^{-1} \ln \sqrt{\frac{w+v}{w-v}} \end{cases}, \quad (138)$$

aparecendo nela a idéia de um horizonte de eventos cosmológico, idéia essa que fica patente quando se compara a equação (135) com a expressão do intervalo para a solução de buraco negro de Schwarzschild¹⁷,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (139)$$

¹⁶Também o espaço anti-de Sitter, hiperbólico, pode ser posto numa forma estática, através das transformações

$$\begin{cases} \bar{s} = \gamma^{-1} \cos \gamma t \sinh \chi \\ u = \gamma^{-1} \arctan [\tan \gamma t \operatorname{sech} \chi] \end{cases}$$

que levam aos elementos de linha

$$ds^2 = (1 + \gamma^2 \bar{s}^2) du^2 - \frac{d\bar{s}^2}{1 + \gamma^2 \bar{s}^2} - \bar{s}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) ,$$

ou

$$ds^2 = \left(\cosh^2 \gamma \hat{s}\right) du^2 - d\hat{s}^2 - \sinh^2 \gamma \hat{s} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) ,$$

onde usou-se que $\bar{s} = \gamma^{-1} \sinh \gamma \hat{s}$.

¹⁷Note-se que essa solução é válida para as equações de Einstein sem constante cosmológica. Uma forma mais geral dessa solução, obtida das equações de Einstein com constante cosmológica, e conhecida como solução de Schwarzschild-de Sitter [18], é representada pelo elemento de linha

$$ds^2 = f(m, \gamma) dt^2 - \frac{dr^2}{f(m, \gamma)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) ,$$

onde

$$f(m, \gamma) \equiv 1 - \frac{2m}{r} - \gamma^2 r^2 .$$

Tal solução representa um espaço com um horizonte de eventos para $r = 2m$; no caso do espaço de de Sitter o horizonte de eventos aparece em $\hat{r} = \gamma^{-1}$.

15 Breve história do universo

O universo não possui um único tipo de componente. Na verdade sabe-se que há pelo menos três tipos diferentes de materiais no espaço: matéria comum, radiação e, é claro, o vácuo. Cada uma dessas componentes comporta-se diferentemente com a expansão do universo. Explicitamente, a densidade de matéria ρ_m decai proporcionalmente ao inverso do cubo do fator de escala $a(t)$, isto é, $\rho_m \propto a^{-3}$, enquanto que a densidade de radiação decai com o inverso da quarta potência do fator de escala, $\rho_r \propto a^{-4}$, e a densidade do vácuo é constante, $\rho_\Lambda \propto \Lambda$. Assim, pode-se notar que em diferentes fases do universo haverá a preponderância de um diferente componente do universo. Como a radiação decai mais rápido, ela é mais importante apenas nos momentos mais iniciais do universo, sendo depois suplantada, respectivamente, pela matéria e finalmente pelo vácuo.

Um modelo de universo mais completo deve levar em conta essas diferentes fases do universo. Por exemplo, em tal modelo a equação de Friedmann deve ser

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} (\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda). \quad (140)$$

Em termos dos parâmetros cosmológicos tal equação se escreve como

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a^2}, \quad (141)$$

o que pode ainda ser transformado em uma integral,

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{[\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a + \Omega_{\Lambda,0}a^4 + (1 - \Omega_0)a^2]^{1/2}}, \quad (142)$$

que não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser calculada com métodos numéricos usando-se os valores medidos atualmente dos parâmetros cosmológicos. Supondo que $\Omega_{r,0} \simeq 0$, $\Omega_{m,0} \simeq 0,3$, $\Omega_{\Lambda,0} \simeq 0,7$ e $\Omega_0 \simeq 1$ e a normalização

em que $a_0 = 1$, vem que

$$t_0 = 0,964H_0^{-1} \simeq (13,5 \pm 1,3) \times 10^9 \text{ anos.} \quad (143)$$

Esse valor é a idade aproximada do universo hoje, e que o erro presente vem do valor dos parâmetros cosmológicos, em especial do valor de H_0 .

Não é difícil notar que como o universo passa por fases, cada fase é limitada por um instante em que há uma igualdade da densidade de dois determinados componentes, aquele que é o dominante e o que vai passar a ser dominante. Assim, há um momento de igualdade entre a radiação e a matéria, chamado de t_{rm} , e outro entre a matéria e o vácuo, chamado de $t_{m\Lambda}$. Calcular esses tempos é fácil. Por exemplo, basta notar que sempre valem as identidades

$$\rho_m a^3 = \rho_{m,0} a_0^3, \quad \rho_r a^4 = \rho_{r,0} a_0^4. \quad (144)$$

No momento de igualdade entre radiação e matéria tinha-se $\rho_m = \rho_r$, e daí

$$a_{rm} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} a_0 = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} a_0 = \frac{8,4 \times 10^{-5}}{0,3} a_0 = 2,8 \times 10^{-4} a_0. \quad (145)$$

De modo similar pode-se calcular que $a_{m\Lambda} = 0,75a_0$.

Para calcular a que tempo esses valores do fator de escala correspondem, pode-se usar que próximo ao instante de igualdade entre a radiação e a matéria apenas estes dois componentes podem ser considerados importantes na equação de Friedmann. Assim, a equação a se resolver é

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}, \quad (146)$$

ou seja,

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{[\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a]^{1/2}}. \quad (147)$$

Usando agora que $a_{rm} = (\Omega_{r,0}/\Omega_{m,0}) a_0$ vem que

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{[\Omega_{r,0} (1 + aa_0/a_{rm})]^{1/2}}. \quad (148)$$

Tal integral produz como resultado

$$H_0 t = \frac{2a_{rm}^2}{3a_0^2 \Omega_{r,0}^{1/2}} \left[2 + \left(1 + \frac{a_0}{a_{rm}} a \right)^{3/2} - 3 \left(1 + \frac{a_0}{a_{rm}} a \right)^{1/2} \right]. \quad (149)$$

Pondo $a = a_{rm}$ e usando novamente como normalização que $a_0 = 1$ vem finalmente que

$$t_{rm} = 3,34 \times 10^{-6} H_0^{-1} \simeq 47.000 \text{ anos}. \quad (150)$$

Outra fase importante é a aquela em que o vácuo passa a ser dominante. Tal fase ocorre a partir do tempo de igualdade entre a densidade de matéria e a densidade do vácuo, $t_{m\Lambda}$, que pode ser calculado como sendo

$$t_{m\Lambda} = 0,702 H_0^{-1} \simeq (9,8 \pm 1,0) \times 10^9 \text{ anos}, \quad (151)$$

ou seja, a dominação pelo vácuo é um processo recente na história do universo.

A cada fase do universo a radiação presente tem uma temperatura e uma energia média diferentes. Lembrando que para a radiação $\rho_r \propto a^{-4}$ e ao mesmo tempo, pela lei de Stefan-Boltzmann, $\rho_r \propto T^4$, vem que para a radiação

$$T = T_0 \frac{a_0}{a}, \quad (152)$$

onde $T_0 = 2,73K$ é a temperatura atual da radiação presente no universo. Por exemplo, no instante de equilíbrio entre radiação e matéria pode-se estimar que a temperatura da radiação era $T_{rm} \simeq 9800$ K. Tal temperatura corresponde a uma energia média de aproximadamente 1 eV. Para tempos anteriores a t_{rm} a temperatura da radiação era muito maior. Por exemplo, para um tempo de 10^{-4} s a temperatura era de aproximadamente $1,5 \times 10^{12}$ K, com a energia média correspondente de 130 MeV. Como tal energia é muito grande, nessa época (10^{-4} s) não havia elementos químicos no universo, pois havia energia demais para permitir a ligação de nêutrons e prótons.

Na verdade, os primeiros elementos químicos formaram-se num período conhecido como recombinação, isto é, quando o principal componente do universo, um plasma quente e ionizado, passa a se recombinar, formando um gás ainda quente, mas neutro, graças à ligação entre prótons e elétrons. Ou seja, na

época da recombinação o plasma, formado por uma sopa de matéria e fótons de alta energia, esfria o bastante para permitir que surjam átomos. Essa fase ocorre quando a energia média da radiação era da ordem de 0,3 eV (temperatura de 3600 K). Nessa fase, os elétrons e os prótons puderam se ligar formando os primeiros átomos de hidrogênio, ou seja, o hidrogênio primordial. O cálculo da energia necessária para que a recombinação ocorra tem que levar em conta que ao mesmo tempo em que há átomos se formando pode haver a destruição de átomos formados, se houver energia livre suficiente no meio, com os dois processos competindo entre si, de acordo com a equação



Assim, deve-se considerar qual é a fração ionizada X dos primeiros átomos formados,

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H} , \quad (154)$$

onde n_p é o número de prótons livres (que, por conservação de carga, deve ser igual ao número de elétrons livres, n_e) e n_H é o número de prótons combinados com elétrons formando átomos de hidrogênio. Essa quantidade, X , é uma função da temperatura média dos fótons e da razão η entre a quantidade de matéria (bárions) e de fótons, além é claro da energia de ionização Q dos átomos formados. O momento da recombinação é definido como sendo aquele em que $X = 1/2$.

Considerando como aproximação válida que prótons, elétrons e átomos de hidrogênio não estão se movendo relativisticamente tem-se que cada um desses componentes obedece à distribuição de Maxwell-Boltzmann, i.e., eles satisfazem a relação

$$n = g \left[\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{mc^2}{k_B T} \right] , \quad (155)$$

onde g é uma constante ligada ao spin das partículas descritas pela relação, m é a massa de cada uma dessas partículas, e T é a temperatura. Para elétrons e prótons $g = 2$, enquanto que para o átomo de hidrogênio $g = 4$. A massa do próton e do

átomo de hidrogênio são praticamente iguais, com uma pequena diferença presente na energia de ligação do átomo de hidrogênio,

$$Q \equiv (m_p + m_e - m_H) c^2 = 13,6 \text{ eV}. \quad (156)$$

Usando esses dados pode-se escrever que

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left[\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right]^{-3/2} \exp \left[\frac{Q}{k_B T} \right], \quad (157)$$

que é um resultado conhecido como equação de Saha. Da definição da quantidade X e considerando que $n_p = n_e$ vem que

$$\frac{1 - X}{X} = n_p \left[\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right]^{-3/2} \exp \left[\frac{Q}{k_B T} \right]. \quad (158)$$

O próximo passo neste cálculo consiste em notar que a razão η entre o número de bárions e fótons pode ser escrita, no universo primordial, como sendo

$$\eta = \frac{n_p + n_H}{n_\gamma} = \frac{n_p}{X n_\gamma}. \quad (159)$$

Contudo, o número de fótons n_γ obedece ao vínculo $n = n_0 (T/T_0)^3$ (equação (53) com $w = 1/3$), e assim

$$n_p = \frac{n_0}{T_0^3} X \eta T^3. \quad (160)$$

Esse resultado combinado aos anteriores produz uma equação de 2º grau para X ,

$$\frac{1 - X}{X^2} = \eta n_0 \left[\frac{\hbar c}{k_B T_0} \sqrt{2\pi} \right]^3 \left[\frac{k_B T}{m_e c^2} \right]^{3/2} \exp \left[\frac{Q}{k_B T} \right] \equiv S, \quad (161)$$

cujas solução é

$$X = \frac{-1}{2S} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2S} \right)^2}. \quad (162)$$

Usando agora que $n_0 \left[\frac{\hbar c}{k_B T_0} \sqrt{2\pi} \right]^3 = 3,84$, $\eta = 5,5 \times 10^{-10}$ e que, na recombinação, $X = 1/2$, vem que $T_{rec} \simeq 3700 \text{ K}$.

evento	T (K)	energia (eV)	tempo (anos)
igualdade radiação-matéria	9800	1	47.000
recombinação	3700	0,3	240.000
desacoplamento dos fótons	3000	0,26	350.000
último espalhamento	3000	0,26	350.000
igualdade matéria-vácuo	3,6	0,00032	$9,8 \times 10^9$
hoje	2,73	0,00024	$13,5 \times 10^9$

A fase de recombinação é seguida por uma fase de desacoplamento entre fótons e matéria, isto é, nesta fase os fótons, graças à expansão do universo, não conseguem mais interagir com os elétrons como faziam antes. Tecnicamente, o início desta fase é definido como sendo o instante em que a taxa de espalhamento dos fótons passa a ser menor que a taxa com que o universo se expande (menor que o parâmetro de Hubble). Quando isto ocorre o universo passa a ser transparente, pois os fótons – a luz – conseguem caminhar distâncias maiores.

A evolução da fase de desacoplamento dos fótons com a expansão do universo leva, conseqüentemente, a uma etapa conhecida como último espalhamento, que acontece quando os fótons da radiação interagem pela última vez com os elétrons. Essa fase de último espalhamento cria para cada observador no universo uma ‘bolha’ de transparência além da qual nada pode ser visto, pois além dessa ‘bolha’ o universo é opaco, com os fótons ‘presos’ à matéria. O limite de tal bolha é conhecido como superfície de último espalhamento (LSS, do inglês *last scattering surface*), e os fótons que vêm desta superfície são os que compõem a radiação cósmica de fundo.

16 Radiação cósmica de fundo

A radiação cósmica de fundo é uma radiação na faixa de microondas (comprimento de onda da ordem de alguns milímetros a centímetros, ou frequência na ordem de centenas de MHz a alguns GHz) que pode ser percebida como preen-

chendo uniformemente o céu ao redor da Terra vinda de todas as direções. A primeira detecção dessa radiação foi acidental, e aconteceu nos anos de 1964-1965, quando Arno Penzias e Robert Wilson, dos Laboratórios Bell, tentavam construir uma antena na forma de corneta para captar sinais de satélites de comunicação. A antena deles, por mais que eles tentassem melhorá-la, teimava em apresentar um ruído muito acima do esperado, não importando para que direção eles a apontassem. A melhor explicação coerente que eles conseguiram encontrar foi a dada por um grupo de cosmólogos da Universidade de Princeton, que indicavam que deveria haver uma radiação residual, remanescente de épocas anteriores do universo, isotrópica, uniforme e não-polarizada, com uma temperatura de uns poucos K . Tanto o artigo da descoberta dessa radiação quanto de sua explicação foram publicados num mesmo número da revista¹⁸ “*The Astrophysical Journal*”, e o Prêmio Nobel de Física de 1978 foi para a dupla Penzias e Wilson¹⁹.

A radiação cósmica de fundo é composta pelos fótons que escaparam da superfície de último espalhamento, ao se desacoplarem da matéria, e se espalharam pelo universo, esfriando com a expansão. Como essa radiação se desacoplou inteiramente da matéria ela apresenta um espectro de corpo negro perfeito, isto é, a distribuição de energia dos fótons dessa radiação, n_ω , segue uma função Planckiana perfeita,

$$n_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} . \quad (163)$$

Deve-se notar que pode-se medir a temperatura dessa radiação em cada ponto do céu, considerando-se para isso que existe uma esfera celeste ao redor da Terra, com cada ponto sendo representado pelas coordenadas angulares θ e ϕ , ou seja, por ângulos de latitude e longitude. Assim, a temperatura média $\langle T \rangle$ da radiação cósmica de fundo é dada pela integração em todo o ângulo sólido das medidas em cada ponto,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta T(\theta, \phi) . \quad (164)$$

¹⁸*Astrophysical Journal* **142**, 1965.

¹⁹Uma interessante descrição desta história é feita no livro “*Corações solitários do cosmo*”, de Dennis Overbye.

No entanto, as variações em cada ponto são bastante importantes e, assim, é útil definir a quantidade

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \equiv \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (165)$$

Medidas recentes, feitas pelo satélite COBE (do inglês *Cosmic Microwave Background Explorer*, ou Explorador da Radiação Cós mica de Fundo) indicam que

$$\langle T \rangle = 2,725 \pm 0,001 \text{ K} \quad (166)$$

e

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \simeq 1,1 \times 10^{-5}, \quad (167)$$

ou seja a radiação cósmica de fundo é bastante homogênea, com flutuações da sua temperatura média sendo da ordem de uma parte em 100.000.

Como a radiação cósmica é vista como presa à superfície da esfera celeste, pode-se expandí-la em termos de harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, que são funções matemáticas apropriadas para a descrição de distribuições de simetria esférica. Logo,

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (168)$$

O que é importante analisar não é a exata distribuição das flutuações de temperatura, mas sim suas propriedades estatísticas, como médias e correlações. Uma medida estatística importante é a correlação $C(\theta)$ existente entre as medidas feitas em duas diferentes direções \hat{n}_1 e \hat{n}_2 separadas por um ângulo θ , de modo que $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \cos \theta$. Assim,

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}_2) \right\rangle. \quad (169)$$

Usando a expansão em harmônicos esféricos e o teorema de adição dessas funções pode-se, após alguns cálculos, mostrar que

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell'}^{\ell'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle Y_{\ell m}(\theta_1, \phi_1) Y_{\ell' m'}^*(\theta_2, \phi_2) \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (170)$$

onde P_ℓ é o polinômio de Legendre de ordem ℓ , e onde usou-se que $\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = C_\ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$, ou seja,

$$C_\ell = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (171)$$

A análise estatística da radiação cósmica de fundo em geral indica a existência de um dipolo, com $C_1^{1/2} \simeq 3 \times 10^{-3}$. Tal dipolo é esperado, devido aos movimentos peculiares da Terra ($v_{Terra} \sim 30 \text{ km s}^{-1}$), do Sistema Solar ($v_{Sol} \sim 220 \text{ km s}^{-1}$), da Via Láctea ($v_{VL} \sim 80 \text{ km s}^{-1}$) e, finalmente, do Grupo Local de galáxias ($v_{GL} \sim 630 \text{ km s}^{-1}$), que causam um efeito Doppler responsável pela distorção das flutuações de temperatura na forma de um dipolo. Como o dipolo é causado por movimentos da Terra, ele não é um efeito real, presente na radiação cósmica de fundo. Assim, o dipolo deve ser descontado para efeitos de tratamento estatístico da radiação cósmica de fundo.

É comum ter-se gráficos da quantidade $\Delta T \equiv [\ell(\ell+1)C_\ell/(2\pi)]^{1/2} \langle T \rangle$ em função dos multipolos ℓ . A cada multipolo corresponde aproximadamente uma escala angular θ , ou seja, $\ell \sim 180^\circ/\theta$. As posições dos picos e vales que aparecem neste tipo de gráfico fornecem diferentes informações sobre diversos parâmetros cosmológicos como, por exemplo, a curvatura e a fração de bárions do universo. Para ser mais específico, a posição do pico mais alto, chamado de primeiro pico acústico, é bastante sensível à curvatura espacial do universo. Assim, a leitura adequada deste gráfico permite a colocação de vínculos sobre grupos de parâmetros cosmológicos. O mais comum é usar $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ como parâmetros livres e verificar em que tipo de vínculo isso implica.

A explicação física detalhada para a origem dos diferentes picos que aparecem no gráfico de ΔT versus ℓ é bastante complicada, mas pode-se dividir as causas de tais picos em dois tipos básicos, as de larga escala, com $\theta > 1^\circ$, e as de pequena escala, com $\theta < 1^\circ$. Flutuações de larga escala tem origem cosmológica. No modelo cosmológico mais aceito atualmente tais flutuações cosmológicas são entendidas como estando ligadas ao efeito gravitacional das flutuações de densidade da matéria não-bariônica, que logo cedo teria se desacoplado da matéria comum e da radiação, passando a interagir quase que só gravitacionalmente. As flutuações de densidade de tal matéria escura gerariam flutuações $\delta\phi$ do poten-

cial gravitacional que levariam a variações de temperatura dos fótons da radiação cósmica de fundo por puro efeito Doppler gravitacional. Um cálculo mais detalhado, relativístico, mostra que, qualquer que seja a origem das flutuações do potencial gravitacional, tem-se

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta \phi}{c^2}. \quad (172)$$

Esse é o chamado efeito Sachs-Wolfe.

Em escalas angulares menores que 1° o que ocorre basicamente é a interação dos fótons da radiação cósmica de fundo com os elétrons e prótons do universo ainda quente, formando um fluido de bárions e fótons. Tal fluido sofre a influência da matéria escura, sendo atraído gravitacionalmente para aglomerados dela. No entanto, ao se contrair gravitacionalmente o fluido de bárions e fótons se aquece gerando uma pressão térmica que o faz se expandir. Tais oscilações acústicas, formadas por ciclos de contração e expansão em pequena escala, dependem da velocidade de propagação do som no fluido, ou seja, dependem das propriedades desse fluido de bárions e fótons e, assim, fornecem indicações das frações relativas de bárions e fótons.

17 Nucleossíntese primordial

Nucleossíntese primordial (ou, em inglês, *Big Bang Nucleosynthesis*, BBN) é o nome dado à formação de núcleos atômicos nos instantes iniciais do universo, quando a energia média da radiação permitia unir prótons (p) e nêutrons (n), em processos como



ou



onde γ é o símbolo para um fóton, D é o símbolo do deutério, um isótopo pesado do átomo de hidrogênio cujo núcleo contém um próton e um nêutron, e^+ é o símbolo do pósitron (antipartícula do elétron), e ν_e é o símbolo do neutrino do

elétron, uma partícula sub-atômica neutra e muito leve. O primeiro processo, de união de um próton e um nêutron para a formação de deutério, envolve a liberação de energia na forma de fótons e, portanto, é um processo favorecido sob condições adequadas em relação ao outro processo, de união de dois prótons, onde se precisa de grande quantidade de energia para se vencer a repulsão entre os dois prótons. Além disso o processo de união de dois prótons envolve necessariamente a força nuclear fraca, pois há a produção de neutrinos, e esses processos têm baixa probabilidade de ocorrência (tecnicamente, baixa seção de choque).

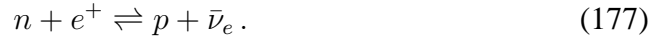
Nêutrons e prótons não estão interligados apenas na formação de deutério. Nêutrons livres são instáveis e decaem em prótons, através do processo



com um tempo de decaimento para os nêutrons da ordem de 890 s (aproximadamente 15 minutos). Na presença de prótons e nêutrons os processos que ocorrem, além da possível formação de deutério, são



e



Estas últimas reações permitem a existência de um equilíbrio entre os números de prótons e nêutrons, que pode ser quantificado usando-se a distribuição de Maxwell-Boltzmann para ambas as espécies,

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_i c^2}{k_B T} \right], \quad (178)$$

ou seja, como $g_n = g_p = 2$ e $(m_n - m_p) c^2 \equiv Q_n = 1,29 \text{ MeV}$,

$$\frac{n_n}{n_p} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{Q_n}{k_B T} \right]. \quad (179)$$

Usando que $(m_n/m_p)^{3/2} = 1,002 \sim 1$, tal relação fica bastante simples, e pode-se notar que para temperaturas abaixo de 10^{10} K os prótons começam a ficar em maior quantidade que os nêutrons.

Entretanto, as reações de equilíbrio entre prótons e nêutrons só são válidas enquanto sua taxa de interação Γ é maior que a taxa de expansão H do universo. Tais reações são processos envolvendo neutrinos ou antineutrinos e, portanto, estão ligadas à força nuclear fraca, cuja seção de choque é, aproximadamente,

$$\sigma_{fraca} \sim 10^{-47} \text{ m}^2 \left(\frac{k_B T}{1 \text{ MeV}} \right)^2. \quad (180)$$

Como $\Gamma = n_\nu c \sigma_{fraca}$, $n_\nu \propto a^{-3}$, $T \propto a^{-1}$, e supondo que na época em estudo $a \propto t^{1/2}$ (universo plano dominado por radiação) vem que

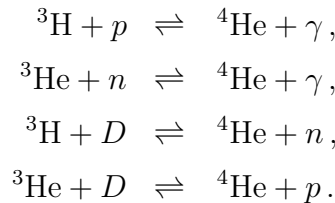
$$\Gamma \propto t^{-5/2}, \quad H \propto t^{-1}, \quad (181)$$

de modo que a taxa de interação decai mais rapidamente que a taxa de expansão do universo. O instante exato em que $\Gamma = H$ pode ser calculado usando-se dados de física nuclear, mas de qualquer modo tal identidade ocorre por volta de $t \sim 1$ s. Esse instante é chamado de tempo de congelamento (em inglês *freezeout*), pois nesse tempo os nêutrons deixam de estar em equilíbrio com os prótons e, assim, a razão entre o número de cada um deles, n_n/n_p se congela no valor aproximado de 1/5. Logo, após esse instante resta um excesso de quatro prótons em cada grupo de cinco que não pode encontrar nêutrons para se unir.

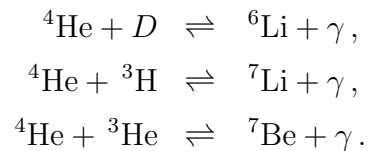
A união de prótons e nêutrons gera deutério, mas este não é o ponto final da nucleossíntese primordial. O deutério pode participar de diversos processos:

- produção de ${}^3\text{He}$ através da reação $D + p \rightleftharpoons {}^3\text{He} + \gamma$;
- produção de ${}^3\text{H}$ (ou trítio) através da reação $D + n \rightleftharpoons {}^3\text{H} + \gamma$;
- produção de ${}^4\text{He}$ através da reação $D + D \rightleftharpoons {}^4\text{He} + p$;
- produção de ${}^3\text{He}$ por fusão, através da reação $D + D \rightleftharpoons {}^3\text{He} + n$.

A cadeia de processos nucleares não para aí. ${}^4\text{He}$ é produzido de diversas formas:



Ou seja, produzem-se núcleos atômicos com 1 constituinte (átomo de hidrogênio), 2 constituintes (deutério), 3 constituintes (^3He e trítio) e, finalmente, com 4 constituintes (^4He). No entanto, não há núcleos atômicos estáveis com 5 constituintes, mas núcleos um pouco maiores, com 6 ou 7 constituintes, podem ser produzidos se houver energia suficiente no meio, através das reações



Em princípio a reação $^4\text{He} + ^4\text{He} \rightleftharpoons ^8\text{Be}$ também poderia ocorrer, mas o berílio assim formado é instável e decai rapidamente. Não há núcleos atômicos estáveis com 8 constituintes e, assim, a nucleossíntese primordial finalmente termina.

Resumindo, então, a sequência de eventos envolvendo prótons e nêutrons no universo primordial, pode-se definir três fases, com diferentes temperaturas características:

- equilíbrio químico entre prótons e nêutrons, ocorrendo para temperaturas maiores que 800 keV;
- decaimento dos nêutrons, com congelamento da razão entre prótons e nêutrons, quando a temperatura é menor que 800 keV, mas maior que 60 keV;
- nucleossíntese propriamente dita, para $T \sim 60$ keV.

As reações nucleares primordiais são ‘congeladas’ a uma temperatura de cerca de 30 keV, e assim são formadas quantidades consideráveis apenas de átomos de hidrogênio, deutério, hélio e lítio, todos elementos leves.

18 Inflação

Ao se analisar a radiação cósmica de fundo percebe-se que ela é bastante homogênea. Além disso, tal análise revela que o universo praticamente não tem

curvatura, ou seja, $\Omega_0 \sim 1$. À primeira vista não há problema algum com tais resultados. No entanto, um olhar mais cuidadoso gera dúvidas: como a radiação cósmica de fundo pode ser tão homogênea em todas as escalas angulares? O universo foi sempre plano ou só o é hoje?

Para verificar como a radiação cósmica de fundo pode ser tão isotrópica é importante calcular qual era o tamanho do horizonte na época em que ocorreu o último espalhamento dos fótons primordiais que a formam. O horizonte, d_{hor} , é a distância máxima percorrida por um objeto qualquer desde o tempo inicial do universo $t = 0$ até um determinado tempo t , ou seja,

$$d_{hor}(t) \equiv a(t) c \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = a(t) c \int_0^{a(t)} \frac{da}{a\dot{a}} = a(t) c \int_{\eta(0)}^{\eta(t)} d\eta, \quad (182)$$

onde η é o tempo conforme definido pela relação $ad\eta = dt$. Tal distância, no tempo em que ocorreu o último espalhamento, era menor do que é hoje. Para calculá-la é importante lembrar que o universo primordial, na época do último espalhamento, era dominado por matéria e, portanto,

$$a(\eta) = \frac{8\pi G}{3k} \rho_0 a_0^3 \text{sen}^2 \left[\sqrt{k} \frac{\eta}{2} \right]. \quad (183)$$

O cálculo do horizonte para qualquer curvatura usando essa expressão exata envolve funções elípticas, mas se simplifica bastante para $k = 0$. Na verdade, desconsiderando-se a curvatura e usando um modelo simples de componente única do universo, onde $p = (\gamma - 1) \rho$, ou seja, considerando-se que para qualquer tempo $\rho = \rho_c$, tem-se que

$$d_{hor}(t) = \frac{2c}{H_0(3\gamma - 2)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3\gamma/2}. \quad (184)$$

Para matéria $\gamma = 1$ e, daí,

$$d_{hor}(t) = \frac{2c}{H_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2}, \quad (185)$$

ou seja, a distância do horizonte hoje ($a = a_0$) seria, nesse universo plano e com matéria,

$$d_{hor}(t_0) = \frac{2c}{H_0} = 2d_H, \quad (186)$$

onde $d_H = c/H_0$ é a distância de Hubble. Note-se que essa expressão é exata apenas para um universo plano apenas com matéria e que, portanto, no caso geral em que existem curvatura e outras componentes além da matéria, ela vale apenas como uma primeira aproximação. Pensando assim, pode-se aproximar o valor do horizonte na época do último espalhamento como sendo

$$d_{hor}(t_{LSS}) \simeq \frac{2c}{H(t_{LSS})} = 2d_H(t_{LSS}). \quad (187)$$

Supondo, por exemplo, que a distância de Hubble na superfície de último espalhamento era da ordem de 0,2 Mpc (cerca de 20.000 vezes menor do que o valor atual), vem que $d_{hor}(t_{LSS}) \simeq 0,4$ Mpc. Nesse caso, esse seria o tamanho máximo da região que enviaria informações para uma partícula qualquer no tempo do último espalhamento. Ou seja, esse seria o tamanho máximo das regiões fisicamente conectadas na época do último espalhamento.

A relação entre o tamanho angular $d\theta$ de uma determinada flutuação de temperatura na radiação cósmica de fundo e o tamanho físico $d\ell$ dessa flutuação define uma distância,

$$d_A \equiv \frac{d\ell}{d\theta}, \quad (188)$$

que leva o nome de distância diâmetro-angular. Num universo homogêneo e isotrópico tem-se que

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right] \\ &= a^2(t) \left[d\chi^2 + \frac{\text{sen}^2\sqrt{k}\chi}{k} (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right], \end{aligned} \quad (189)$$

ou seja, sem perda de generalidade pode-se considerar $dr = d\varphi = 0$, e daí sai que

$$d\ell = a(t) \frac{\text{sen}\sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}} d\theta. \quad (190)$$

Logo,

$$d_A = a(t) \frac{\text{sen}\sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}} = \frac{a_0}{1+z} \frac{\text{sen}\sqrt{k}\chi}{\sqrt{k}}, \quad (191)$$

o que para $k = 0$ se escreve simplesmente como

$$d_A = \frac{a_0 \chi}{(1+z)} = \frac{a_0 r}{(1+z)}. \quad (192)$$

É simples ver que d_A tende a zero para valores muito grandes do redshift z . Nessas circunstâncias, vale que

$$d_A(z \rightarrow \infty) \approx \frac{d_{hor}(t_0)}{z}. \quad (193)$$

Usando que hoje $d_{hor}(t_0) \approx 14.000$ Mpc, e que $z_{LSS} \sim 1100$, vem então que

$$d_A(z_{LSS}) \approx 13 \text{ Mpc}. \quad (194)$$

Pela definição de distância diâmetro-angular fica fácil agora notar que as regiões fisicamente conectadas na época do último espalhamento são vistas hoje sob um ângulo

$$d\theta = \frac{d_{hor}(t_{LSS})}{d_A} \approx \frac{0,4}{13} \approx 0,03 \text{ rad} \approx 2^\circ. \quad (195)$$

O que isso significa é que apenas regiões dessa escala angular na radiação cósmica de fundo deveriam ter o mesmo grau de homogeneidade. No entanto a homogeneidade da radiação cósmica é muito maior, vista em escalas angulares de até 180 graus. Como isso pode ser explicado? Esse enigma é conhecido como o “problema do horizonte”.

Outro enigma surge do estudo da curvatura do universo. sabemos hoje que ela é quase nula, de modo que

$$|1 - \Omega_0| \leq 0,2. \quad (196)$$

Naturalmente, o universo pode ter sido criado sem curvatura alguma, de modo que $\Omega = 1$. No entanto, se ele possui alguma curvatura o parâmetro de densidade total $\Omega(t)$ evolui com o tempo, de acordo com a equação

$$1 - \Omega(t) = -\frac{k}{a^2 H^2}. \quad (197)$$

Posto de outro modo,

$$1 - \Omega(t) = -\frac{a_0^2 H_0^2}{a^2 H^2} (1 - \Omega_0). \quad (198)$$

Como o universo está em expansão $a_0 H_0 > aH$ e, assim, para $t < t_0$ vale que $|1 - \Omega(t)| < |1 - \Omega_0|$. Alguns cálculos podem mostrar que

$$|1 - \Omega_{rm}| \geq 2 \times 10^{-4}, \quad (199)$$

ou

$$|1 - \Omega_{nuc}| \geq 3 \times 10^{-14}, \quad (200)$$

ou ainda

$$|1 - \Omega_{Pl}| \geq 1 \times 10^{-60}. \quad (201)$$

Ou seja, se o universo tiver algum resíduo de curvatura hoje ele teria que ter começado com uma curvatura muito, muito, muito pequena, diferente de zero, mas quase igual a zero. Essa necessidade de uma curvatura inicial muito pequena do universo é problemática: como o universo acertou um valor tão próximo de zero? Esse é o “problema da planura” do universo.

Os dois problemas são resolvidos por uma idéia que ficou conhecida como inflação: o universo teria passado por uma fase de expansão acelerada, exponencial, onde o fator de escala teria sido do tipo $a(t) \propto e^{Ht}$, sendo que o parâmetro de Hubble H se mantém constante, $H = H_i$, durante toda a inflação. A inflação seria apenas um fase na evolução do universo, de modo que ela começaria num tempo t_i e terminaria num tempo t_f , de modo que

$$a(t) = \begin{cases} a_i (t/t_i)^{1/2} & t < t_i, \\ a_i e^{H_i(t-t_i)} & t_i < t < t_f, \\ a_i e^{H_i(t_f-t_i)} (t/t_f)^{1/2} & t > t_f. \end{cases} \quad (202)$$

Assim,

$$\ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right] = H_i (t_f - t_i) \equiv N, \quad (203)$$

onde N é o número de “*e-foldings*” causados pela inflação. Logo,

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N} |1 - \Omega(t_i)|, \quad (204)$$

ou seja, mesmo que o universo tivesse começado com uma curvatura mensurável uma quantidade razoável de inflação a teria apagado. Na verdade, a incerteza atual

no valor de Ω_0 implica que $N > 60$, se a inflação começou em $t_i \approx 10^{-36}$ s. Além disso, teria-se, por exemplo, que

$$d_{hor}(t_f) \approx \frac{3}{2} e^N d_{hor}(t_i), \quad (205)$$

ou seja, o horizonte teria crescido exponencialmente durante inflação.

O mecanismo físico usado para servir de base para a idéia de inflação envolve ao menos um campo escalar $\phi(t)$, chamado de inflaton, ao qual se associa a função de densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = a^3 \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2\hbar c^3} - V(\phi) \right], \quad (206)$$

onde $V = V(\phi)$ é o potencial associado ao campo escalar. Tal função serve de base para a expressão para a pressão efetiva p_ϕ do campo escalar, isto é, $p_\phi = \mathcal{L}/a^3$. Usando as equações de Euler-Lagrange pode-se notar que o campo escalar obedece à equação

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\hbar c^3 \frac{dV}{d\phi}. \quad (207)$$

Além disso, a densidade de energia do campo escalar pode ser obtida a partir da função de densidade Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = a^3 \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2\hbar c^3} + V(\phi) \right] \equiv \rho_\phi a^3, \quad (208)$$

que deve dominar a evolução do universo de forma que funcione quase como uma constante cosmológica na equação de Friedmann, ou seja,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \approx \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi \simeq \frac{\Lambda_i}{3}. \quad (209)$$

Assim, o fator de escala cresce exponencialmente,

$$a(t) = a_i e^{\sqrt{\frac{\Lambda_i}{3}} t}, \quad (210)$$

tal qual na solução de de Sitter. Para que isto ocorra é necessário que a pressão e a densidade de energia do campo escalar obedeçam à equação de estado de uma constante cosmológica, isto é,

$$p_\phi \approx -\rho_\phi, \quad (211)$$

e, assim, é preciso que

$$\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi) . \quad (212)$$

A equação obedecida pelo campo escalar, equação (207), mostra que o campo evolui de forma que atinge uma ‘velocidade’ terminal

$$\dot{\phi} = -\frac{\hbar c^3}{3H} \frac{dV}{d\phi} . \quad (213)$$

Nesse instante, então, vale que

$$\left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll \frac{9H^2 V}{\hbar c^3} . \quad (214)$$

Usando que

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} V , \quad (215)$$

as condições sobre o campo escalar podem ser reescritas como

$$\left(\frac{E_{Pl}}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll 1 . \quad (216)$$

Vários potenciais podem ser escritos satisfazendo tais condições e, assim, diversos modelos inflacionários podem ser construídos:

“A exploração das variações sobre o tema inflacionário tem continuado, e uma busca na literatura científica mostra que há cerca de cinquenta formas diferentes de inflação que foram nomeadas e estudadas. A lista inclui inflação dupla, tripla e híbrida, para não mencionar inflação híbrida ‘mutacionada’, inflação híbrida desbalanceada, e inflação hiperestendida. Cosmólogos tem também estudado inflação movida pela gravidade, por spin, por cordas e campos vetoriais, assim como inflação que é quente, suave, tépida, e natural.”

Qualquer que seja o modelo de inflação, porém, deve-se lembrar que o que a inflação faz é expandir uma região muito pequena, submicroscópica, do espaço para um tamanho macroscópico.

19 Matéria escura

Referências

- [1] Silk, J. – “*A Short History of the Universe*”, Scientific American Library, 1994.
- [2] Brody, D.E.; Brody, A.R. – “*As sete maiores descobertas científicas da história*”, Companhia das Letras, São Paulo, 2000.
- [3] Kolb, E.W.; Turner, M.S. – “*The Early Universe*”, Addison-Wesley, 1993.
- [4] Symon, K.R. – “*Mechanics*”, Addison-Wesley, 1973.
- [5] Sciama, D.W. – “*Modern Cosmology*”, Cambridge, 1971.
- [6] D’Inverno, R. – “*Introducing Einstein’s Relativity*”, Oxford, 1992.
- [7] Callen, H.B. – “*Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*”, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1985.
- [8] Reif, F. – “*Fundamentals of statistical and thermal physics*”, McGraw-Hill, 1965.
- [9] Wrezinski, W.F. – “*Termodinâmica*”, Edusp, 2002.
- [10] Silva, R.; Lima, J.A.S.; Calvão M.O. – *e-print*²⁰ gr-qc/0201048 (2002).
- [11] Lima, J.A.S.; Alcaniz, J.S. – *e-print* astro-ph/0402265 (2004).
- [12] Weinberg, S. – “*Gravitation and cosmology*”, John Wiley & Sons, 1972.
- [13] Ryden, B. – “*Introduction to cosmology*”, Addison-Wesley, 2003.
- [14] Rich, J. – “*Fundamentals of cosmology*”, Springer-Verlag, Berlim, 2001.
- [15] Hawking, S.W.; Ellis, G.F.R. – “*The large scale structure of space-time*”, Cambridge, 1973.

²⁰Os *e-prints* citados aqui estão disponíveis no *site* <http://arxiv.org>.

- [16] Birrell, N.D.; Davies, P.C.W. – “*Quantum Field Theory in Curved Space*”, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [17] Gron, O.; Eriksen, E. – *Int. J. Mod. Phys.* **D4**, 115 (1991).
- [18] Rindler, W. – “*Essential Relativity*”, Springer-Verlag, Berlin, 1977.