

## Gabarito da 1ª avaliação de Cosmologia

1. Dada uma fonte luminosa de luminosidade  $L$ , o fluxo  $F$  de fótons que atravessa uma superfície esférica a uma distância  $R$  da fonte, por unidade de tempo, é uma função dada pela expressão

$$F = \frac{N}{A} = \frac{L}{\langle E \rangle 4\pi R^2}, \quad (1)$$

onde  $\langle E \rangle$  é a energia média dos fótons produzidos pela fonte. No caso de uma fonte bastante próxima da Terra, vale que  $z = v/c = H_0 R/c$  e, assim,  $R = cz/H_0$ , ou seja,

$$F = \frac{L}{\langle E \rangle} \frac{H_0^2}{4\pi c^2 z^2}. \quad (2)$$

Usando que  $H_0 \approx 70$  km/s/Mpc, que  $c = 3 \times 10^5$  km/s,  $\langle E \rangle = 2$  eV, e  $L = 2 \times 10^{10} L_\odot$ , com  $L_\odot = 2,4 \times 10^{45}$  eV/s, vem que

$$\begin{aligned} F &= \frac{2 \times 10^{10} \cdot 2,4 \times 10^{45} \cdot (70)^2}{2 \cdot 4\pi \cdot 9 \times 10^{10} \cdot z^2} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{Mpc}^2} \\ &= \frac{2,4}{36\pi z^2} (70)^2 \times 10^{45} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{Mpc}^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Da definição de parsec sai que

$$\begin{aligned} 1 \text{ pc} &= \frac{1 \text{ UA}}{2 \tan 0,5''} = \frac{1 \text{ UA}}{2 \tan \frac{10\pi}{(60)^4}} \\ &\approx \frac{1 \text{ UA}}{\frac{20\pi}{(60)^4}} = \frac{(60)^4}{20\pi} \text{ UA}. \end{aligned} \quad (4)$$

Uma unidade astronômica é a distância entre a Terra e o Sol, e tal distância pode ser calculada facilmente sabendo-se que a luz do Sol leva cerca de 8,5 minutos para chegar à Terra. Assim,  $1 \text{ UA} \approx 1,5 \times 10^{11}$  m. Daí

$$1 \text{ pc} \approx \frac{(60)^4}{20\pi} 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}. \quad (5)$$

Logo,

$$\begin{aligned} F &= \frac{2,4}{36\pi z^2} \frac{(70)^2 \times 10^{45}}{9 \times 10^{32} \times 10^{12}} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \\ &= \frac{24}{\pi z^2} \left(\frac{70}{18}\right)^2 \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \approx \frac{115}{z^2} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{m}^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

que é da ordem de  $100 z^{-2} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . A segunda parte da questão é bastante simples. Basta comparar o fluxo de uma galáxia com o de uma estrela. Como  $L_{gal} = 2 \times 10^{10} L_\odot$ ,  $L_\star \approx L_\odot$  e  $R_{gal} = 10^6 R_\star$ , vem que

$$\frac{F_{gal}}{F_\star} = \frac{L_{gal}}{L_\star} \left(\frac{R_\star}{R_{gal}}\right)^2 = 2 \times 10^{-2}. \quad (7)$$

2. A métrica de um espaço tridimensional homogêneo, isotrópico e de curvatura constante  $k$  é

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi). \quad (8)$$

Para a superfície de uma esfera  $r = R$  e assim  $dr = 0$ . Qualquer ponto da esfera pode ser considerado um polo ou, vindo por outro lado, o ponto mais ‘alto’ da esfera. Considerando um círculo desenhado ao redor desse polo tem-se que  $\theta$  é constante e, portanto,  $d\theta = 0$ . Logo, a única variável que resta é  $\varphi$ , que vai de 0 a  $2\pi$ , e o comprimento da circunferência é então  $C = \int d\ell = 2\pi R \sin \theta$ . A distância, na superfície da esfera, entre o polo e as bordas do círculo, é uma linha curva, na verdade um arco, que faz parte da circunferência completa que passa pelos dois polos. Enquanto a circunferência que passa pelos dois polos tem o tamanho  $\ell = 2\pi R$ , por dar uma volta completa na superfície da esfera, o arco, que abrange apenas um ângulo  $\theta < 2\pi$ , tem o tamanho  $r = \theta R$ . Logo,

$$C = 2\pi R \sin \frac{r}{R}, \quad (9)$$

sem nenhuma aproximação. O valor da diferença entre esse comprimento e o comprimento de uma circunferência desenhada num plano é  $\Delta\ell = 2\pi r - 2\pi R \sin (r/R)$ . Se  $\Delta\ell > 1$  então

$$\frac{r}{R} - \sin \frac{r}{R} > \frac{1}{2\pi R}. \quad (10)$$

Essa é uma inequação que só pode ser resolvida exatamente de forma numérica. Porém, de forma aproximada pode-se escrever

$$\frac{r}{R} - \text{sen} \frac{r}{R} \approx \frac{r}{R} - \left[ \frac{r}{R} - \frac{1}{3!} \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right] > \frac{1}{2\pi R}, \quad (11)$$

ou seja,

$$r^3 > \frac{3R^2}{\pi}. \quad (12)$$

Como  $R = 6371$  km, isto é,  $R \approx 6,4 \times 10^6$  m, vem que  $r$  deve ser maior que 35 km, aproximadamente.

3. No enunciado desta questão está escrito que  $E = hf$  e que deve-se *partir dessa relação* para mostrar que  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$ . Assim, o ponto de partida é usar na expressão da energia que  $f\lambda = c$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda do fóton. Porém, num universo em expansão os comprimentos se expandem seguindo a expressão  $\lambda = a(t)\lambda_0$ , enquanto os volumes seguem a expressão  $V = a^3V_0$ . Logo,

$$\rho_{rad} = \frac{E}{V} = \frac{hc}{\lambda V} = \frac{hc}{\lambda_0 V_0 a^4} \quad (13)$$

ou seja,  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$ . A segunda parte da questão é tão simples quanto a primeira. Parte-se da expressão termodinâmica

$$dE + pdV + TdS - \mu dN = 0, \quad (14)$$

com  $dS = dN = 0$ ,  $E = \rho V$  e  $V = V_0 a^3$  para se obter que

$$d\rho + 3(\rho + p) \frac{da}{a} = 0. \quad (15)$$

Usando agora o resultado anterior,  $\rho = C_{rad}a^{-4}$ , onde  $C_{rad}$  é uma constante, sai que  $3p = \rho$ . Note que esse último resultado obtido é que diz que para a radiação  $w = 1/3$ , ou seja, não era para usar isso *antes*, mas sim para se mostrar *como* se obtém tal valor.

4. Para um universo estático  $\dot{a} = 0$ , enquanto que para um universo sem aceleração  $\ddot{a} = 0$ . Além disso, para matéria comum  $\rho = Ca^{-3}$ , onde  $C$  é uma constante, e  $p = 0$ . Logo, as duas equações de Friedmann,

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (16)$$

$$\text{e} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(3p + \rho) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (17)$$

passam a ser, nesse caso,

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi C}{3}a^{-3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (18)$$

$$\text{e} \quad \frac{4\pi C}{3}a^{-3} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (19)$$

Esse é um sistema que se resolve facilmente, obtendo-se  $a = 4\pi C$  e  $\Lambda = 1/(16\pi C^2)$ , ou seja,  $\Lambda = 1/a^2$ .

5. Se  $p = \rho = \Lambda = 0$  a primeira das equações de Friedmann fica sendo simplesmente

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = 0, \quad (20)$$

com a solução  $a = a_1 + t\sqrt{-k}$ , onde  $a_1$  é uma constante de integração, que pode ser posta como igual a zero. Como não faz sentido ter números imaginários no fator de escala, necessariamente  $k = -1$ , e assim  $a(t) = t$ . Substituindo esses resultados no elemento de linha de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker obtém-se que

$$ds^2 = dt^2 - t^2 \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (21)$$

A segunda parte da questão é tão simples quanto essa. Comparando as duas expressões dadas nota-se que

$$t^2 r^2 = R^2 \quad (22)$$

$$\text{e} \quad dt^2 - t^2 \frac{dr^2}{1+r^2} = dT^2 - dR^2. \quad (23)$$

Isso é um sistema que se resolve facilmente obtendo-se

$$\begin{cases} R = tr \\ T = t\sqrt{1+r^2} \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} t = \sqrt{T^2 - R^2} \\ r = R/\sqrt{T^2 - R^2} \end{cases}. \quad (25)$$

Sandro Silva e Costa