Gabarito da avaliação substitutiva de Cosmologia

1. Para um universo vazio com constante cosmológica positiva, a equação de Friedmann fica sendo
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}=\frac{\Lambda}{3}\,. \tag{1}$$
O caso em que $k=0$ é o mais simples, pois tem-se então
$$\int\frac{da}{a}=\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\int dt\,, \tag{2}$$
ou seja,
$$a=a_0e^{t\sqrt{\Lambda/3}}\,, \tag{3}$$
onde a_0 é uma constante de integração e onde escolheu-se o sinal positivo da raiz quadrada para se ter uma solução com expansão.

   No caso $k=+1$ as integrais que surgem são
$$\int\frac{da}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}a^2-1}}=\pm\int dt\,, \tag{4}$$
levando a
$$a=\sqrt{3/\Lambda}\cosh\left(t\sqrt{\Lambda/3}\right). \tag{5}$$
O caso $k=-1$ é similar, com
$$a=\sqrt{3/\Lambda}\,\mathrm{senh}\left(t\sqrt{\Lambda/3}\right). \tag{6}$$

   Considerando a expressão do elemento de linha para o caso plano ($k=0$) tem-se que (com $a_0=1$)
$$ds^2=dt^2-e^{2t\sqrt{\Lambda/3}}\left[dr^2+r^2d\Omega^2\right]\,, \tag{7}$$
onde $d\Omega^2\equiv d\theta^2+\mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2$. Comparando esse resultado com o dado no enunciado nota-se que
$$e^{t\sqrt{\Lambda/3}}r=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3}} \tag{8}$$
e
$$dt^2-e^{2t\sqrt{\Lambda/3}}dr^2=\cos^2\sqrt{\frac{\Lambda R^2}{3}}\,dT^2-dR^2. \tag{9}$$
Essas duas equações formam um sistema que pode ser resolvido para se obter $R=R\,(t,r)$ e $T=T\,(t,r)$.

2. Se o universo é vazio, de curvatura positiva, contendo apenas a constante cosmológica, a solução para o fator de escala é a solução de de Sitter para $k=+1$, obtida no exercício anterior:
$$a=\sqrt{3/\Lambda}\cosh\left(t\sqrt{\Lambda/3}\right). \tag{10}$$
Pondo
$$\Omega_0=\frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{11}$$
tem-se então que
$$a_0=\frac{1}{H_0\Omega_0^{1/2}}\cosh\left(t_0H_0\Omega_0^{1/2}\right)\,, \tag{12}$$
ou seja,
$$t_0=\frac{1}{H_0\Omega_0^{1/2}}\,\mathrm{arccosh}\,\left(a_0H_0\Omega_0^{1/2}\right)\,. \tag{13}$$
Porém, da equação de Friedmann sai que $a_0H_0=1/\left(\Omega_0-1\right)^{1/2}$. Logo,
$$t_0=\frac{1}{H_0\Omega_0^{1/2}}\,\mathrm{arccosh}\,\left[\frac{\Omega_0-1}{\Omega_0}\right]^{-1/2}\,. \tag{14}$$
Note que no enunciado da questão há um erro no sinal da potência do argumento da função arco cosseno hiperbólico.

3. Se o universo é estático ($\dot{a}=0$) e sem aceleração ($\ddot{a}=0$), contendo apenas matéria ($p_m=0$) e quintessência ($p_q=w_q\rho_q$), pode-se, por exemplo, partir da segunda equação de Friedmann,
$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi}{3}\left(\rho+3p\right)\,, \tag{15}$$
para se observar que
$$\rho+3p=\rho_m+\left(1+w_q\right)\rho_q=0\,, \tag{16}$$

ou seja,

$$w_q = -\left(1 + \frac{\rho_m}{\rho_q}\right) . \quad (17)$$

Agora, como ρ_m e ρ_q são densidades de energia, supõe-se que são quantidades positivas e, assim, vem que

$$w_q < 0 . \quad (18)$$

A primeira equação de Friedmann fornece a resposta para a segunda pergunta do enunciado, pois como o universo é estático tem-se que

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\left(\rho_m + \rho_q\right) = \frac{8\pi}{3}\rho_q\left(1 + \frac{\rho_m}{\rho_q}\right) , \quad (19)$$

ou seja,

$$\frac{k}{a^2} = -\frac{8\pi}{3} w_q \rho_q . \quad (20)$$

4. Esta questão está resolvida nas notas de aula, onde pode-se ler que sempre valem as identidades

$$\rho_m a^3 = \rho_{m,0} a_0^3 , \quad \rho_r a^4 = \rho_{r,0} a_0^4 . \quad (21)$$

No momento de igualdade entre radiação e matéria tinha-se $\rho_m = \rho_r$, e daí

$$a_{rm} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} a_0 . \quad (22)$$

Para calcular a que tempo esses valores do fator de escala correspondem, num universo plano, em que $k = 0$, a equação a se resolver é

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} , \quad (23)$$

ou seja,

$$H_0 t = \int_0^a \frac{a da}{\left[\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} a\right]^{1/2}} . \quad (24)$$

Usando agora que $a_{rm} = \left(\Omega_{r,0}/\Omega_{m,0}\right) a_0$ vem que

$$H_0 t = \int_0^a \frac{a da}{\left[\Omega_{r,0}\left(1 + a a_0/a_{rm}\right)\right]^{1/2}} . \quad (25)$$

Tal integral produz como resultado

$$H_0 t = \frac{2a_{rm}^2}{3a_0^2 \Omega_{r,0}^{1/2}}\left[2 + \left(1 + \frac{a_0}{a_{rm}} a\right)^{3/2} - 3\left(1 + \frac{a_0}{a_{rm}} a\right)^{1/2}\right] . \quad (26)$$

Pondo $a = a_{rm}$ e usando como normalização que $a_0 = 1$ vem finalmente que

$$t_{rm} = \frac{2}{3H_0}\frac{\Omega_{r,0}^{3/2}}{\Omega_{m,0}^2}\left[2 + 2^{3/2} + 3 \cdot 2^{1/2}\right] . \quad (27)$$

A temperatura correspondente a esse tempo é

$$T_{rm} = T_0 \frac{a_0}{a_{rm}} = T_0 \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{r,0}} . \quad (28)$$

5. (a) A matéria escura é uma hipótese criada para explicar, entre outras coisas, as curvas de rotação de galáxias espirais e a dsitribuição de velocidades das galáxias em aglomerados. Supõe-se que ela seja formada por matéria não-bariônica que interage fracamente (WIMPs) e/ou por corpos massivos sem luz (MACHOs).

   (b) Multiplicando a equação do campo escalar por $\dot{\phi}$ tem-se que

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 = -\frac{dV}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dV}{dt} . \quad (29)$$

Contudo,

$$\ddot{\phi}\,\dot{\phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2}\right) . \quad (30)$$

Logo, o que se tem é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\right) + 3H\dot{\phi}^2 = 0 . \quad (31)$$

Daí, por comparação com a equação de conservação da energia, sai que

$$\dot{\rho_\phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V\right) \quad (32)$$

e

$$\rho_\phi + p_\phi = \dot{\phi}^2 . \quad (33)$$

Tal sistema se resolve facilmente, levando a

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V \quad (34)$$

e

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V . \quad (35)$$

Sandro Silva e Costa