

## 2ª lista de exercícios da disciplina Mecânica Clássica

- O problema **47P** do capítulo 4 do livro “Fundamentos de Física 1”, de Halliday, Resnick e Walker, traz a pergunta “qual o módulo da aceleração centrípeta de um objeto no equador terrestre devido ‘a rotação da Terra?’”
  - Qual é a razão entre essa aceleração centrípeta e a aceleração da gravidade? Lembre que a Terra tem 6400 km de raio.
  - Imagine que a Terra acelere seu movimento de rotação até um valor em que a aceleração centrífuga iguale, em módulo, a aceleração da gravidade. Qual seria, nesse caso, o período de rotação da Terra?
- O que é a força de Coriolis?
  - Qual é a sua expressão matemática?
- Como o movimento de rotação da Terra afeta o movimento de um projétil e de um corpo em queda livre?
- Em que se baseia o equipamento chamado de pêndulo de Foucault? Escreva a equação vetorial para seu movimento.
- A equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula carregada em uma região com campos elétrico e magnético, em um sistema de coordenadas inercial, envolve a força de Lorentz. Mostre que em um sistema de coordenadas girante, com velocidade angular  $q\mathbf{B}/(2m)$ , a equação de movimento se torna

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E},$$

assumindo-se que termos do tipo  $B^2$  podem ser desprezados. Esse resultado é conhecido como teorema de Larmor.

- Uma partícula de massa  $m$ , energia  $E$  e momento angular  $L$  se move no plano sob a ação de uma força  $\vec{\mathbf{F}} = -(k/r^3) \hat{\mathbf{r}}$ , com  $k$  constante.
  - Escreva a expressão para a energia potencial  $V$ .
  - Se  $L = \sqrt{km}$ , mostre que a trajetória é dada pela equação  $r = A/\theta$ , sendo  $A$  uma constante.
- O movimento de uma partícula no plano satisfaz às equações diferenciais  $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$  e  $mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0$ . Mostre como pode-se obter uma única equação diferencial para a trajetória,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{L^2u^2}F(u).$$

- Na teoria de Yukawa das forças nucleares, a força entre um próton e um nêutron tem o potencial  $V(r) = -ke^{-r/r_0}/r$ , sendo  $k$  e  $r_0$  constantes.
  - Mostre que a força associada a esse potencial é conservativa.
  - Qual é o valor da razão  $F(r_0)/F(2r_0)$  entre os módulos da força nos pontos  $r = r_0$  e  $r = 2r_0$ ?

9. Uma partícula de massa  $m$ , energia  $E$  e momento angular  $L$  se move no plano sob a ação de uma força  $\vec{F} = -(k/r^3)\hat{r}$ , com  $k$  constante. Para uma partícula com energia total nula, escreva a equação horária radial  $r = r(t)$ , e a equação da trajetória.
10. Uma partícula em um campo de força central segue a trajetória  $r = c\theta^2$ , onde  $c$  é uma constante. Determine a forma da força.
11. (a) Quais os tipos de movimento que podem ocorrer para uma partícula sob a ação da força

$$F = -\frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3},$$

assumindo que  $K_1 > 0$ ?

- (b) Resolva a equação da órbita e mostre qual o resultado para  $L^2 < -mK_2$ .
12. A energia potencial para um oscilador harmônico isotrópico é

$$V = \frac{1}{2}kr^2.$$

- (a) Qual é a energia potencial *efetiva* para uma partícula de massa  $m$  movendo-se com momento angular  $L$  em relação à origem sob esse potencial?
- (b) Encontre a frequência de revolução para um movimento circular e a frequência de pequenas oscilações radiais ao redor desse movimento circular.
- (c) Encontre  $r(t)$  e  $\theta(t)$  para a órbita da partícula.
13. Uma força central do tipo  $F = k/r^2$  gera trajetórias descritas pela equação geral  $r = 1/(A + B \cos \theta)$ . Qual relação as constantes  $A$  e  $B$  devem obedecer para que se tenha trajetórias hiperbólicas, parabólicas e elípticas?
14. (a) Quais são as leis de Kepler?
- (b) Demonstre, matematicamente, a relação

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m},$$

válida para partículas sob a ação de uma força central.

15. O jornal “*Folha de São Paulo*” noticiou no dia 30 de julho de 2005 a descoberta de um novo planeta do sistema solar, girando “ao redor do Sol a cada 560 anos, a uma distância de 14,5 bilhões de quilômetros da estrela (Plutão, em comparação, fica a 5,6 bilhões de quilômetros).”
- (a) Sabendo que a luz do Sol demora cerca de oito minutos e meio para chegar à Terra, verifique se as informações dadas pelo jornal fazem sentido.
- (b) Com as informações dadas acima, calcule qual é o período da órbita de Plutão.
16. O satélite Explorer I tem uma órbita elíptica com perigeu de 360 km e apogeu de 2550 km acima da superfície da Terra. Encontre o valor do semi-eixo menor da trajetória e a distância entre a superfície da Terra e o satélite quando este está a  $90^\circ$  do perigeu. Lembre que a Terra tem 6400 km de raio.

17. (a) Calcule o campo gravitacional a uma distância  $x$  de um plano infinito de densidade superficial  $\sigma$  constante.
- (b) Compare o resultado com o obtido para uma casca esférica de mesma densidade superficial.
18. Calcule o vetor campo gravitacional devido a um cilindro homogêneo de matéria, de densidade  $\rho$ , raio  $a$  e comprimento  $\ell$ , em um ponto exterior ao cilindro mas que está no eixo do cilindro, a uma distância  $d$  de seu topo.
19. Mostre que se o Sol fosse envolto por uma nuvem esférica de poeira de densidade uniforme  $\rho$  o campo gravitacional dentro da nuvem seria

$$\vec{g} = - \left( \frac{M}{r^3} + \frac{4\pi}{3}\rho \right) G\vec{r},$$

onde  $M$  é a massa do sol, e  $\vec{r}$  é um vetor que vai do sol até qualquer ponto dentro da nuvem de poeira.

20. Calcule a altura máxima das marés causadas pela atração da Lua,  $h$ , usando como artifício dois poços ortogonais na Terra, um indo do polo ao centro da Terra, e o outro indo do centro da Terra ao equador, e mostre que vale a relação

$$h = \frac{3GM_L R_T}{2gD_{TL}^3},$$

onde  $M_L$  é a massa da Lua,  $R_T$  é o raio da Terra e  $D_{TL}$  é a distância da Terra à Lua.

21. Um tiro de canhão é disparado com uma velocidade inicial de módulo  $v_0$ , fazendo um ângulo  $\alpha$  com a horizontal. No ponto mais alto da trajetória, o projétil explode e se divide em dois fragmentos de mesma massa. Um fragmento, cuja velocidade é nula imediatamente após a explosão, cai verticalmente, indo direto para o chão. A que distância do canhão aterrissará o outro fragmento, supondo que o terreno é plano e que o atrito com o ar é desprezível?
22. Mostre que se um nêutron de massa  $m_N$  sofrer uma mudança de direção de  $90^\circ$  após uma colisão elástica com um dêuteron de massa  $2m_N$  inicialmente em repouso, o nêutron transfere  $2/3$  da sua energia cinética original para o dêuteron.
23. No dia 4 de julho de 2005 o módulo de impacto da sonda Deep Impact, da NASA, pesando aproximadamente  $380 \text{ kg}$ , se chocou com o núcleo do cometa Tempel 1, a uma velocidade de  $37.000 \text{ km/h}$ . Uma astróloga russa está processando a NASA por, com isso, interferir em seu trabalho, alterando a rota do cometa. Supondo que a colisão foi totalmente inelástica, em uma dimensão, e que o cometa é basicamente um bloco de ‘gelo sujo’ que tem  $14 \text{ km}$  de comprimento por  $5 \text{ km}$  de altura e  $5 \text{ km}$  de largura, calcule quais foram, aproximadamente, as variações de velocidade e energia do cometa causadas pelo impacto (use que a densidade do ‘gelo sujo’ é de cerca de  $0,9 \text{ g/cm}^3$ , ou seja, menor que a da água). A acusação da astróloga faz sentido?
24. Um próton de massa  $m_1$  colide elasticamente com um núcleo atômico desconhecido, em uma câmara de bolhas, e é desviado em um ângulo  $\varphi$ . A razão  $p_{1-final}/p_{1-inicial}$  é determinada pelos rastros deixados pelo próton na câmara de bolhas antes e depois da colisão. Encontre a massa  $m_2$  do núcleo desconhecido.

25. Imagine que o núcleo atômico desconhecido do exercício anterior pode ser descrito como tendo a forma aproximada de uma gota, e que essa gota pode ser construída aproximadamente pela união de um cone de altura  $a$  e raio da base  $r$ , com uma meia esfera de raio  $r$ . Se a densidade desse gota for constante calcule onde está seu centro de massa.
26. Novamente na câmara de bolhas, uma partícula de massa  $m_1$  e velocidade  $v_1$  colide com uma outra partícula de massa  $m_2$  que estava em repouso, e as duas partículas passam a se mover juntas. Que fração da energia cinética inicial foi perdida na colisão?
27. Uma partícula de massa  $m_1$  e momento  $p_{1I}$  colide elasticamente com uma partícula de massa  $m_2$  e momento  $p_{2I}$  que vinha na direção oposta. Se  $m_1$  deixa a colisão desviada por um ângulo  $\varphi$  em relação a sua direção original, calcule seu momento final.
28. Um bloco de massa  $m$  repousa no topo de um plano inclinado de massa  $M$  e ângulo de inclinação  $\alpha$ , a uma altura  $a$ . O plano inclinado, por sua vez, repousa sobre uma mesa horizontal. Todas as as superfícies são sem atrito. Se o sistema parte do repouso, mostre que a velocidade do plano inclinado no instante em que o bloco toca a mesa é

$$v = \sqrt{\frac{2m^2gh \cos^2 \alpha}{(M + m)(M + m \sin^2 \alpha)}}$$

29. Considere a colisão no plano de duas partículas de mesma massa, sendo que uma delas está inicialmente parada: qual será o ângulo formado pelas direções das partículas depois da colisão? Se as partículas tiverem massas diferentes, existirá alguma restrição sobre esse ângulo?
30. Um asteróide de massa  $m$  é detectado a uma distância  $d$  da Terra, se movendo com velocidade  $v$  numa linha reta em direção ao nosso planeta. Para evitar a destruição da humanidade os americanos mandam um grupo de heróis para colocar uma bomba no asteróide. A idéia não é alterar a componente do movimento do asteróide em direção à Terra, mas sim dividi-lo em duas partes iguais, que deverão se separar movendo-se numa direção perpendicular à do movimento inicial do asteróide, de modo que ambas não atinjam mais a Terra. Escreva, em termos de  $m$ ,  $d$ ,  $v$  e do raio da Terra, qual o mínimo de energia que a bomba deve ter para que a missão não falhe.
31. Imagine que o asteróide vindo na direção da Terra tem a forma de uma semi-esfera de raio  $R$ . Supondo que ele tem densidade constante, a que distância do plano formado por sua base circular estará seu centro de massa?
32. O foguete trazendo de volta do asteróide os heróis sobreviventes da missão descrita no exercício anterior parte do repouso no espaço, ligando seus motores. A que fração da massa inicial do foguete o seu momento será máximo?
33. Imagine agora que a bomba colocada no asteróide da questão inicial falhou e que o asteróide vem inteiro, com massa  $m$  e momento  $p$ , em direção à Terra. Se a colisão for totalmente inelástica qual será a mudança na velocidade da Terra depois do choque? E se a colisão pudesse ser elástica, qual seria o ângulo de desvio do asteróide?
34. Os astronautas, em seu retorno, ficam por algum tempo se movendo ao redor da Terra em uma órbita que passa ao redor dos polos. O tempo em que eles cruzam cada latitude

é medido de modo a se conhecer a função  $\theta(t)$ . Mostre como se encontrar o perigeu<sup>1</sup> da órbita, seu eixo semimaior, e sua excentricidade em termos de  $\theta(t)$ , e o valor de  $g$  na superfície da Terra, assumindo para isso que a Terra é uma esfera de raio  $R$ .

35. Deduza *passo a passo* a relação, válida para o experimento de Rutherford, entre a seção de choque diferencial  $d\sigma$  e a diferencial do ângulo de espalhamento  $d\Theta$ ,

$$d\sigma = \left( \frac{q_1 q_2}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} d\Theta.$$

36. Imagine que uma massa  $M$  formada por um grupo de núcleos atômicos radioativos é encapsulada de modo a emitir partículas numa única direção, a uma taxa constante de  $N$  partículas por segundo. Cada partícula emitida tem uma massa  $m$  e uma velocidade  $v$  em relação ao grupo de núcleos atômicos. Ignorando qualquer força externa, monte as equações de movimento para o grupo de núcleos atômicos.
37. Um foguete, situado no espaço longínquo e inicialmente em repouso em relação a um sistema de referência inercial, tem uma massa  $M$ . O motor do foguete é então ligado por um tempo  $\Delta t$ , durante os quais se consome combustível a uma taxa de  $m$  kg/s. A velocidade dos produtos de combustão em relação ao foguete é  $v_e$ . Passado o tempo  $\Delta t$  quais são a massa e a velocidade do foguete?
38. No dia 26 de julho de 2005 o ônibus espacial Discovery foi lançado para se acoplar a uma estação espacial na órbita da Terra. Numa das notícias sobre o lançamento podia-se ler que “no momento do lançamento, o ônibus espacial é acelerado pelos propulsores” e “após dois minutos, quando a nave está a 45 km de altitude, os propulsores se separam e caem”. Considerando que a aceleração causada pelos propulsores é constante, na vertical, e que a velocidade de escape dos gases gerados pelos combustíveis nos propulsores é da ordem de 10.000 km/h, obtenha a razão entre a massa inicial e a massa final do ônibus espacial ao final dos dois minutos, mas antes da liberação dos propulsores.
39. Um foguete se move no vácuo, sem a ação de forças externas, partindo do repouso, emitindo gases a uma velocidade  $v$ . Ache a velocidade final do foguete se sua carga útil – sua massa após a queima de todo o combustível – for uma fração  $q$  da massa inicial do foguete.
40. Um módulo de pouso lunar se aproxima da superfície da Lua. Assuma que um terço de seu peso é combustível, que a velocidade de exaustão dos gases dos foguetes do módulo é 1500 m/s, e que a aceleração da gravidade da superfície lunar é um sexto da que existe na superfície da Terra. Por quanto tempo o módulo lunar pode flutuar sobre a superfície da Lua sem tocar seu solo, antes de ficar sem combustível?

Prof. Sandro Silva e Costa  
Abril de 2009

---

<sup>1</sup>**perigeu.** *S.m. Astr.* Ponto da órbita de um astro em torno da terra, no qual esse astro se encontra mais próximo do centro do nosso planeta. (Fonte: “*Novo Dicionário Básico da Língua Portuguesa Folha/Aurélio*”, Ed. Nova Fronteira, 1995.)