

1ª avaliação da disciplina de cosmologia (pós-graduação)

1. A luminosidade de uma galáxia típica, comum, é da ordem de $2 \times 10^{10} L_{\odot}$, onde L_{\odot} é a luminosidade solar, que vale $2,4 \times 10^{45} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1}$. A energia média dos fótons emitidos por uma estrela é de cerca de 2 eV . Com esses dados, mostre que o fluxo de fótons de uma galáxia a um redshift $z \ll 1$, onde vale que $v = H_0 R$, é da ordem de $100 z^{-2} m^{-2} s^{-1}$. Compare o fluxo de fótons das maiores galáxias próximas ($R \sim 1 \text{ Mpc}$) com o fluxo das estrelas mais próximas ($R \sim 1 \text{ pc}$) e mostre que um deles é 100 vezes menor que o outro.
2. Suponha que você é uma criatura bidimensional vivendo sobre a superfície de uma esfera de raio R . Mostre que se você desenhar um círculo de raio r , a circunferência do círculo terá o valor $C = 2\pi R \text{ sen}(r/R)$. Imagine que a Terra é uma esfera perfeita de raio $R = 6371 \text{ km}$. Se você puder medir as distâncias com um erro de $\pm 1 \text{ m}$, qual deverá ser o tamanho mínimo de um círculo que possa lhe convencer de que a Terra é esférica e não plana?
3. A energia E de um fóton está associada à sua frequência f pela expressão $E = hf$, onde h é a constante de Planck. A partir dessa relação, mostre que num universo em expansão a densidade de energia da radiação ρ_{rad} é proporcional a a^{-4} , onde a é o fator de escala. Usando esse resultado e a idéia de que a expansão do universo é adiabática, com conservação do número de partículas, obtenha que, para a radiação, $\rho = 3p$.
4. Se o universo possuísse curvatura positiva, e contivesse apenas matéria comum e a constante cosmológica, ele poderia ser estático e sem aceleração? Existiria, nesse caso, algum limite a ser obedecido sobre os valores de Λ e/ou a ?
5. Mostre que o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - t^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega \right],$$

onde $d\Omega = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$, é uma solução das equações de Friedmann com $p = \rho = \Lambda = 0$ (na verdade, o universo representado por essa solução é conhecido como universo de Milne). Mostre ainda que esse elemento de linha pode ser reescrito, a partir de uma transformação de coordenadas adequada, como

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Prof. Sandro Silva e Costa
Outubro de 2005

1ª avaliação da disciplina de cosmologia (pós-graduação)

1. A luminosidade de uma galáxia típica, comum, é da ordem de $2 \times 10^{10} L_{\odot}$, onde L_{\odot} é a luminosidade solar, que vale $2,4 \times 10^{45} \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1}$. A energia média dos fótons emitidos por uma estrela é de cerca de 2 eV . Com esses dados, mostre que o fluxo de fótons de uma galáxia a um redshift $z \ll 1$, onde vale que $v = H_0 R$, é da ordem de $100 z^{-2} m^{-2} s^{-1}$. Compare o fluxo de fótons das maiores galáxias próximas ($R \sim 1 \text{ Mpc}$) com o fluxo das estrelas mais próximas ($R \sim 1 \text{ pc}$) e mostre que um deles é 100 vezes menor que o outro.
2. Suponha que você é uma criatura bidimensional vivendo sobre a superfície de uma esfera de raio R . Mostre que se você desenhar um círculo de raio r , a circunferência do círculo terá o valor $C = 2\pi R \text{sen}(r/R)$. Imagine que a Terra é uma esfera perfeita de raio $R = 6371 \text{ km}$. Se você puder medir as distâncias com um erro de $\pm 1 \text{ m}$, qual deverá ser o tamanho mínimo de um círculo que possa lhe convencer de que a Terra é esférica e não plana?
3. A energia E de um fóton está associada à sua frequência f pela expressão $E = hf$, onde h é a constante de Planck. A partir dessa relação, mostre que num universo em expansão a densidade de energia da radiação ρ_{rad} é proporcional a a^{-4} , onde a é o fator de escala. Usando esse resultado e a idéia de que a expansão do universo é adiabática, com conservação do número de partículas, obtenha que, para a radiação, $\rho = 3p$.
4. Se o universo possuísse curvatura positiva, e contivesse apenas matéria comum e a constante cosmológica, ele poderia ser estático e sem aceleração? Existiria, nesse caso, algum limite a ser obedecido sobre os valores de Λ e/ou a ?
5. Mostre que o elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - t^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega \right],$$

onde $d\Omega = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2$, é uma solução das equações de Friedmann com $p = \rho = \Lambda = 0$ (na verdade, o universo representado por essa solução é conhecido como universo de Milne). Mostre ainda que esse elemento de linha pode ser reescrito, a partir de uma transformação de coordenadas adequada, como

$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Prof. Sandro Silva e Costa
Outubro de 2005