

2ª avaliação da disciplina de cosmologia (pós-graduação)

1. As soluções cosmológicas de de Sitter, obtidas para um modelo de universo vazio, com uma constante cosmológica positiva, tem grande importância histórica. Obtenha a expressão do fator de escala $a(t)$ para essas soluções, e mostre que através de uma transformação adequada de coordenadas a solução completa para o caso plano pode ser escrita como

$$ds^2 = \cos^2 \sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3}} dT^2 - dR^2 - \frac{3}{\Lambda} \sin^2 \sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3}} (d\theta + \sin \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

que é, na verdade, a expressão originalmente apresentada por de Sitter, em 1917.

2. Num artigo recente, intitulado “A solution to the Fermi paradox: the solar system, part of a galactic hypercivilization?”, pode-se ler que podem existir outros universos ao longo de dimensões extras que podem ser paralelos ao nosso. Imagine um universo de curvatura positiva vazio contendo apenas a constante cosmológica, e que, embora esteja em expansão, nasceu com um volume finito. Obtenha a expressão do fator de escala $a(t)$ para esse universo e mostre que a idade atual dele é dada pela expressão

$$t_0 = \frac{1}{H_0 \Omega_0^{1/2}} \operatorname{arccosh} \left[\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_0} \right]^{1/2}. \quad (2)$$

3. Imagine que o universo contivesse além da matéria comum, uma matéria especial chamada quintessência, com uma equação de estado $p_q = w_q \rho_q$, e nada mais, de modo que o universo fosse estático e sem aceleração. Que valores o parâmetro w_q poderia assumir para que isso seja verdade? Qual seria a relação entre o fator de escala, a densidade de energia da quintessência e o parâmetro w_q ?
4. Num universo plano contendo apenas matéria e radiação, com $H_0 = 75 \text{ km/s/Mpc}$, $T_0 = 2,75 \text{ K}$ e $\Omega_{r,0} = 8,4 \times 10^{-5}$, para que tempo ocorre a igualdade entre as densidades de energia da radiação e da matéria? A que temperatura isso corresponde?
5. (a) O que significa o termo matéria escura? Por que se supõe sua existência? Quais as hipóteses há para sua constituição?
- (b) Na teoria inflacionária supõe-se a existência de um campo escalar $\phi(t)$ obedecendo a equação

$$\ddot{\phi} + 3H(t) \dot{\phi} = -\hbar c^3 \frac{dV}{d\phi}. \quad (3)$$

Por comparação com a equação de conservação de energia,

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(p_\phi + \rho_\phi) = 0, \quad (4)$$

obtenha as expressões para a densidade de energia e a pressão do campo escalar. (Sugestão: multiplique a equação do campo escalar por $\dot{\phi}$ e depois compare o resultado com a equação de conservação).