1^a *lista de exercícios de Cosmologia*

1. A luminosidade de uma galáxia típica, comum, é da ordem de $2 \times 10^{10}\, L_\odot$, onde $L_\odot$ é a luminosidade solar, que vale $2,4 \times 10^{45}\, eV \cdot s^{-1}$. A energia média dos fótons emitidos por uma estrela é de cerca de $2\, eV$. Com esses dados, mostre que o fluxo de fótons de uma galáxia a um redshift $z << 1$, onde vale que $v = H_0 R$, é da ordem de $100\, z^{-2}\, m^{-2} s^{-1}$. Compare o fluxo de fótons das maiores galáxias próximas ($R \sim 1\, Mpc$) com o fluxo das estrelas mais próximas ($R \sim 1\, pc$) e mostre que um deles é 100 vezes menor que o outro.

2. Assuma que o universo é e sempre foi plano, e suponha ainda que o parâmetro de Hubble H é proporcional ao quadrado da temperatura desde o tempo de Planck $t_{Pl} = \sqrt{G\hbar c^{-5}}$. Suponha também que a energia escura do universo é produzida pela constante cosmológica Λ, e que hoje mede-se $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$. Mostre que se esse for o caso deveria-se ter, no tempo de Planck, $\Omega_\Lambda \sim 10^{-128}$, ou seja, o parâmetro de densidade da constante cosmológica deveria ser estupidamente pequeno: essa é a essência do assim chamado problema de “*fine-tuning*”.

3. Suponha que você é uma criatura bidimensional vivendo sobre a superfície de uma esfera de raio R. Mostre que se você desenhar um círculo de raio r, a circunferência do círculo terá o valor $C = 2\pi R \,\mathrm{sen}\,(r/R)$. Imagine que a Terra é uma esfera perfeita de raio $R = 6371$ km. Se você puder medir as distâncias com um erro de ± 1 m, qual deverá ser o tamanho mínimo de um círculo que possa lhe convencer de que a Terra é esférica e não plana?

4. O Sol está a aproximadamente 25.000 anos-luz do centro da nossa galáxia, a Via-Láctea, e tem uma velocidade própria de cerca de 280 km/s. Estime a massa aproximada da Via Láctea, assumindo que toda a massa da galáxia está em seu centro e que o Sol se move devido a força gravitacional causada por essa massa. Sabendo que o raio da Terra é $R = 6371$ km, estime a massa da Terra, a massa do Sol e daí estime quantas estrelas como o Sol podem existir na Via Láctea.

5. A energia E de um fóton está associada á sua frequência f pela expressão $E = hf$, onde h é a constante de Planck. A partir dessa relação, mostre que num universo em expansão a densidade de energia da radiação ρ_{rad} é proporcional a a^{-4}, onde a é o fator de escala. Usando esse resultado e a idéia de que a expansão do universo é adiabática, com conservação do número de partículas, obtenha que, para a radiação, $\rho = 3p$.

6. Se o universo possuísse curvatura positiva, e contivesse apenas matéria comum e a constante cosmológica, ele poderia ser estático e sem aceleração? Existiria, nesse caso, algum limite a ser obedecido sobre os valores de Λ e/ou a?

7. Imagine que $\Lambda = 0$ e que o universo é completamente dominado pela radiação. Se existir um valor máximo para o tamanho do universo mostre qual é esse valor e/ou sob quais condições isso acontece. Se não existir, mostre porquê.

8. Na página 3 do livro “*Modern cosmology*”, de Scott Dodelson aparece o trecho

   > “the evolution of the scale factor is determined by the Friedmann equation
   >
   > $$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho(t) + \frac{\rho_{cr} - \rho_0}{a^2(t)}\right]$$
   >
   > where $\rho(t)$ is the energy density in the universe as a function of time with ρ_0 the present value. The *critical density*
   >
   > $$\rho_{cr} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}(1.3)$$
   >
   > where G is Newton’s constant.”

   Mostre que nesse trecho há uma hipótese sobre o valor atual do fator de escala que está sendo usada sem ser comentada. De qualquer modo, mostre como escrever a equação de Friedmann na forma apresentada acima.

9. Usando que $k = a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1)$ mostre que a idade t do universo pode ser escrita como uma função do redshift $z = a_0/a - 1$ de acordo com as expressões
$$t = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-1}]^{1/2}} ,$$
válida para um universo dominado por matéria, e
$$t = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-2}]^{1/2}} ,$$
válida para um universo dominado por radiação. Resolva ambas as integrais para $\Omega_0 = 1$.

10. Mostre que o elemento de linha
$$ds^2 = dt^2 - t^2 \left[\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\Omega \right] ,$$
onde $d\Omega = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2$, é uma solução das equações de Friedmann com $p = \rho = \Lambda = 0$ (na verdade, o universo representado por essa solução é conhecido como universo de Milne). Mostre ainda que esse elemento de linha pode ser reescrito, a partir de uma transformação de coordenadas adequada, como
$$ds^2 = dT^2 - dR^2 - R^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 \right) .$$

11. Um quasar é um objeto que à primeira vista parece uma estela mas que está a uma distância muito grande, emitindo além de luz visível, bastante energia na faixa das ondas de rádio. Estime a velocidade de recessão (ou seja, de afastamento) de um quasar observado a um redshift $z = 4,5$, lembrando que nesse caso deve-se usar a relatividade restrita.

12. A densidade de luminosidade média do universo local (ao nosso redor) é da ordem de $2 \times 10^8 L_\odot \, Mpc^{-3}$, onde $L_\odot$ é a luminosidade solar, que vale $2,4 \times 10^{45} \, eV \cdot s^{-1}$. Imagine que você quer reproduzir essa densidade de luminosidade usando uma lâmpada de 40 watts: qual deve ser o raio da esfera a ser preenchida pela luz produzida por essa lâmpada?

13. Um parsec (pc) é uma distância definida como sendo igual à distância na qual a distância entre a Terra e o Sol ocupa um ângulo de um segundo de arco. A partir dessa definição obtenha quanto vale 1 pc em metros.

14. Se um telescópio permitir uma resolução angular de um milésimo de segundo de arco, qual será a menor distância possível de se medir por paralaxe?

Referências

- Dodelson, S. – Modern cosmology, Academic Press, 2003.
- Kolb, E.W.; Turner, M.S. – The early universe, Addison-Wesley, 1990.
- Padmanabhan, T. – Structure formation in the universe, Cambridge, 1993.
- Rich, J. – Fundamentals of cosmology, Springer, 2001.
- Ryden, S. – Introduction to cosmology, Addison-Wesley, 2003.
- Souza, R.E. – Introdução à cosmologia, Edusp, 2004.

Prof. Sandro Silva e Costa
Setembro de 2005