# $2^a$ *lista de exercícios de Cosmologia*

1. Converta as quantidades a seguir nas unidades indicadas inserindo os valores apropriados das constantes universais $c$, $\hbar$, $G$ e $k_B$:

   - $T_0 = 2,725\,\mathrm{K} \rightarrow$ eV;
   - $\rho_\gamma = \pi^2 T_0^4/15 \rightarrow$ eV$^4$ e g cm$^{-3}$;
   - $1/H_0 \rightarrow$ cm ($H_0 = 75$ km/s/Mpc);
   - $m_{Pl} \equiv 1,2 \times 10^{19}$ GeV $\rightarrow$ K, cm$^{-1}$, s$^{-1}$.

2. Assuma que o universo é e sempre foi plano, e que existem apenas matéria e radiação. Nesse caso, determine para que tempos a temperatura cósmica era 0.1 MeV e 1/4 eV.

3. Use as idéias e as definições envolvendo o redshift $z$ para comparar até a ordem de $z^2$ as seguintes distâncias (se necessário, e apenas *se necessário*, considere o universo como sendo plano):

   - a distância de luminosidade,
   $$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{1/2},$$
   onde $L$ é a luminosidade intrínseca de um dado objeto e $f$ é o fluxo de radiação luminosa medido por um observador distante do objeto luminoso;
   - a distância própria,
   $$d_p\left(t_o\right) \equiv c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a\left(t\right)},$$
   onde $t_e$ é o tempo em que um objeto emitiu luz e $t_0$ ó tempo atual em que o objeto foi observado;
   - a distância angular,
   $$d_A \equiv \frac{\ell}{\delta\theta},$$
   onde $\ell$ é o comprimento próprio de um objeto observado sob um ângulo $\delta\theta$.

   Quando essas distâncias começam a diferir em cerca de 10%?

4. Astrônomos, em geral, têm duas formas diferentes de medir a luminosidade de um dado objeto. A magnitude aparente $m$ de um objeto é definida em termos do fluxo bolométrico $f$ do objeto como
$$m = -2,5\log_{10}\left(\frac{f}{f_x}\right),$$
onde $f_x = 2,53 \times 10^{-8}$ watt m$^{-2}$ é um fluxo de referência. Já magnitude absoluta $M$ de um objeto é definida em termos da luminosidade bolométrica $L$ do objeto,
$$M = -2,5\log_{10}\left(\frac{L}{L_x}\right),$$
onde $L_x = 78,7 L_\odot$ é uma luminosidade de referência. Mostre que
$$M = m - 5\log_{10}\left(\frac{d_L}{d_x}\right),$$
onde $d_x$ é uma distância de referência dada em parsecs. Quanto vale $d_x$? Além disso, mostre ainda que quando $z << 1$ vale a relação
$$\begin{aligned} m - M \;\approx\;& 43,17 - \\ & 5\log_{10}\left(\frac{H_0}{70\,\mathrm{km/s/Mpc}}\right) + \\ & 5\log_{10} z + 1,086\left(1 - q_0\right) z\,. \end{aligned}$$

5. Suponha que $\eta = 4 \times 10^{-10}$ e calcule a temperatura de recombinação $T_{rec}$. Depois suponha que $\eta = 8 \times 10^{-10}$ e recalcule $T_{rec}$. Qual é a diferença entre os dois valores?

6. Num universo de curvatura positiva contendo apenas matéria ($\Omega_0 > 1,\ k = +1$), mostre que a idade atual do universo é dada pela fórmula
$$\begin{aligned} t_0 \;=\;& \frac{\Omega_0}{2H_0\left(\Omega_0 - 1\right)^{3/2}}\arccos\left(\frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}\right) \\ & -\frac{1}{\Omega_0 - 1}\,. \end{aligned}$$

7. Num universo de curvatura negativa contendo apenas matéria ($\Omega_0 < 1,\ k = -1$), mostre que a idade atual do universo é dada pela fórmula

$$t_0 = \frac{(-1)\,\Omega_0}{2H_0\,(1-\Omega_0)^{3/2}}\,\mathrm{arccosh}\left(\frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}\right) + \frac{1}{1-\Omega_0}\,.$$

8. Num universo plano, com constante cosmológica e matéria, para qual valor de $\Omega_{m,0}$ o produto $t_0 H_0$ vale um?

9. A solução das equações de Einstein conhecida como anti-de Sitter obedece à equação de Friedmann para um universo vazio, de curvatura negativa e com constante cosmológica negativa. Ache a solução para o fator de escala explicitamente e mostre que existe uma transformação de coordenadas que permite escrever a solução anti-de Sitter como

$$ds^2 = \left(1+\frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2 d\Omega\,,$$

onde $d\Omega \equiv d\theta^2 + \,\mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2$.

10. Considere um universo de curvatura positiva contendo apenas matéria. Esse universo, após algum tempo de expansão passa a se contrair para terminar num "Big Crunch" (o oposto do Big Bang). Num tempo $t_0 > t_{Crunch}/2$, quando esse universo já está em sua fase de contração, um astrônomo chamado Elbbuh Niwde descobre que as galáxias vizinhas têm "blueshifts" proporcionais a suas distâncias. Dados $H_0$ e $\Omega_0$, quanto tempo passará entre as observações do Dr. Niwde, feitas no tempo $t_0$, e o Big Crunch, no tempo $t_{Crunch}$?

11. Uma das mais recentes especulações na área da cosmologia é de que o universo pode conter um campo escalar, de natureza quântica, que possui uma densidade de energia $\rho$ positiva e um parâmetro $w$ da equação de estado $p = w\rho$ menor que zero. Assuma que o universo é plano e que possui apenas matéria com $\Omega_{m,0} \leq 1$ e quintessência com $w = -1/2$. Em que valor do fator de escala a densidade de energia da matéria e da quintessência serão iguais? A que idade do universo isso irá ocorrer?

12. Suponha que a diferença entre as massas de repouso do próton e do nêutron seja de 0,129 MeV (na verdade ela é dez vezes maior), e estime $Y_{max}$, a maior fração de massa possível em $^4$He, assumindo que todos os nêutrons disponíveis foram incorporados em núcleos de $^4$He. Do mesmo modo, suponha agora que o tempo de decaimento do nêutron seja de 89 s (ao invés do valor real de 890 s) e calcule $Y_{max}$.

---

## Referências


- Dodelson, S. – Modern cosmology, Academic Press, 2003.
- Kolb, E.W.; Turner, M.S. – The early universe, Addison-Wesley, 1990.
- Padmanabhan, T. – Structure formation in the universe, Cambridge, 1993.
- Rich, J. – Fundamentals of cosmology, Springer, 2001.
- Ryden, S. – Introduction to cosmology, Addison-Wesley, 2003.
- Souza, R.E. – Introdução à cosmologia, Edusp, 2004.


*Prof. Sandro Silva e Costa*
*Novembro de 2005*