# $1^a$ *lista de exercícios da disciplina Mecânica Clássica I*

1. Um sistema de unidades usado por engenheiros mecânicos tem, em adição ao pé (abreviação $ft$) e ao segundo ($s$), uma terceira unidade fundamental, de força, a libra-peso (normalmente chamada de libra, e abreviada por $lb - wt$). A unidade de massa é então uma unidade derivada, chamada de *slug*. Expresse as dimensões do *slug* e da constante universal da gravitação $G$ em termos das unidades fundamentais (pé, libra-peso, segundo) desse sistema.

2. Obtenha uma expressão para a magnitude da força $\overrightarrow{F}$ resultante da soma de três forças diferentes $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2$ e $\overrightarrow{F}_3$, em termos das magnitudes $F_1$, $F_2$, $F_3$ e dos ângulos $\theta_{12}$, $\theta_{13}$ e $\theta_{23}$ entre cada par de forças.

3. Encontre as componentes de $d^2\overrightarrow{A}/dt^2$ em coordenadas cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$, onde o vetor $\overrightarrow{A}$ é uma função de $t$ e das coordenadas.

4. Calcule, *passo a passo, em coordenadas esféricas,* a divergência de um vetor $\overrightarrow{A}$, usando que, nessas coordenadas,
$$\overrightarrow{\nabla} = \widehat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\widehat{\varphi}}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$
e
$$\overrightarrow{A} = A_r\widehat{r} + A_\theta\widehat{\theta} + A_\varphi\widehat{\varphi}\,.$$

5. Calcule a derivada da aceleração em coordenadas polares no plano.

6. Calcule a integral $\int \vec{\mathbf{A}} \times \ddot{\vec{\mathbf{A}}} dt$.

7. Uma partícula se move com velocidade constante seguindo a trajetória descrita pela equação $r = k\,(1 + \cos\theta)$, conhecida como cardióide. Obtenha $\vec{\mathbf{a}}_r = \ddot{r}\,\hat{\mathbf{r}}$ e $|\vec{\mathbf{a}}|$.

8. Encontre as componentes ligadas às coordenadas $r$ e $\theta$ da aceleração $\vec{a}$ de uma partícula em coordenadas polares planas.

9. Mostre que
$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}\,.$$

10. Só para mostrar que você estudou mesmo, obtenha as componentes da aceleração em coordenadas elípticas, cuja definição é dada pelas relações $x = a\cosh u \cos v$ e $y = a \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$, onde $a$ é um parâmetro.

11. O Sol se encontra aproximadamente a uma distância de 25.000 anos-luz do centro da nossa galáxia e desloca-se em uma circunferência à velocidade de 300 km s$^{-1}$. Determine a massa aproximada da galáxia, supondo que a força gravitacional exercida sobre o Sol possa ser calculada considerando-se que toda a massa galáctica esteja concentrada no centro da galáxia. Exprima o resultado como a razão entre a massa da galáxia e a massa solar. Não é necessário conhecer a constante $G$ ou a massa do Sol para resolver este problema, se você comparar o período de revolução do Sol em torno do centro da galáxia com o período de revolução da Terra em torno do Sol.

12. No livro "*O despertar na Via Láctea*", de Timothy Ferris, encontra-se o seguinte trecho: "Lisas como um rolamento e menores do que uma cidade, mas tão maciças quanto o Sol, as estrelas de nêutrons giram rapidamente no seu eixo e emitem pulsares de radiofreqüência, ao girar, criando um farol do tipo que revelou a localização das supernovas de Tycho e Kepler." Usando essas informações, o valor da massa solar ($M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg) e estimando o raio de uma cidade como sendo $R_c = 50$ km, calcule qual é a densidade de uma estrela de nêutrons e qual sua freqüência máxima de rotação.

13. Determine o movimento de um corpo projetado da Terra, na vertical, à velocidade igual à velocidade de escape. Despreze a resistência do ar.

14. Uma partícula de massa $m$ em repouso em $t = 0$ está submetida à força $F(t) = F_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$. Determine $v(t)$ e $x(t)$.

15. Uma partícula de massa $m$ e velocidade inicial $v_0$ é sujeita a uma força $F = -F_0 t (t - a)$, onde $F_0$ e $a$ são constantes. Obtenha as funções velocidade, $v = v(t)$, e movimento, $x = x(t)$.

16. Uma partícula de massa $m$ e velocidade inicial $v_0$ é sujeita a uma força $F = kte^{-\alpha t}$, onde $k$ e $\alpha$ são constantes. Obtenha as funções velocidade, $v = v(t)$, e movimento, $x = x(t)$.

17. Uma partícula de massa $m$ acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é $V = ax^2 - bx^3$.

    (a) Determine a força.

    (b) A partícula parte da origem $x = 0$ com velocidade $v_0$. Mostre que se $|v_0| < v_c$, onde $v_c$ é uma certa velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada à região próxima da origem. Determine $v_c$.

18. Uma partícula se move em um semi-círculo de raio $R$, da extremidade $A$ do diâmetro até a outra extremidade $B$, sendo atraída durante todo o trajeto por uma força proporcional à distância ao ponto $A$ e direcionada a esse ponto. Quando a partícula chega ao ponto $B$, a magnitude da força é $F_0$. Calcule o trabalho feito contra a força na trajetória da partícula de $A$ até $B$.

19. Uma partícula no plano $xy$ é atraída em direção à origem por uma força $F = k/y$, inversamente proporcional à sua distância do eixo $x$.

    (a) Calcule o trabalho feito pela força quando a partícula se move do ponto $x = 0$, $y = a$ ao ponto $x = 2a$, $y = 0$ através de um caminho que segue os lados de um retângulo feito de um segmento paralelo ao eixo $x$ de $x = 0$, $y = a$ a $x = 2a$, $y = a$, e um segmento vertical que vai deste último ponto até o eixo $x$.

    (b) Calcule o trabalho feito pela mesma força quando a partícula se move em uma elipse de semi-eixos $a$ e $2a$. (Dica: use $x = 2a \operatorname{sen} \theta$ e $y = a \cos \theta$.)

20. Uma partícula de massa $m$ se move no plano $xy$ sob uma força que a puxa para o eixo $x$, com módulo que obedece à expressão $|F| = k/y$. Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se move do ponto de coordenadas cartesianas $(0, a)$ para o ponto $(2a, 0)$, de acordo com uma trajetória que segue os lados de um retângulo formado pela origem, esses dois pontos e o ponto $(2a, a)$.

21. Uma partícula de massa $m$ está sujeita a uma força $F = -kx + kx^3/a^2$, onde $k$ e $a$ são constantes.

    (a) Escreva a expressão para a energia potencial $V = V(x)$ associada a essa força e, em seguida, encontre os pontos de retorno do movimento, isto é, os pontos em que a velocidade da partícula se anula.

    (b) No caso de uma partícula com energia total $E = ka^2/4$, determine a função de movimento $x = x(t)$.

22. Um professor dá como exercício para seus alunos as expressões $V_1(x) = x^{-(k/\ln x)}$ e $V_2(x) = -k/x^2$, onde $k$ é uma constante, para que eles encontrem as equações de movimento para uma partícula puntual de massa $m$ e energia total $E$ sujeita a esses potenciais, um de cada vez. Obtenha as respostas certas.

23. Uma pequeno corpo de massa $m$ é largado de uma altura $h$, sofrendo uma força de atrito dependente da velocidade do tipo $F = bv^2$, sendo $b$ uma constante. Obtenha as expressões para a velocidade e a posição em função do tempo. (Lembre-se: $h$ *deve* aparecer na sua resposta!)

24. Um barco de massa $m$ desliga seu motor num lago em que a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade (isto é, do tipo $bv$, sendo $b$ uma constante). Encontre quanto o barco se desloca até parar e mostre que, para qualquer tempo, $v = v_0 - b(x - x_0)/m$.

25. Um barco cuja velocidade inicial é $v_0$ é desacelerado por uma força de atrito $F = -be^{\alpha v}$. Determine o seu movimento, e o tempo e a distância necessários para parar o barco.

26. Dois corpos, rotulados como $A$ e $B$, ambos com a mesma massa $m$, caem livremente. O corpo $A$ sofre uma força de atrito dependente da velocidade $F_A = b_1 v$, enquanto o corpo $B$ sofre uma força de atrito $F_B = b_2 v^2$, sendo que $b_1$ e $b_2$ são constantes. Qual é a relação entre as velocidades terminais dos dois corpos?

27. Um pequeno corpo de massa $m$ é largado de uma altura $h$, sofrendo uma força de atrito linearmente proporcional à velocidade (isto é, do tipo $bv$, sendo $b$ uma constante). Obtenha as expressões para a velocidade e a posição em função do tempo. (Lembre-se: $h$ *deve* aparecer na sua resposta!)

28. Uma partícula de massa $m$, inicialmente com velocidade $v_0$, sofre uma força de atrito dependente da velocidade, do tipo $F = -bv^3$, sendo $b$ uma constante. Obtenha as expressões para a velocidade e a posição em função do tempo.

29. Uma moeda de 10 g cai do alto do décimo primeiro andar do bloco B da UFABC. Considerando que cada andar tem aproximadamente 3 metros de altura, que o atrito da moeda com o ar é do tipo $F = -bv$, e estimando ainda que $b = 0,005$ kg/s e $g = 10$ m/s$^2$, obtenha o tempo que a moeda leva para chegar no chão e qual a velocidade final dela (dica: na hora de usar números faça $e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2}$).

30. Num circuito elétrico contendo uma indutância $L$, uma resistência $R$ e um capacitor $C$, a variação da carga elétrica $q$ com o tempo é descrita pela equação diferencial $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$.

    (a) Usando como hipótese uma função do tipo $q(t) = Ae^{Bt}$, sendo $A$ e $B$ constantes, mostre que há três tipos de soluções possíveis.

(b) Mostre que em qualquer caso a quantidade $E \equiv (LI^2 + q^2/C)/2$, onde $I \equiv \dot{q}$ é a corrente, não se conserva, mas que obedece à relação

$$\frac{dE}{dt} = -RI^2.$$

31. Um oscilador harmônico sem atrito, inicialmente em repouso, é sujeito a uma força $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, começando em $t = 0$. Escreva a expressão para o movimento em função do tempo, $x = x(t)$.

32. Na cosmologia padrão supõe-se que o universo começou como uma 'singularidade', isto é, um ponto sem volume, e depois passou a se expandir até atingir o tamanho atual. Uma equação que descreve um possível tipo de crescimento do universo com o tempo é uma equação diferencial do tipo
$$m\ddot{a} - b\dot{a} = F_0 \,,$$
onde $m$, $b$ e $F_0$ são constantes e $a(t)$ é o fator de escala que fornece o tamanho do universo. Interprete cada componente dessa equação e a resolva, lembrando que a solução obtida deve começar do zero e crescer com o tempo. Obtenha ainda a equação para a velocidade de crescimento do universo em função do tempo.

33. Uma partícula de massa $m$ se move de acordo com as equações
$$x = x_0 + at^2\,, \quad y = bt^3\,, \quad z = ct\,.$$
Encontre o momento angular $\overrightarrow{L}$ em função do tempo $t$. Encontre a força $\overrightarrow{F}$ e dela obtenha o torque $\overrightarrow{N}$ agindo na partícula.

34. Determine quais das seguintes forças são conservativas, e encontre a energia potencial para aquelas que o forem:

(a) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2\,, \quad F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y\,, \quad F_z = 18abxz^2y\,;$

(b) $F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2\,, \quad F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y\,, \quad F_z = 6abxyz^2\,;$

(c) $\overrightarrow{F} = \widehat{x}F_x(x) + \widehat{y}F_y(y) + \widehat{z}F_z(z)\,.$

35. Verifique se as forças abaixo são conservativas e, se forem, calcule o potencial associado a cada uma delas:

(a)
$$\begin{cases} F_x = x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\ F_y = y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \\ F_z = z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} \end{cases} ;$$

(b) $F_x = xe^r$, $F_y = ye^r$, $F_z = ze^r$.

36. Na teoria de Yukawa das forças nucleares, a força entre um próton e um nêutron tem o potencial $V(r) = -ke^{-r/r_0}/r$, sendo $k$ e $r_0$ constantes.

(a) Mostre que a força associada a esse potencial é conservativa.

(b) Qual é o valor da razão $F(r_0)/F(2r_0)$ entre os módulos da força nos pontos $r = r_0$ e $r = 2r_0$?

37. Imagine que uma onda eletromagnética tendo originalmente um campo elétrico variante do tipo senoidal, $E_1(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, passe por um aparelho que a transforme num campo variante do tipo $E_2(t) = E_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$. Se essa onda atingir um elétron em repouso antes de passar pelo aparelho e outro elétron também em repouso depois de passar pelo aparelho, qual será a relação entre as velocidades dos dois elétrons?

38. Um projétil é disparado com uma velocidade $v_0$ tal que passa por dois pontos a uma mesma distância do solo. Mostre que se a arma é ajustada para que o disparo atinja o seu alcance máximo, a separação entre os pontos é

$$d = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 4gh}\,.$$

39. Um projétil é disparado da origem no plano $xz$, com velocidade $v_0$, para atingir um alvo no ponto $x = x_0,\ z = 0$. Desprezando a resistência do ar, encontre o ângulo de elevação $\theta$ correto. Mostre que, em geral, há dois ângulos possíveis.

40. Uma partícula de carga $q$ em um magnetron cilíndrico move-se em um campo magnético uniforme $\overrightarrow{B} = B\widehat{z}$, e um campo elétrico $\overrightarrow{E} = (a/\rho)\,\widehat{\rho}$, onde $\rho$ é a distância ao eixo $z$ e $\widehat{\rho}$ é um vetor unitário dirigido radialmente para fora do eixo $z$. As constantes $a$ e $B$ podem ser tanto positivas quanto negativas.

    (a) Construa as equações de movimento em coordenadas cilíndricas.

    (b) Mostre que a quantidade

    $$K = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2c}\rho^2$$

    é uma constante do movimento.

Prof. Sandro Silva e Costa
Março de 2009