Gabarito da 2^a avaliação de Cosmologia

1. O ponto de partida para obter a solução de anti-de Sitter é a equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}\,. \qquad (1)$$

Basta usar que $\rho = 0$, $k = -1$ e trocar Λ por $-\Lambda$, de modo que a equação a se resolver fica sendo

$$\dot{a}^2 = 1 - \frac{\Lambda}{3}a^2\,. \qquad (2)$$

Não é difícil ver que a solução para essa equação é

$$a\left(t\right) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\cos\left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\left(t - t_i\right)\right]\,, \qquad (3)$$

onde t_i é uma constante de integração, que pode ser posta como sendo zero[1]. Substituindo esse resultado no elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, a solução anti-de Sitter é escrita como

$$ds^2 = dt^2 - \frac{3}{\Lambda}\cos^2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega\right]\,, \qquad (4)$$

onde $d\Omega \equiv d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2$. Ao se comparar esse resultado com o elemento de linha dado no enunciado da questão obtem-se um sistema formado pelas equações

$$R^2 = \frac{3r^2}{\Lambda}\cos^2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t \qquad (5)$$

e

$$\left(1 + \frac{\Lambda R^2}{3}\right)dT^2 - \frac{dR^2}{1 + \frac{\Lambda R^2}{3}} = dt^2 - \frac{3}{\Lambda}\cos^2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t\frac{dr^2}{1+r^2}\,. \qquad (6)$$

A solução desse sistema leva a

$$\begin{cases} R = r\frac{3}{\Lambda}\cos\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t \\ T = \arctan\left[\left(1+r^2\right)^{-1}\tan\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t\right] \end{cases}\,. \qquad (7)$$

2. (a) A idade do universo é obtida integrando-se o tempo do universo desde $t = 0$ até hoje ($t = t_0$):

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{t_0} dt\frac{da}{da} = \int_0^{a_0}\frac{da}{\dot{a}}\,. \qquad (8)$$

Usando agora a equação de Friedmann, vem que

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{a_0}\frac{da}{\sqrt{\frac{\rho a^2}{\rho_{c,0}} - \frac{k}{H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2}}}\,. \qquad (9)$$

Nesta questão $k = 1$, $\Lambda = 0$ e $\rho = \rho_m = \rho_{m,0}a_0^3 a^{-3}$. Assim,

$$t_0 = \frac{1}{H_0 a_0}\int_0^{a_0}\frac{da}{\sqrt{\Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a} - 1\right) + 1}}\,, \qquad (10)$$

ou, usando que $a_0 = 1$ e $\Omega_{m,0} = \Omega_0 > 1$,

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1\frac{a da}{\sqrt{\Omega_0 a - \left(\Omega_0 - 1\right)a^2}}\,. \qquad (11)$$

Tal integral se resolve com a substituição

$$a = \frac{\Omega_0}{2\left(\Omega_0 - 1\right)}\left(1 - \cos\theta\right)\,, \qquad (12)$$

fornecendo o resultado dado no enunciado.

(b) Se o universo é plano e contêm apenas matéria $k = 0$ e $\Omega_{m,0} = \Omega_0 = 1$. Logo,

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 a^{1/2}da = \frac{2}{3H_0}\,. \qquad (13)$$

Já no caso de um universo plano contendo apenas radiação,

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r,0}a^{-2}}} = \frac{1}{2H_0}\,, \qquad (14)$$

já que $\Omega_{r,0} = \Omega_0 = 1$.

3. A quintessência tem $w = -1/2$, enquanto a matéria comum tem $w = 0$. Logo, elas seguem duas regras distintas,

$$\rho_q = \rho_{q,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2};\ \rho_m = \rho_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\,. \qquad (15)$$

Quando $\rho_q = \rho_m$ tem-se então

$$a_{qm} = \left(\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{q,0}}\right)^{2/3}a_0 = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{q,0}}\right)^{2/3}a_0\,. \qquad (16)$$

[1] Outra escolha possível é $t_i = \frac{\pi}{2}$ e , então, $a\left(t\right) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\mathrm{sen}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t$.

Antes desse tempo quem predomina é a matéria, e depois passa a ser quintessência. De qualquer modo, a equação de Friedmann que se deve resolver é

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\rho_{q,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} + \rho_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3\right], \tag{17}$$

ou seja,

$$a(t) = a_0\left[\frac{9H_0^2}{16}\Omega_{q,0}t^2 + \frac{3H_0}{2}\Omega_{m,0}^{1/2}t\right]^{2/3}. \tag{18}$$

Portanto, o tempo t_{qm} de equivalência entre a quintessência e a matéria é obtido da equação de segundo grau

$$\frac{9H_0^2}{16}\Omega_{q,0}t_{qm}^2 + \frac{3H_0}{2}\Omega_{m,0}^{1/2}t_{qm} = \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{q,0}}, \tag{19}$$

isto é,

$$t_{qm} = \frac{4}{3H_0}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\Omega_{m,0}^{1/2}}{\Omega_{q,0}}. \tag{20}$$

4. Se o universo é plano e contêm apenas radiação, com $\rho_r = \rho_{r,0}a_0^4a^{-4}$, e a constante cosmológica Λ, a equação de Friedmann fica sendo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_{r,0}a_0^4}{3a^4} + \frac{\Lambda}{3} = \Omega_{r,0}H_0^2\frac{a_0^4}{a^4} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{21}$$

com a solução

$$a(t) = a_0\left(\Omega_{r,0}H_0^2\right)^{1/4}\,\text{senh}^{1/2}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t\,. \tag{22}$$

Impondo que $a(t_0) = a_0$ vem que a idade do universo nesse caso é

$$t_0 = \frac{\text{arcsenh}\left[\frac{1-\Omega_{r,0}}{\Omega_{r,0}}\right]^{1/2}}{2H_0\left(1-\Omega_{r,0}\right)}. \tag{23}$$

Lembrando agora que sempre vale a relação $aT = a_0T_0$, tem-se então que

$$T = T_0\left(\frac{\text{senh}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t_0}{\text{senh}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t}\right)^{1/2}, \tag{24}$$

ou seja

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}\text{arcsenh}\left[\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\text{senh}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t_0\right]. \tag{25}$$

Como $T_0 = 2,75$ K equivale a $2,35\times10^{-4}$ eV, vem que para $T_1 = 0,1$ Mev tem-se $T_1 \approx 4\times10^8\,T_0$, enquanto que para $T_2 = 1/4$ eV vale que $T_2 \approx 10^3\,T_0$. Assim,

$$t_1 = \frac{\text{arcsenh}\left[6,25\times10^{-14}\text{senh}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t_0\right]}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}. \tag{26}$$

e

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}\text{arcsenh}\left[10^{-9}\text{senh}\,2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,t_0\right]. \tag{27}$$

5. (a) A inflação é uma teoria cuja hipótese principal é que o universo, em seus primórdios, passou por uma fase de expansão muito rápida, aproximadamente exponencial. Tal hipótese resolve três problemas: o problema do horizonte, relacionado à homogeneidade da radiação cósmica de fundo, o problema da curvatura, ligado à quase inexistência de curvatura no universo atual, e o problema dos monopolos, ligado a não observação de monopolos magnéticos. O mecanismo físico invocado para explicar a inflação em geral envolve campos escalares com uma energia potencial associada que alimenta a expansão acelerada do universo.

   (b) A idéia básica para resolver essa questão chama-se gravitação Newtoniana. Desse modo, pode-se escrever, por exemplo,

$$F_g = m_\star a_{cp} \Rightarrow \frac{GMm_\star}{r^2} = m_\star\frac{v^2}{r}, \tag{28}$$

ou seja,

$$M = \frac{v^2r}{G}. \tag{29}$$

Substituindo os valores dados nessa questão sai que $M \approx 2\times10^{37}$ kg $= 10^7M_\odot$. Logo, nesse caso

$$\frac{M}{L} \approx 50\frac{M_\odot}{L_\odot}. \tag{30}$$

Um resultado similar pode ser obtido usando o teorema do virial.

Sandro Silva e Costa