

## 2ª avaliação da disciplina de cosmologia (pós-graduação)

1. Na revista Scientific American Brasil deste mês a reportagem de capa cita a solução das equações de Einstein conhecida como anti-de Sitter: “o espaço anti-de Sitter não está nem expandindo, nem contraindo”. Tal espaço obedece à equação de Friedmann para um universo vazio, de curvatura negativa e com constante cosmológica negativa. Ache a solução para o fator de escala explicitamente e mostre que existe uma transformação de coordenadas que permite escrever a solução anti-de Sitter como sendo estática, isto é, na forma

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda R^2}{3}\right) dT^2 - \frac{dR^2}{1 + \frac{\Lambda R^2}{3}} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

2. (a) Num universo de curvatura positiva contendo apenas matéria ( $\Omega_0 > 1$ ,  $k = +1$ ), a idade atual do universo é dada pela fórmula

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \arccos\left(\frac{2 - \Omega_0}{\Omega_0}\right) - \frac{1}{\Omega_0 - 1}.$$

Mostre como obter essa expressão.

- (b) Obtenha a expressão para a idade atual do universo no caso de um universo plano, sem curvatura, também contendo apenas matéria. Qual seria o resultado no caso de um universo plano contendo apenas radiação? Note que seu resultado deve conter apenas as constantes  $H_0$  e  $\Omega_0$ .
3. Uma das mais recentes especulações na área da cosmologia é de que o universo pode conter um campo escalar, de natureza quântica, que possui uma densidade de energia  $\rho$  positiva e um parâmetro  $w$  da equação de estado  $p = w\rho$  menor que zero. Assuma que o universo é plano e que possui apenas matéria com  $\Omega_{m,0} \leq 1$  e quintessência com  $w = -1/2$ . Em que valor do fator de escala a densidade de energia da matéria e da quintessência serão iguais? A que idade do universo isso irá ocorrer?
4. Assuma que o universo é e sempre foi plano, e que existem apenas radiação e a constante cosmológica. Nesse caso, determine para que tempos a temperatura cósmica era 0.1 MeV e 1/4 eV.
5. (a) O que é a inflação? Que tipo de problemas ela resolve? Que mecanismo físico está por trás dela?
- (b) A galáxia anã de Draco tem uma luminosidade  $L \approx 2 \times 10^5 L_\odot$ , e a maior parte de sua luminosidade vem de uma região de raio  $r_h \approx 120$  pc. A dispersão de velocidades radiais das estrelas dessa galáxia é

$$\sigma_r \equiv \left\langle (v_r - \langle v_r \rangle)^2 \right\rangle^{1/2} \approx 11 \text{ km/s}.$$

Assumindo que a velocidade quadrática média das estrelas é  $\langle v^2 \rangle = 3\sigma_r^2$ , calcule aproximadamente qual é a massa da galáxia de Draco, em unidades de massa solar ( $M_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg), e calcule então a razão massa-luminosidade dessa galáxia.

Prof. Sandro Silva e Costa  
Dezembro de 2005