



Universidade De Brasília.  
Departamento de Filosofia.  
Orientador: Prof. Dr. Nelson Gonçalves Gomes  
Aluno: Samir B. Gorsky 99/24396  
Monografia:

# Alguns sistemas modais fracos

## Apresentação

O presente trabalho foi concebido com o intuito de satisfazer uma das condições necessárias para a conclusão do curso de bacharelado em filosofia da Universidade de Brasília (referente aos requisitos das disciplinas: Dissertação Filosófica 1 e dissertação 2) e tem por objetivo apresentar algumas características de alguns sistemas modais.

A maioria dos sistemas aqui apresentados possui a característica de ser mais fraco do que o sistema modal K que é o mais fraco dos sistemas Kripkeanos. Por isso decidimos, eu e meu orientador, dar o título dessa dissertação de “Alguns sistemas modais fracos”. Porém fica a possibilidade de se considerar esse título a partir da não convencionalidade desses sistemas podendo então ser dado uma segunda possibilidade de título que pode estar, quem sabe, em algum mundo possível. O título poderia então ser o seguinte: “Alguns sistemas modais não convencionais” ou mesmo “Alguns sistemas modais fracos ou não convencionais”. Porém me parece que a primeira opção enfatiza aquilo que deve ser enfatizado e por isso parece ser a melhor opção.

A presente monografia está dividida em três partes: Introdução, Desenvolvimento e Considerações finais.

A introdução traz em seu conteúdo algumas considerações básicas para a lógica modal, assim, tentei fazer nesta parte uma pequena introdução à semântica da linguagem modal em geral e ao final dessa Introdução busquei fazer uma contraposição entre a semântica dos sistemas que não possuem a noção de mundos estranhos e a semântica dos sistemas que a possui.

O desenvolvimento não possui um título específico e pode ser subdividido em duas partes: Uma contendo a construção da linguagem a ser utilizada e outra contendo a apresentação dos sistemas. A primeira parte do desenvolvimento possui o seguinte tópico com os seguintes conteúdos.

A linguagem da lógica proposicional modal  $\square$ cm: Nesta parte está apresentado os símbolos primitivos além das definições de expressão formal e

fórmulas de  $\square$ cm. A semântica de  $\square$ cm também é um item deste tópico e abrange as condições de verdade e algumas explicações sobre mundos possíveis normais ou não.

A segunda parte do desenvolvimento consiste na apresentação dos sistemas modais S (S0.5, S2 e S3), E (E0.5 e E2), C2, D2 e N. Nesta parte do trabalho estão colocadas algumas características desses sistemas tais como teoremas característicos, metateoremas, fórmulas não válidas, noções de validades etc.

Por ultimo temos as “considerações finais” onde aparecem algumas reflexões sobre a relevância do estudo de sistemas modais fracos em questões ontológicas e epistêmicas.

Por fim, agradeço ao professores, colegas e funcionários do departamento de filosofia da Unb pela atenção e pelo compromisso com a Filosofia, em especial agradeço ao meu orientador professor Nelson Gonçalves Gomes pela dedicação e pela disposição nesses dois semestre de Dissertação Filosófica.

*Brasília, 27/11/03.*

S.G.

## Introdução

A noção de modalidade é de indiscutível importância para a linguagem e para o pensamento humano. A teorização dessa noção pode nos conduzir à posições filosóficas com pontos de vista interessantes e curiosos.

Quem um dia já teve a sorte de pensar esse conceito e se deparar com suas questões, deve ter percebido a amplitude de possibilidades dos sistemas subjacentes, amplitude essa que nos coloca em estado de perplexidade quando esses sistemas são relacionados às realidades que eles descrevem.

Considere por exemplo alguma dessas questões:

Como seria a nossa percepção de um mundo no qual o seu arranjo modal não possuísse a noção de possibilidade ou de necessidade?

E se todas as nossas proposições acerca de objetos possíveis fossem verdadeiras enquanto que todas as proposições acerca de objetos necessários fossem falsas?

Essas são algumas das construções que motivaram este trabalho porém muitas outras, além das duas acima, podem ser imaginadas e exploradas. Diante, portanto, da riqueza de conteúdo envolvendo o tema da modalidade, não é um contra-senso pensar que incontáveis filósofos, ilustres e não ilustres, tenham dedicado muito de seu trabalho mental a esclarecer, o melhor possível, esse assunto.

O termo modalidade vem do latim (*Modalitas*) e seu conceito surgiu a partir de reflexões sobre diferenças de predicados sendo reconhecidas pela primeira vez por Aristóteles, mais tarde o termo modalidade foi aplicado a proposições que indicavam possibilidade e necessidade. Atualmente a modalidade vem sendo bastante utilizada em lógicas não extensionais, onde houve um grande progresso para suas formalizações a partir dos trabalhos de C. I. Lewis e Kripke.

Neste trabalho analisaremos sistemas que possuem em suas estruturas o conceito de mundos não normais. Para isso será necessário a consideração de mundos possíveis e de seus subconjuntos que serão denominados: conjunto dos mundos normais e conjunto dos mundos não normais (subnormais ou estranhos). O conjunto dos mundos não normais se caracterizam pela singular valoração que

estes atribuem aos operadores modais, de modo que essa valoração se assemelha ao caso da segunda pergunta dessa introdução, ou seja, ao caso em que: proposições quando possíveis são verdadeiras e proposições quando necessárias são falsas. Uma outra possibilidade de se caracterizar esses mundos é dado por meio da relação entre mundos onde os mundos normais *vêem* outros mundos, enquanto que mundos não normais são os que são *vistos*.

Assim, podemos dizer que há uma diferenciação semântica com relação aos operadores modais, ou seja, enquanto que nos sistemas K, T, D etc. de lógica modal não temos subconjuntos de mundos possíveis com relação à valoração de fórmulas de possibilidade e necessidade, no caso de alguns sistemas aqui estudados essa subdivisão será patente.

Para exemplificar o que está sendo dito acima consideremos as seguintes explicações acerca da semânticas de sistemas como K, T e D:

Em um sistema qualquer de lógica temos coisas que são chamadas de expressões, essas expressões nada dizem a não ser em relação a uma interpretação. Os sistemas clássicos não possuem interpretação para operadores intensionais, sendo assim, é preciso o uso de novos conceitos e entre esses novos conceitos em relação à lógica clássica teremos o conceito de *Mundos Possíveis*. Os mundos possíveis comportam situações não atuais que por uma gama de circunstâncias poderiam ser atuais, por exemplo, João está na padaria e Maria não tem dinheiro para comprar pão e por isso não sai de casa para a padaria. Levando em conta o que está dito acima poderíamos supor um mundo possível em que Maria teria o dinheiro para comprar pão e que sairia de casa para fazê-lo, assim podemos dizer que é possível que Maria se encontre com João. Desse modo as contingências povoam esses mundos possíveis de vários modos. Podemos ainda dizer que há diversos mundos possíveis nos quais há os mesmos objetos que o mundo atual porém em novas configurações. Seguindo esse mesmo raciocínio o impossível é algo que não acontece em qualquer dos mundos possíveis, por exemplo, contradições do tipo “acontece  $x$  e não acontece  $x$ ”.

Uma apresentação intuitiva da semântica de sistemas modais pode ser exposta através da apresentação de um “jogo”<sup>1</sup>.

O jogo a ser apresentado aqui chama-se jogo proposicional-intensional. A partir desse jogo pode-se fazer uma analogia com a semântica dos sistemas modais como será visto mais adiante.

O jogo consiste no seguinte:

- a) Em uma sala há  $n$  jogadores onde  $n \geq 1$  (podemos também interpretar  $n$  como sendo  $n$  mundos possíveis).
- b) Cada jogador dentre os  $n$  possui diante de si uma folha de papel na qual estão escritas fórmulas atômicas e nada mais. As listas de fórmulas poderão ser diferentes para cada jogador.
- c) Cada jogador sempre tem condição de ler sua própria folha, mesmo que seja em braile.
- d) Pode haver também uma relação de acesso entre jogadores. Essa relação permite que os jogadores possam talvez ver-se a si mesmos ou ver os outros jogadores.
- e) Há diversas possibilidades de configurações, ou seja, pode acontecer dos jogadores estarem em uma sala totalmente escura, ou estarem dispostos de modo que cada jogador veja a si e ao menos um outro jogador etc.

Dadas as condições acima, o jogo consistirá em leituras de fórmulas feitas por alguém. Os jogadores então erguerão seu braços da conforme as seguintes regras: Se for lida uma fórmula atômica  $\pi$  que esteja na folha de um jogador  $w_n$  então esse jogador deve erguer seu braço. Se  $\neg\varphi$  for lida então o jogador  $w_n$  que possuir  $\varphi$  em sua folha não deverá erguer seu braço enquanto que o jogador que não a possuir deverá erguer seu braço. Se  $(\varphi \vee \psi)$  for lida então o jogador que possuir  $\varphi$  e/ou  $\psi$  em sua folha deverá erguer o seu braço. Os demais operadores seguem a mesma analogia contudo com as devidas considerações próprias.

---

<sup>1</sup> Ver Hughes & Cresswell, 1996. Pp. 17-20. Uma explicação sobre esse jogo, mais detalhada que a exposta neste trabalho pode ser encontrada na apostila sobre lógicas intencionais confeccionada pelo professor Nelson Gonçalves gomes.

Passemos então para as regras em relação aos operadores modais. Nesse caso a leitura das fórmulas incluirá também as expressões bem formadas de  $\Box\varphi$ . As regras para operadores modais serão portanto as seguintes: Se  $\Box\varphi$  for lida então o jogador  $w_n$  deverá erguer o braço caso todos os jogadores que é visto por  $w_n$  erguerem o braço para a fórmula  $\varphi$ ,  $w_n$  não poderá erguer o braço caso pelo menos um jogador que é visto por  $w_n$  não o erguer para a fórmula  $\varphi$ . Se  $\Diamond\varphi$  for lida então o jogador  $w_n$  deverá erguer o braço caso pelo menos um dos jogadores que é visto por  $w_n$  erguerem o braço para a fórmula  $\varphi$ ,  $w_n$  não poderá erguer o braço caso todos os jogadores que é visto por  $w_n$  não o erguerem para a fórmula  $\varphi$ .

Esse jogo representa de certa maneira a semântica dos sistemas modais, por analogia cada configuração acerca dos lugares e das folhas distribuídas deve representar um estado de coisas. Portanto podemos dizer que cada sistema em lógica modal representa a situação de um jogador sob uma certa configuração nesse jogo. A questão aqui a ser tratada é a seguinte.

Qual a configuração que representa os sistemas que possuem mundos não normais?

Ou: Qual a configuração que representaria um sistema onde  $\Diamond\varphi$  é sempre verdadeira e  $\Box\varphi$  é sempre falsa?

O sistema a que se refere a questão acima deve satisfazer pelo menos duas condições conforme as regras que foram apresentadas acima: 1° Dado um jogador  $w_n$ , tomado como referência para um sistema S qualquer, para qualquer fórmula do tipo  $\Diamond\varphi$  que for lida deverá haver pelo menos um jogador visto por  $w_n$  que ergue seu braço para  $\varphi$ . E 2° Dado um jogador  $w_n$ , tomado como referência para o mesmo sistema S, para qualquer fórmula  $\psi$  que for lida não poderá acontecer de todos os jogadores visto por  $w_n$  erguerem o braço para essa fórmula  $\psi$ .

## A linguagem da lógica propocional modal (Lcm)

Antes de mais nada, construiremos agora uma linguagem comum a ser usada nos sistemas definidos como objeto desta monografia. Essa linguagem será definida a partir de uma sintaxe e uma semântica a ser elaborada abaixo.

### **Sintaxe de (Lcm)**

A sintaxe de uma linguagem é entendida como uma determinada organização ou ordenamento de partes. Crisipo definia “sintaxe do todo” como sendo o destino que governa a ordem do mundo<sup>2</sup>. Porém a sintaxe deste texto versará sobre as definições de símbolos primitivos e as maneiras como estes podem ser agrupados. Agora iremos definir uma sintaxe que nos permita trabalhar os sistemas propostos.

*Símbolos primitivos:* Esses símbolos não são definidos sendo por isso denominados dessa forma.

1. Variáveis proposicionais: ‘ $p$ ’, ‘ $q$ ’, ‘ $r$ ’, ‘ $s$ ’, ‘ $p_1$ ’, ‘ $q_1$ ’, ‘ $r_1$ ’, ‘ $s_1$ ’, ‘ $p_2$ ’, ... ;
2. Operadores de um lugar (monádicos): ‘ $\neg$ ’, ‘ $\square$ ’, ‘ $\diamond$ ’;
3. Operadores de dois lugares (diádicos): ‘ $\wedge$ ’, ‘ $\vee$ ’, ‘ $\rightarrow$ ’;
4. Símbolos auxiliares: ‘(’, ‘)’’, esses símbolos podem ser escritos sob forma de colchetes, chaves ou parentes pontiagudos.

---

<sup>2</sup> Abbagnano p. 904, 905.

### **Definição de expressão formal.**

Uma expressão formal de Lcm é qualquer seqüência finita de símbolos dessa linguagem.

Exemplos de expressões formais:

$p$

$p((q_5 \diamond$

$p \rightarrow p$

### **Definição de fórmula ou expressão bem formada**

1. Variáveis proposicionais são fórmulas.
2. Se  $\varphi$  é fórmula,  $\neg\varphi$ ,  $\Box\varphi$  e  $\Diamond\varphi$  são fórmulas.
3. Se  $\varphi$  e  $\psi$  são fórmulas, então  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$  e  $(\varphi \rightarrow \psi)$  são fórmulas.
4. Só é fórmula o estabelecido em 1, 2 e 3.

Exemplos de fórmulas:

$p$

$\Box(p \rightarrow q)$

$\Diamond(p_4 \vee q) \rightarrow \neg\Box r$

## Semântica de Lcm

Enquanto a sintaxe se refere à ordem dos símbolos da linguagem a semântica trata do significado que essa ordem pode ter. Portanto iremos descrever uma semântica proposta à nossa linguagem de modo que, definidas adiante as condições de verdade básica para os símbolos enquanto constituintes de fórmulas da linguagem, possamos posteriormente dar conta dos postulados e teoremas desta em alguns de seus vários sistemas.

### Condições de verdade:

Iremos primeiramente determinar as condições de verdade para os símbolos em mundos normais para depois o fazer em relação aos mundos não-normais.

- a)  $[V\pi]$  Se  $\pi$  for uma variável proposicional de  $\square_{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V(\pi, w) = V$  ou  $V(\pi, w) = F$ .
- b)  $[V\neg]$  Se  $\phi$  for uma fórmula de  $\square_{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V(\neg\phi, w) = V$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = F$ ;  $V(\neg\phi, w) = F$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = V$ .
- c)  $[V\wedge]$  Se  $\phi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $\square_{cm}$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\phi \wedge \psi), w] = V$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = V(\psi, w) = V$ ;  $V[(\phi \wedge \psi), w] = F$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = F$  e/ou  $V(\psi, w) = F$ .
- d)  $[V\vee]$  Se  $\phi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $\square_{cm}$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\phi \vee \psi), w] = V$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = V$  e/ou  $V(\psi, w) = V$ ;  $V[(\phi \vee \psi), w] = F$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = V(\psi, w) = F$ .
- e)  $[V\rightarrow]$  Se  $\phi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $Lcm$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\phi \rightarrow \psi), w] = V$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = F$  e/ou  $V(\psi, w) = V$ ;  $V[(\phi \rightarrow \psi), w] = F$  se, e somente se,  $V(\phi, w) = V$  e  $V(\psi, w) = F$ .
- f)  $[V\square_N]$  Se  $\phi$  for uma fórmula de  $\square_{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $N$  (sendo  $N = W - Q$ ), então  $V(\square_N\phi, w) = V$  se, e somente se, para todo  $w'$  que seja

- elemento de  $N$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = V$ ;  $V(\Box_N \varphi, w) = F$  se, e somente se, para ao menos um  $w'$  que for elemento de  $N$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = F$ .
- g)  $[V\Diamond_N]$  Se  $\varphi$  for uma fórmula de  $\Box\text{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $N$  (sendo  $N = W - Q$ ), então  $V(\Diamond_N \varphi, w) = V$  se, e somente se, para ao menos um  $w'$  que seja elemento de  $N$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = V$ ;  $V(\Diamond_N \varphi, w) = F$  se, e somente se, para qualquer  $w'$  que for elemento de  $N$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = F$ .
- h)  $[V\Box_Q]$  Se  $\varphi$  for uma fórmula de  $\Box\text{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $Q$  (sendo  $Q = W - N$ ), então  $V(\Box_Q \varphi, w) = F$ .
- i)  $[V\Diamond_N]$  Se  $\varphi$  for uma fórmula de  $\Box\text{cm}$ , e  $w$  for um membro qualquer de  $Q$  (sendo  $Q = W - N$ ), então  $V(\Diamond_N \varphi, w) = V$ .
- j)  $[V\leftrightarrow]$  Se  $\varphi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $\Box\text{cm}$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\varphi \leftrightarrow \psi), w] = V$  se, e somente se,  $V(\varphi, w) = V(\psi, w)$ ;  $V[(\varphi \Pi \psi), w] = F$  se, e somente se,  $V(\varphi, w) \neq V(\psi, w)$ .
- k)  $[V\leftrightarrow]$  Se  $\varphi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $\Box\text{cm}$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\varphi \leftrightarrow \psi), w] = V$  se, e somente se, para todo  $w'$  que seja elemento de  $W$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = F$  e/ou  $V(\psi, w) = V$ ;  $V[(\varphi \leftrightarrow \psi), w] = F$  se, e somente se, existir ao menos um  $w'$  que seja elemento de  $W$ , tal que  $wRw'$ , sendo que valha:  $V(\varphi, w') = V$  e  $V(\psi, w') = F$ .
- l)  $[V=]$  Se  $\varphi$  e  $\psi$  forem fórmulas quaisquer de  $\text{Lcm}$  e  $w$  for um membro qualquer de  $W$ , então  $V[(\varphi = \psi), w] = V$  se, e somente se, para todo  $w'$  que seja elemento de  $W$ , tal que  $wRw'$ , vale:  $V(\varphi, w') = V(\psi, w')$ ;  $V[(\varphi = \psi), w] = F$  se, e somente se, existir ao menos um  $w'$  que seja elemento de  $W$ , tal que  $wRw'$ , sendo que valha:  $V(\varphi, w') \neq V(\psi, w')$ .

Como os sistemas a serem aqui trabalhados são modais, precisaremos, para construção de uma semântica que abarque esses sistemas, do conceito de mundos possíveis. Mundos possíveis serão definidos por um conjunto  $W$  de mundos, onde seus elementos podem ou não ter acesso a outros mundos desse

conjunto. A idéia de mundos possíveis remete às concepções do filósofo Leibniz, como podemos observar na seguinte passagem:

“Chamo de mundo toda série e toda coleção de todas as coisas existentes, para que não se diga que podem existir vários mundos em diferentes tempos e lugares. De fato, seria preciso contá-los todos juntos como um só mundo ou, se preferis, como um só universo.”<sup>3</sup>

Essa citação elucida bem o conceito de mundos possíveis e de conjunto de mundos ao qual nos referimos acima.

Uma *moldura* pode ser formada por esse conjunto  $W$  e por  $R$  da seguinte forma:  $\langle W, R \rangle$ , onde  $W$ , como foi visto acima, é um conjunto de mundos possíveis e  $R$  é a relação de acesso existente entre eles. Dado uma moldura qualquer, se a ela adicionarmos uma atribuição de valores de verdade  $V$  conforme as condições de verdade vistas acima, então teremos um *modelo* que é formado pela seguinte quadra  $\langle W, N, R, V \rangle$ . Em temos ainda dois subconjuntos a saber:  $Q$  e  $N$ . Esses subconjuntos de  $W$  serão tratados no tópico abaixo.

---

<sup>3</sup> *Théod.*, I, §8. Citado por Abbagnano, Dicionário de filosofia, verbete *Mundo*.

## Mundos não normais.

Para construção dos sistemas a que nos propomos trabalhar nesta monografia será necessário a introdução do conceito de “mundo não-normais”, sendo este simbolizado por  $w^*$ . Assim  $w^*$  é não-normal se, e somente se,  $V(\Box\phi, w^*) = F$  e  $V(\Diamond\phi, w^*) = V$ . Desta forma, em  $w^*$ ,  $\Box\phi$  terá o valor de verdade  $F$  em qualquer caso, enquanto que  $\Diamond\phi$  terá o valor  $V$  também em qualquer caso.

Habitualmente nós tratamos apenas com mundos normais que são aqueles para os quais as fórmulas  $\Box\phi$  e  $\Diamond\phi$  podem, tanto receber valores  $V$  quanto  $F$ .

Dada uma moldura  $\langle W, R \rangle$  onde  $W$  representa um conjunto de mundos e  $R$  uma relação entre esses mundos, e sendo  $N$  o conjunto de mundos possíveis normais, temos então a relação entre mundos normais e não normais descrita assim:

$N \subseteq W$ ,  $N$  é subconjunto de  $W$  ( $N$  representa o conjunto dos mundos normais) e  $Q \subseteq W$ , ou seja,  $Q$  é subconjunto de  $W$ ,  $Q$  é o conjunto dos mundos não-normais (o ‘ $Q$ ’ deriva do termo inglês ‘Queer’ = estranho), porém  $N \cap Q = \emptyset$  e  $N \cup Q = W$ .

Uma interpretação não-normal de  $L_{cm}$  é um modelo  $\langle W, N, R, V \rangle$  onde  $W$ ,  $R$  e  $V$  são, respectivamente; um conjunto de mundos possíveis ( $W$ ), uma relação definida sobre  $W$  ( $R$ ) e uma atribuição de valores de verdade às fórmulas da linguagem ( $V$ ).

Os conjunto de mundos definidos por  $W - N$  são chamados não-normais. Isto pode ser simbolicamente representado da seguinte maneira:  $Q = W - N$ .

## O sistema S0.5

O sistema S0.5 é o mais estrito do que S1, que é o mais estrito dos sistemas de Lewis, e será o primeiro sistema a ser considerado aqui. Primeiramente iremos postular algumas regras para que, então, possamos analisar alguns teoremas relevantes para este trabalho. Para trabalhar com este sistema é preciso ter em mente que o mesmo não possui regras referentes a mundos não-normais, portanto os teoremas provados em S0.5 são teoremas de mundos normais.

O sistema S0.5 possui as seguintes regras:  $\alpha$ ,  $\beta$ , NM, E (aplicável somente a mundos normais),  $\Box K$  (idem) e  $\Box T$  (idem). Essas regras podem ser sistematizadas da seguinte maneira<sup>4</sup>:

a) As regras  $\alpha$  e  $\beta$  são as mesmas que as dos sistemas Kripkeanos.

b) Regra da negação modal (NM):

.	.
.	.
.	.
$\neg \Diamond \varphi (w)$	$\neg \Box \varphi (w)$
.	.
.	.
.	.
$\Box \neg \varphi (w)$	$\Diamond \neg \varphi (w)$

---

<sup>4</sup> Os postulados b), c), d), e) e f) se aplicam apenas a mundos normais.

c) Regra da possibilidade em K ( $\Diamond K$ ):

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Diamond \varphi(w) \quad w \in N \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [w R w'] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(w') \end{array}$$

Restrição:  $w'$  tem que ser novo na haste.

d) Regra da afirmação do dictum de  $\Box$  em S0.5 ( $\Box RN$ ):

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Box \varphi(w) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ [w R w'] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(w') \end{array}$$

Restrição: ( $w'$ ) tem que ser novo na haste.

e) Regra T em S0.5 ( $\Box T$ ):

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Box\varphi(w) \quad w \in N \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi(w) \end{array}$$

Neste sistema só há regras para mundos do tipo N, ou seja, normais. A partir da aplicação das regras de S0.5 poderemos obter fórmulas não-normais, dado isso a árvore não fechará para essas fórmulas, em outras palavras, a demonstração da fórmula não poderá ser levada adiante para tal sistema o que indicará ser esta fórmula um não teorema deste sistema.

Uma fórmula  $\varphi$  é S0.5-válida se, e somente se,  $\forall w (w \in N \rightarrow \neg\varphi \notin w)$ . (uma negação de fórmula válida não é teorema de qualquer mundo normal).

Exemplo:

F1)  $\Box(p \rightarrow p)$ .

$\vdash_{S0.5} \Box(p \rightarrow p)$

Demonstração:

1.	$\neg\Box(p \rightarrow p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Diamond\neg(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$[w R w']$	2, $\Diamond K$
4.	$\neg(p \rightarrow p) (w')$	2,3 $\Diamond K$
5.	$p (w')$	4, $\alpha$
6.	$\neg p (w')$	4, $\alpha$
	*	Q.E.D.

F2)  $\Box\Box(p \rightarrow p)$ .

$\not\vdash_{S0.5} \Box\Box(p \rightarrow p)$ .

1.	$\neg\Box\Box(p \rightarrow p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Diamond\neg\Box(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$[w R w']$	2, $\Diamond K$
4.	$\neg\Box(p \rightarrow p) (w')$	2,3, $\Diamond K$
	.	
	.	
	.	

A árvore não fecha dado que não há regras suficientes para prosseguir com fórmulas do tipo  $\neg\Box\phi$  em  $w'$  neste sistema, (como é o caso da linha 4) dado que este mundo pode ser um mundo estranho no qual as regras modais do sistema S0.5 não são aplicáveis.

Pelo primeiro teorema sabemos que  $\Box(p \rightarrow p)$  é S0.5-válida. Logo  $\neg\Box(p \rightarrow p)$  ou  $\Diamond\neg(p \rightarrow p)$  (que é obtido através da aplicação da regra da negação modal à

primeira) não pertence a qualquer mundo normal de modo que:  $w' \not\sim Q$ . Portanto para  $w'$  não há regras neste sistema.

Os seguintes exemplos são teoremas em K (que é o mais fraco dos sistemas kripkeanos), tentaremos pois demonstra-lo em S0.5 e daí tirar conclusões acerca da característica deste sistema.

$$F3) \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

$$\vdash_{S0.5} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)](w)$	Hip. $w \not\sim N$
2.	$\Box(p \rightarrow q)(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box q)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box p(w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Box q(w)$	3, $\alpha$
6.	$\Diamond\neg q(w)$	5, NM
7.	$[w R w']$	6, $\Diamond K$
8.	$\neg q(w')$	6,7 $\Diamond K$
9.	$p(w')$	4,7 $\Box RN$
10.	$(p \rightarrow q)(w')$	2,7 $\Box RN$
11	<div style="width: 30%;"><math>\neg p(w')</math> *</div> <div style="width: 30%; text-align: center;">10, <math>\beta</math></div> <div style="width: 30%; text-align: right;"><math>q(w')</math> *</div>	10, $\beta$ Q.E.D.

$\vdash_{S0.5} (\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

1.	$\neg[(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)] (w)$	Hip. $w \ 0 \ N$	
2.	$\Box p \wedge \Box q (w)$	$1, \alpha$	
3.	$\neg\Box(p \wedge q) (w)$	$1, \alpha$	
4.	$\Box p (w)$	$2, \alpha$	
5.	$\Box q (w)$	$2, \alpha$	
6.	$\Diamond\neg(p \wedge q) (w)$	$3, NM$	
7.	$[w R w']$	$6, \Diamond K$	
8.	$\neg(p \wedge q) (w')$	$6, 7 \ \Diamond K$	
9.			
10.	$\neg p (w')$	$8, \beta$	$8, \beta$
11.	$p (w')$	$4, 7 \ \Box RN$	$5, 7 \ \Box RN$
	*	*	Q.E.D.

## Metateoremas.

Definição:

D1) Um sistema  $x$  é considerado mais forte que um outro  $y$  se, e somente se, é possível demonstrar pelo menos um teorema  $z$  em  $x$  que não é teorema em  $y$ .

D2) Um sistema  $x$  é estritamente mais forte do que um outro sistema  $y$  se, e somente se,  $x$  é mais forte do que  $y$  e  $y$  não é mais forte do que  $x$ .

### Metateorema 1:

Dados três sistemas a saber: S0.5, K e D; o sistema K e o sistema D serão mais fortes que o sistema S0.5. Com efeito, é possível demonstrar teoremas em K e em D que não são demonstráveis em S0.5. Como exemplo tomemos as seguintes fórmulas:

‘ $\Box(p \rightarrow p)$ ’ e ‘ $\Box\Box(p \rightarrow p)$ ’.

A seguir, façamos os *tableaux* dessas fórmulas nos sistemas citados.

$\vdash_K \Box(p \rightarrow p)$

1.	$\neg\Box(p \rightarrow p) (w)$	Hip.
2.	$\Diamond\neg(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$[w R w']$	2, $\Diamond K$
4.	$\neg(p \rightarrow p) (w')$	2,3 $\Diamond K$
5.	$p (w')$	4, $\alpha$
6.	$\neg p (w')$	4, $\alpha$
	*	Q.E.D.

Como podemos observar, a demonstração desse teorema no sistema K é análoga à sua correspondente em S0.5 que já foi demonstrado anteriormente,

porém com uma única diferença: Na primeira linha da demonstração em K não há a indicação de que  $w$  pertence a N pois este sistema a semântica não possui uma noção de mundos com características específicas como ocorre em S0.5.

$\vdash_K \Box\Box(p \rightarrow p)$

1.	$\neg\Box\Box(p \rightarrow p)(w)$	Hip.
2.	$\Diamond\neg\Box(p \rightarrow p)(w)$	1, NM
3.	$[w R w']$	2, $\Diamond K$
4.	$\neg\Box(p \rightarrow p)(w')$	2,3, $\Diamond K$
5.	$\Diamond\neg(p \rightarrow p)(w')$	4, NM
6.	$[w' R w'']$	5, $\Diamond K$
7.	$\neg(p \rightarrow p)(w'')$	5,6 $\Diamond K$
8.	$\neg p(w'')$	7, $\alpha$
9.	$p(w'')$	7, $\alpha$
	*	Q.E.D.

Como já foi visto anteriormente, em S0.5 a fórmula  $\Box(p \rightarrow p)$  é um teorema, portanto pode ser demonstrado neste sistema, enquanto que a fórmula  $\Box\Box(p \rightarrow p)$  não é um teorema em S0.5 como já foi demonstrado acima. Em K e em D ambos as fórmulas são teoremas, em K, pois já os demonstramos acima, em D, pois K é estritamente mais fraco do que D.

Logo, de acordo com a definição D1, o sistema K e o sistema D são mais fortes do que o sistema S0.5.

Metateorema 2:

Tomando agora as fórmulas  $\Diamond(p \rightarrow p)$  e  $p \rightarrow \Diamond p$ , provemos a sua demonstrabilidade em S0.5 e a sua não demonstrabilidade em K e em D respectivamente.

A) Em S0.5:

$$\vdash_{S0.5} \Diamond(p \rightarrow p)$$

1.	$\neg \Diamond(p \rightarrow p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box \neg(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$\neg(p \rightarrow p) (w)$	2, $\Box T$
4.	$p (w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg p (w)$	3, $\alpha$
	*	Q.E.D.

$$\vdash_{S0.5} p \rightarrow \Diamond p$$

1.	$\neg (p \rightarrow \Diamond p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Diamond p (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box \neg p (w)$	3, NM
5.	$\neg p (w)$	4, $\Box T$
	*	Q.E.D.

B) Em K.

$$\nVdash_K \Diamond(p \rightarrow p)$$

1.	$\neg \Diamond(p \rightarrow p) (w)$	Hip.
2.	$\Box \neg(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
	.	
	.	
	.	

Como o sistema K não possui a regra T, não é possível estender a árvore de modo a obter uma fórmula que nos auxilie a fechar essa árvore, como por exemplo:  $\neg(p \rightarrow p) (w)$ , de modo que em K esta árvore não poderá ser fechada.

$$\nVdash_K p \rightarrow \Diamond p$$

1.	$\neg(p \rightarrow \Diamond p)(w)$	Hip.
2.	$p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Diamond p(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box \neg p(w)$	3, NM
	.	
	.	
	.	

Este caso é semelhante ao anterior, pois aqui não possuímos regras que façam esta árvore se estender para 5.  $\neg p(w)$ , fórmula esta que fecharia a árvore.

C) Em D

$$\vdash_D \Diamond(p \rightarrow p)$$

1.	$\neg \Diamond(p \rightarrow p)(w)$	Hip.
2.	$\Box \neg(p \rightarrow p)(w)$	1, NM
3.	$\Diamond \neg(p \rightarrow p)(w)$	2, $\Box D$
4.	$[w R w']$	3, $\Diamond K$
5.	$\neg(p \rightarrow p)(w')$	3,4 $\Diamond K$
6.	$p(w')$	3, $\alpha$
	$\neg p(w')$	3, $\alpha$
	*	Q.E.D.

$\nV_D p \rightarrow \Diamond p$

1.	$\neg(p \rightarrow \Diamond p)(w)$	Hip.
2.	$p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Diamond p(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box \neg p(w)$	3, NM
5.	$\Diamond \neg p(w)$	4, $\Box D$
6.	$[w R w']$	5, $\Diamond K$
7.	$\neg p(w')$	5,6 $\Diamond K$
	.	
	.	
	.	

No caso acima ainda podemos aplicar a regra  $\Box K$  pelas linhas 4,6 o que não ajudaria em nada, pois como resultado dessa aplicação teríamos 8.  $\neg p(w')$ . Portanto essa árvore não fecha.

Como foi possível observar: A fórmula  $\Diamond(p \rightarrow p)$  é S0.5-válida enquanto que em K não foi possível fechar a árvore para essa fórmula. Isso indica que  $\Diamond(p \rightarrow p)$  é um teorema de S0.5 mas não de K.

Da mesma maneira a fórmula  $p \rightarrow \Diamond p$  é S0.5-válida mas não D-válida, pois em D não é possível fechar a árvore para esta fórmula.

Logo, o sistema S0.5 é mais forte do que os sistemas K e D.

## O sistema S2

Para a construção do sistema S2 serão tomadas a semântica e a sintaxe da linguagem modal definida acima. Os postulados conterão os postulados de S0.5, a diferença, porém, entre esses dois sistemas versará na existência em S2 de regras com relação a mundos não-normais, assim em S2 teremos além dos postulados do sistema S0.5 ( $\Diamond K$ ,  $\Box K$  e  $\Box T$ ) – que são regras para mundos normais – os postulados do sistema E2 ( $\Diamond NQ$ ,  $\Box RQ$ ,  $\Box TQ$ ) – que são regras para mundos estranhos e as regras  $\alpha, \beta, NM$  que valem tanto para mundos normais quanto para mundos não-normais. A definição de validade em S2 é como em S0.5: se tomarmos as regras de E2 com a definição de validade de S0.5, obteremos o sistema S2.:

Uma fórmula  $\varphi$  é S2-válida se, e somente se,  $\forall w (w \in N \rightarrow \neg\varphi \notin w)$ . (uma negação de fórmula válida não é o membro de qualquer mundo normal). Portanto, se tomarmos as regras de E2 com a definição de validade de S0.5, obteremos o sistema S2.:

Os postulados de S2 são, além dos de S0.5, os seguintes:

a) Regra da possibilidade para mundos “estranhos”: ( $\Diamond NQ$ ).

.  
.  
.  
 $\Diamond\varphi(w)$   
.  
.  
.  
 $\Box\psi(w)$   
.  
.  
.  
[ $w R w'$ ]  
 $\varphi(w')$

Restrição:  $w'$  é novo na haste.

b) Regra da necessidade para mundos “estranhos”:  $\Box RQ$

.  
.  
.  
 $\Box \varphi (w)$   
.  
.  
.  
 $[w R w']$   
 $\varphi (w')$

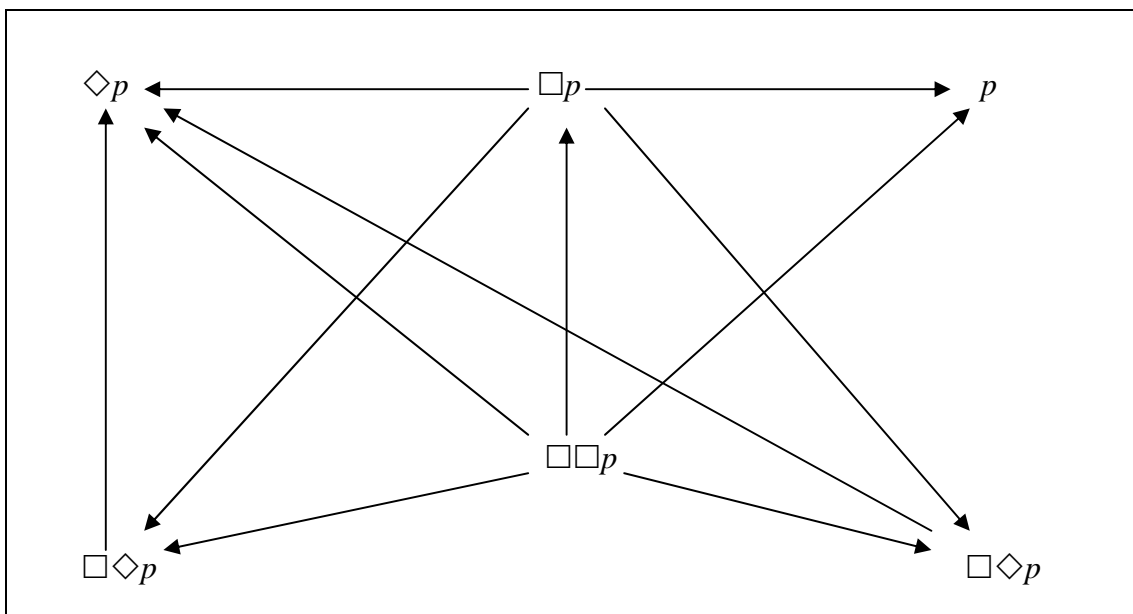
c) Regra da necessidade, em T para mundos “estranhos” ( $\Box TQ$ ):

.  
.  
.  
 $\Box \varphi (w)$   
.  
.  
.  
 $\varphi (w')$

### Cristais.

Um cristal em um sistema modal é formado por fórmulas que tem entre si relações de implicação, não sendo portanto parte de um cristal modal fórmulas de equivalência material, tais fórmulas por vezes sugerem a redução de modalidades que por sua vez é uma característica dos sistemas que possuem alguma forma de cristal.

Em S2 é possível formar o seguinte cristal:



### O sistema S3

O sistema S3 assim como o S2 mantém a mesma sintaxe e semântica da linguagem Lcm.

Os postulados de S3 são os mesmos de S2, mais um, que lhe confere transitividade.

Regra da transitividade em S3 (S3 Tr.):

$\square \varphi (w) \ w \in N$

.

.

.

$[w R w^2]$

.

.

.

$\square \varphi$

Vejam os agora alguns exemplos de árvores em S3:

$$\vdash_{S3} \Box p \leftrightarrow \Box \Box p$$

1.	$\neg(\Box p \leftrightarrow \Box \Box p)(w)$			Hip. $w \in N$
2.	$\Box p(w)$	1, $\beta$	$\neg \Box p(w)$	1, $\beta$
3.	$\neg \Box \Box p(w)$	1, $\beta$	$\Box \Box p(w)$	1, $\beta$
4.	$\Diamond \neg \Box p(w)$	3, NM	$\Diamond \neg p(w)$	2, NM
5.	$[w R w']$	4. $\Diamond K$	$[w R w']$	4. $\Diamond K$
6.	$\neg \Box p(w')$	4,5 $\Diamond K$	$\neg p(w')$	4,5 $\Diamond K$
7.	$\Box p(w')$	2,5 Trans.	$\Box p(w')$	3,5 $\Box RN$
8.	*		$p(w')$	7, $\Box TQ$
			*	Q.E.D.

$$\vdash_{S3} \Diamond p \leftrightarrow \Diamond \Diamond p$$

1.	$\neg(\Diamond p \leftrightarrow \Diamond \Diamond p)(w)$			Hip. $w \in N$
2.	$\Diamond p(w)$	1, $\beta$	$\neg \Diamond p(w)$	1, $\beta$
3.	$\neg \Diamond \Diamond p(w)$	1, $\beta$	$\Diamond \Diamond p(w)$	1, $\beta$
4.	$\Box \neg \Diamond p(w)$	3, NM	$\Box \neg p(w)$	2, NM
5.	$[w R w']$	2. $\Diamond K$	$[w R w']$	3. $\Diamond K$
6.	$\neg p(w')$	2,5 $\Diamond K$	$\Diamond p(w')$	3,5 $\Diamond K$
7.	$\neg \Diamond p(w')$	4,5 $\Box RN$ .	$\Box \neg p(w')$	4,5 Trans.
8.	$\Box \neg p(w')$	7, NM	$[w' R w'']$	6,7 $\Diamond NQ$
9.	$\neg p(w')$	8, $\Box TQ$	$p(w'')$	6,8 $\Diamond NQ$
10.	*		$\neg p(w'')$	7,8 $\Box RQ$
11.			*	Q.E.D.

## Metateoremas

Dados os sistemas acima, iremos agora analisa-los a luz de algumas fórmulas. Primeiramente construiremos algumas árvores dessas fórmulas em S0.5 que é estritamente o mais fraco entre os três sistemas a serem considerados (como poderemos provar mais adiante), assim uma vez demonstrado a fórmula em S0.5 não será necessário construir a árvore para os demais sistemas. Em ordem crescente de força os seguintes sistemas serão S2 e depois S3.

As fórmulas serão as seguintes:

$$\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

$$\Box \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

$$\Box (p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)$$

$$\Box [\Box (p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)]$$

$$\Box (p \rightarrow p)$$

$$\not\vdash_{S0.5} \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

1.	$\neg[\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)](w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Box \Box (p \rightarrow p)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond \neg \Box (p \rightarrow p)(w)$	3, NM
5.	$[w R w']$	4, $\Diamond K$
6.	$\neg \Box (p \rightarrow p)(w')$	4,5 $\Diamond K$
7.	$p(w')$	2,5 $\Box RN$
	.	
	.	
	.	

Esta árvore não fecha, dado que em S0.5 as regras não podem ser aplicadas a mundos estranhos (como é o caso de  $w'$ ) portanto não adiantará aplicar NM a partir de 6.

$$\nvdash_{S0.5} \Box\Box p \rightarrow \Box\Box (p \rightarrow p)$$

1.	$\neg[\Box\Box p \rightarrow \Box\Box (p \rightarrow p)] (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box\Box p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg\Box\Box (p \rightarrow p) (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond\neg\Box (p \rightarrow p) (w)$	3, NM
5.	$\Box p (w)$	2, $\Box T$
6.	$[w R w']$	4, $\Diamond K$
7.	$\neg\Box (p \rightarrow p) (w')$	4,5 $\Diamond K$
8.	$p (w')$	2,5 $\Box RN$
	.	
	.	
	.	

Novamente esta árvore não fecha, dado que em S0.5 as regras não podem ser aplicadas a mundos estranhos (como é o caso de  $w'$ ) portanto não adiantará aplicar NM a partir de 6 ou a regra  $\Box T$ , a partir de 5. Neste último caso, obteríamos  $p$  em  $w$  o que, de forma alguma, possibilita que a árvore seja fechada.

$$\vdash_{S0.5} \Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)$$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)] (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box(p \rightarrow p) (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box p) (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box p (w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Box p (w)$	3, $\alpha$
	*	Q.E.D.

$$\vdash_{S0.5} \Box[\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)]$$

1.	$\neg\Box[\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)](w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Diamond\neg[\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)](w)$	1, NM
3.	$[w R w']$	2, $\Diamond K$
4.	$\neg[\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)](w')$	2,3 $\Diamond K$
5.	$\Box(p \rightarrow p)(w')$	4, $\alpha$
6.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box p)(w')$	4, $\alpha$
7.	$\Box p(w)$	6, $\alpha$
8.	$\neg\Box p(w)$	6, $\alpha$
	*	Q.E.D.

$$\vdash_{S0.5} \Box p \rightarrow p$$

1.	$\neg(\Box p \rightarrow p)(w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg p(w)$	1, $\alpha$
4.	$p(w)$	2, $\Box T$
	*	Q.E.D.

Como podemos observar, as únicas fórmulas acima que são teoremas em S0.5 são: a fórmula K, ou seja,  $\Box(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box p)$  e a fórmula  $\Box p \rightarrow p$  que representa a regra  $\Box T$ . Assim, as demais fórmulas que não foram demonstradas em S0.5 serão vistas adiante a partir dos sistemas S2 e S3 conforme for o caso.

$$\nVdash_{S2} \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

1.	$\neg[\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)](w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Box \Box (p \rightarrow p)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond \neg \Box (p \rightarrow p)(w)$	3, NM
5.	$[w R w']$	4, $\Diamond K$
6.	$\neg \Box (p \rightarrow p)(w')$	4,5 $\Diamond K$
7.	$p(w')$	2,5 $\Box RN$
8.	$\Diamond \neg (p \rightarrow p)(w')$	6, NM
	.	
	.	
	.	

A árvore acima não fecha, pois a única regra, neste caso, que poderia nos auxiliar é a regra da passagem a um outro mundo a partir de  $w'$  ( $\Diamond NQ$ ) para que então pudéssemos afirmar  $\neg(p \rightarrow p)$ , mas para a aplicação de tal regra precisamos de  $\Box \phi$  em  $w'$  pois este é um mundo estranho, portanto como não aparece qualquer fórmula  $\Box \phi$  neste mundo não poderemos aplicar tal regra.

$$\vdash_{S2} \Box \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

1.	$\neg[\Box \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)](w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box \Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Box \Box (p \rightarrow p)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond \neg \Box (p \rightarrow p)(w)$	3, NM
5.	$[w R w']$	4, $\Diamond K$
6.	$\neg \Box (p \rightarrow p)(w')$	4,5 $\Diamond K$
7.	$\Diamond \neg (p \rightarrow p)(w')$	6, NM
8.	$\Box p(w')$	2,5 $\Box RN$
9.	$[w' R w'']$	7,8 $\Diamond NQ$
10.	$\neg (p \rightarrow p)(w'')$	7,9 $\Diamond NQ$
11.	$p(w'')$	10, $\alpha$
12.	$\neg p(w'')$	10, $\alpha$
13.	*	Q.E.D.

A única fórmula portanto que não é teorema nem de S0.5 nem de S2 é a seguinte:  $\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$ . Assim esta é a única fórmula, do conjunto anterior de fórmulas, da qual faremos uma árvore em S3, visto que, ao se provar que S3 é mais forte estritamente que os outros sistemas (S0.5 e S2), então todos os teoremas desses dois sistemas o serão também em S3.

$$\vdash_{S3} \Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$$

1.	$\neg[\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)](w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \Box \Box (p \rightarrow p)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond \neg \Box (p \rightarrow p)(w)$	3, NM
5.	$[w R w']$	4, $\Diamond K$
6.	$\neg \Box (p \rightarrow p)(w')$	4,5 $\Diamond K$
7.	$\Diamond \neg (p \rightarrow p)(w')$	6, NM
8.	$\Box p(w')$	2,5 Trans.
9.	$[w R w']$	7,8 $\Diamond NQ$
10.	$\neg (p \rightarrow p)(w')$	7,9 $\Diamond NQ$
11.	$p(w')$	10, $\alpha$
12.	$\neg p(w')$	10, $\alpha$
	*	Q.E.D.

Definição:

Um sistema qualquer  $x$  é denominado “estritamente mais forte” que um sistema  $y$  se, e somente se, o sistema  $x$  é mais forte que o sistema  $y$  e o sistema  $y$  não é mais forte que o sistema  $x$ .

### Metateorema 3:

S0.5 é estritamente mais fraco do que os sistemas S2 e S3.

Prova:

Como tanto S2 quanto S3 possuem todos os postulados de S0.5, podemos demonstrar todos os teoremas de S0.5 nestes outros dois sistemas (S2 e S3) porém, não acontece de ser possível provar todos os teoremas de S2 ou S3 em S0.5, isso porque os sistemas S2 e S3 possuem postulados referentes mundos estranhos além dos postulados de S0.5, enquanto que S0.5 possui postulados apenas referentes mundos normais.

Logo S0.5 é estritamente mais fraco que S2 e S3.

### Metateorema 4:

O sistema S3 é estritamente mais forte do que o sistema S2.

Prova:

A prova deste metateorema é análoga a prova do metateorema 3, ou seja, como o sistema S3 possui todos os postulados do sistema S2, podemos provar todos os teoremas de S2 em S3 (basta para isso usar os postulados referentes a S2), portanto S2 não é mais forte do que S3, por outro lado o sistema S3 possui um postulado que não faz parte do conjunto de postulados do sistema S2, este é a regra da transitividade (característica de S3), desta forma alguns teoremas que necessitam de tal regra para serem demonstrados não poderão ser demonstrados em S2 (como por exemplo o teorema de S3:  $\Box p \rightarrow \Box \Box (p \rightarrow p)$ ), portanto o sistema S3 é mais forte do que o sistemas S2.

Logo o sistema S3 é estritamente mais forte do que o sistema S2.

## Os sistemas E

### O sistema E0.5

Os postulados do sistema E0.5 são os mesmos do sistema S0.5 a saber:  $\alpha$ ,  $\beta$ , NM, E (aplicável somente a mundos normais),  $\Box K$  (idem) e  $\Box T$  (idem). A diferença entre esses sistema se dá portanto, pelas respectivas definições de validade.

Definição de fórmula válida em E0.5:

Uma fórmula  $\varphi$  é E0.5-válida se, e somente se,  $\Box w(\neg \varphi \vdash w)$ .

Nota-se que a definição de validade para esse sistema não especifica o tipo de mundo a que uma fórmula válida pertence, ou seja, podemos tratar, nesse sistema tanto de fórmula em mundos “estranhos” (Q) quanto de fórmula em mundos “normais” (N). Entretanto os operadores modais pouco ajudam para a caracterização desse sistema, uma vez que algumas regras modais importantes não se aplicam para mundos não normais.

Exemplos:

$\vdash_{E0.5} \Diamond(p \rightarrow p)$

1.	$\neg \Diamond(p \rightarrow p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box \neg(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$\neg(p \rightarrow p) (w)$	2, $\Box T$
4.	$P$	3, $\alpha$
5.	$\neg p$	3, $\alpha$
	*	

$$\vdash_{E0.5} \Diamond \neg(p \wedge \neg p)$$

1.	$\neg \Diamond \neg(p \wedge \neg p) (w)$	Hip. $w \in N$
2.	$\Box \neg \neg(p \wedge \neg p) (w)$	1, NM
3.	$\neg \neg(p \wedge \neg p) (w)$	2, $\Box T$
4.	$(p \wedge \neg p) (w)$	3, $\alpha$
5.	$p (w)$	4, $\alpha$
6.	$\neg p (w)$	4, $\alpha$
	*	Q.E.D.

Qualquer fórmula que seja tautologia será teorema deste sistema quando regida pelo operador de possibilidade, ou seja, se  $\varphi$  é tautologia então  $\Diamond \varphi$  é teorema em E0.5, assim, neste sistema ocorre que todas as tautologias são possíveis porém não é o caso que todas as tautologias sejam necessárias em E0.5.

Exemplo:

$$\vdash_{E0.5} \Box (p \vee \neg p)$$

1.	$\neg \Box (p \vee \neg p) (w)$	Hip. $w \notin N$
2.	$\Diamond \neg (p \vee \neg p) (w)$	1, NM
	.	
	.	
	.	

$$\vdash_{E0.5} \Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$$

1.	$\neg (\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p) (w)$	Hip. $w \in N$		
	├──────────┬──────────┤			
2.	$\Box p (w)$	1, $\alpha$	$\neg \Diamond \neg p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg \neg \Diamond \neg p (w)$	1, $\alpha$	$\neg \Box p (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond \neg p (w)$	3, $\alpha$	$\Diamond \neg p (w)$	3, NM
	.		$\Box \neg \neg p (w)$	2, NM
	.		.	
	.		.	
	.		.	

A fórmula acima representa a definição do operador  $\Box$ . Logo, essa fórmula deveria valer para todos os sistemas modais que possua tal definição, porem como podemos ver acima isso não se dá em E0.5, sendo este um caso curioso.

### O sistema E2

Esse sistema possui as mesmas regras de S0.5 e mais os seguintes acréscimos:

a) Regra da possibilidade para mundos “estranhos”: ( $\Diamond NQ$ ).

$$\Diamond \varphi (w)$$

.

.

.

$$\Box \psi (w)$$

.

.

.

$$[w R w']$$

$$\varphi (w)$$

Restrição:  $w'$  é novo na haste.

b) Regra da necessidade para mundos “estranhos”:  $\Box RQ$

.  
.  
.  
 $\Box\varphi(w)$   
.  
.  
.  
 $[w R w']$   
 $\varphi(w')$

c) Regra da necessidade, em T para mundos “estranhos” ( $\Box TQ$ ):

.  
.  
.  
 $\Box\varphi(w)$   
.  
.  
.  
 $\varphi(w')$

A definição de validade nesse sistema é como a do sistema E0.5, sendo assim podemos escreve-la da seguinte maneira:

Exemplos:

$\vdash_{E2} \Box p \rightarrow p$

1.	$\neg(\Box p \rightarrow p) (w)$	Hip. $w \in Q$
2.	$\Box p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg p (w)$	1, $\alpha$
4.	$P$	3, $\Box T$
	*	Q.E.D.

$\vdash_{E2} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)] (w)$	Hip. $w \in Q$
2.	$\Box(p \rightarrow q) (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box q) (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box p (w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Box q (w)$	3, $\alpha$
6.	$\Diamond\neg q (w)$	5, NM
7.	$[w R w']$	6, 4. $\Diamond NQ$
8.	$p \rightarrow q (w')$	2, 7. $\Diamond NQ$
9.	$p (w')$	4, 7. $\Box RQ$
10.	$\neg q (w')$	6, 7. $\Box RQ$
11.	$\neg p (w')$ 8, $\beta$ $Q (w')$	8, $\beta$
	*	*



## O sistema C2

O sistema C2 é um dos sistemas mais fracos. Se tomarmos o sistema E2 e excluirmos a regra ( $\Box$ TQ), obtemos o sistema C2. Portanto esse sistema é formado pelos seguintes postulados: ( $\Diamond$ K,  $\Box$ K), ( $\Diamond$ NQ,  $\Box$ RQ,) e ( $\alpha$ ,  $\beta$ , NM). A definição de validade é a mesma do sistema E2, que é formulada da seguinte maneira:

Uma fórmula  $\varphi$  é C2-válida se, e somente se,  $\Box w(\neg\varphi \notin w)$ .

Exemplos de alguns teoremas e não teoremas de C2:

$\vdash_{C2} \Box(p \vee \neg p)$

- |    |                                   |                |
|----|-----------------------------------|----------------|
| 1. | $\neg\Box(p \vee \neg p) (w)$     | Hip. $w \in Q$ |
| 2. | $\Diamond\neg(p \vee \neg p) (w)$ | 1, NM          |
|    | .                                 |                |
|    | .                                 |                |
|    | .                                 |                |

Por este não teorema podemos observar uma das características essenciais dos sistemas não normais que é o fato de, nestes sistemas, as fórmulas do tipo  $\Box\varphi$  serem sempre F enquanto fórmulas do tipo  $\Diamond\varphi$  são sempre V.

Agora então veremos se isto se dá realmente no sistema S2, portanto tomemos a seguinte fórmula como exemplo:

$\vdash_{C2} \Diamond(p \vee \neg p)$

- |    |                                    |                |
|----|------------------------------------|----------------|
| 1. | $\neg \Diamond(p \vee \neg p) (w)$ | Hip. $w \in Q$ |
| 2. | $\Box \neg(p \vee \neg p) (w)$     | 1, NM          |
|    | .                                  |                |
|    | .                                  |                |
|    | .                                  |                |

Como podemos observar, apesar da fórmula  $(p \vee \neg p)$  representar um teorema clássico, não é o caso dessa fórmula ser necessária em C2, como também não é o caso desta ser possível neste mesmo sistema. Logo C2 apresenta uma característica peculiar entre os outros sistemas deste mesmo gênero.

Podemos concluir pelas árvores de C2 acima que se  $\varphi$  é uma tautologia, então  $\Box\varphi$  e  $\Diamond\varphi$  não serão teoremas de C2. Isto acontece pois uma árvore em C2 a partir de  $\Box\varphi$  terá na primeira linha a fórmula  $\neg\Box\varphi$ , e por negação modal a partir da linha 1:  $\Diamond\neg\varphi$ , daí em diante a árvore não poderá mais ser estendida uma vez que a regra de acesso neste sistema exige que haja uma fórmula  $\Box\varphi$  e uma  $\Diamond\psi$  na mesma haste, fato que, como podemos constatar, não ocorre aqui. Se a fórmula a ser demonstrada é  $\Diamond\varphi$  onde  $\varphi$  é uma tautologia teremos então na linha 1 a seguinte fórmula:  $\neg\Diamond\varphi$ , daí, também por negação modal, teremos  $\Box\neg\varphi$  na linha 2 e mais uma vez não poderemos estender a árvore dado que as únicas regras que nos ajudariam aqui são a  $\Box TQ$  e a  $\Box D$ , regras que, como foi indicado acima não fazem parte do sistema C2.

Adiante veremos mais duas árvores em C2:



$$\vdash_{C2} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)](w)$	Hip. $w \in Q$
2.	$\Box(p \rightarrow q)(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box q)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box p(w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Box q(w)$	3, $\alpha$
6.	$\Diamond\neg q(w)$	5, NM
7.	$[w R w']$	6, 4. $\Diamond NQ$
8.	$p \rightarrow q(w')$	2, 7. $\Diamond NQ$
9.	$p(w')$	4, 7. $\Box RQ$
10.	$\neg q(w')$	6, 7. $\Box RQ$
$\begin{array}{c}   \\ \hline \begin{array}{ccc}   & &   \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \neg p(w') & 8, \beta & q(w') \\ * & & * \end{array} \end{array}$		
11.		8, $\beta$ Q.E.D.

Dado que este sistema é muito fraco devemos nos questionar acerca do papel desempenhado pelos operadores modais em C2. Assim tentaremos agora provar que este sistema não pode se reduzir à lógica proposicional, sendo portanto um sistema modal, ainda que muito fraco. Para tanto seguiremos o seguinte processo.

1) Consideremos o operador  $\Box$  como sendo primitivo e sendo  $\varphi$  uma fórmula qualquer tomemos o operador  $\Diamond$  como sendo definido a partir de  $\Box$  da seguinte maneira:

$$\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi^5$$

---

<sup>5</sup> Esta definição está provada acima.

2) Provemos que o operador tomado como primitivo não pode ser eliminado. Essa prova se dá a partir da árvore da fórmula que se segue mais uma explicação acerca de tal árvore, a fórmula referida é a seguinte:

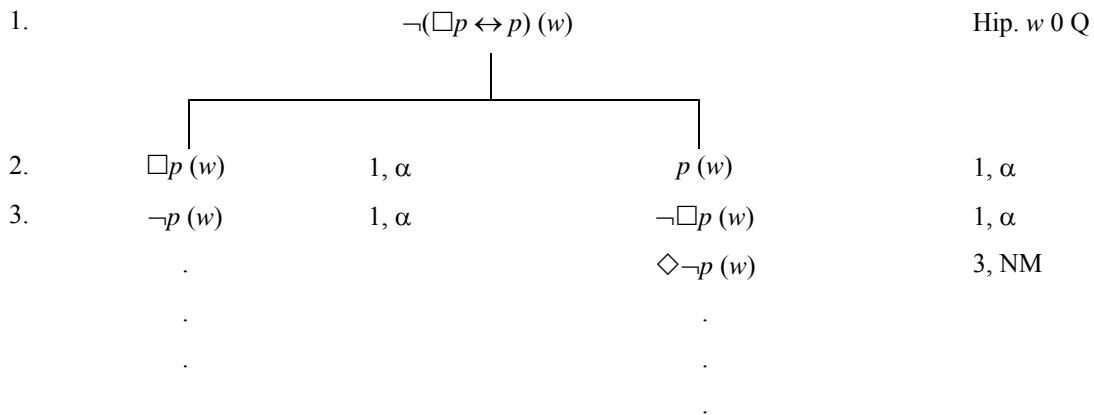
$$\Box p \leftrightarrow p$$

Em qualquer sistema modal, cujo o operador primitivo é  $\Box$ , teremos o seguinte caso:

Se a fórmula  $\Box p \leftrightarrow p$  é teorema deste sistema então este sistema é redutível à lógica proposicional.

Portanto, façamos a árvore em C2 para a fórmula  $\Box p \leftrightarrow p$ :

$$\nVdash_{C2} \Box p \leftrightarrow p$$



A árvore acima não pode ser fechada.

Uma vez que, em C2, não existe a regra  $\Box T$ , não podemos obter em 4, a fórmula  $p$  que fecharia a árvore por ser uma contradição com  $\neg p$  que está escrito na linha 3, as demais regras não podem nos ajudar neste caso.

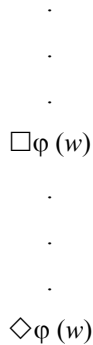
Logo, a árvore acima não pode ser fechada, portanto a fórmula  $\Box p \leftrightarrow p$  não é teorema de C2, o que prova que este sistema ainda é modal.

**O sistema ED2 ou (D2)**

O sistema D2 ou (ED2) é o sistema que resulta de C2, com acréscimo da seriação. Desde modo, o sistema D2 é formado pelos seguintes postulados: ( $\Diamond K$ ,  $\Box K$ ), ( $\Diamond NQ$ ,  $\Box RQ$ ) e ( $\alpha$ ,  $\beta$ , NM) mais a seriação ( $\Box D$ ). A definição de validade é a mesma do sistema E2, que é formulada da seguinte maneira:

Uma fórmula  $\varphi$  é C2-válida se, e somente se,  $\Box w(\neg\varphi \notin w)$ .

A seriação corresponde à seguinte regra: Se  $\Box\varphi(w)$  ocorre em  $H_E$  então essa haste pode ser prolongada graças ao acréscimo de um ponto da forma  $\Diamond\varphi(w)$  como sucessor de E.



Exemplos de alguns teoremas e não teoremas de D2:

$$\vdash_{D2} \Box p \rightarrow \Diamond p$$

1.	$\neg(\Box p \rightarrow \Diamond p)(w)$	Hip. $w \in Q$
2.	$\Box p(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg\Diamond p(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond p(w)$	2, $\Box D$
5.	$\Box\neg p(w)$	3, NM
6.	$[w R w']$	4, 6. $\Diamond NQ$
7.	$p(w')$	4, 6.
8.	$\neg p(w')$	4, 7. $\Diamond NQ$
	*	Q.E.D.

A fórmula ' $\Box p \rightarrow \Diamond p$ ' que foi demonstrada acima representa uma característica especial do sistema D, pois sua demonstração é possível neste sistema graças a aplicação da regra  $\Box D$  na linha 4.

$$\vdash_{D2} \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)](w)$	Hip. $w \ 0 \ Q$
2.	$\Box(p \rightarrow q)(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Diamond p \rightarrow \Diamond q)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond p(w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Diamond q(w)$	3, $\alpha$
6.	$\Box\neg q(w)$	5, NM
7.	$[w R w']$	4,6. $\Diamond NQ$
8.	$p(w')$	4, 7. $\Diamond NQ$
9.	$\neg q(w')$	6,7 $\Box RQ$
10.	$(p \rightarrow q)(w')$	3,7 $\Box RQ$
$\begin{array}{c}   \\ \hline \begin{array}{ccc} \neg p(w') & 10, \beta & q(w') \\ * & & * \end{array} \end{array}$		
11		10, $\beta$ Q.E.D.

O teorema acima também é válido tanto em K quanto em S0.5, como já foi visto anteriormente.

$$\nVdash_{D2} \neg\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\neg p$$

1.	$\neg(\neg\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\neg p) (w)$		Hip. $w \in Q$
2.	$\neg\Diamond p (w)$	1, $\beta$	$\Diamond\neg p (w)$ 1, $\beta$
3.	$\neg\Diamond\neg p (w)$	1, $\beta$	$\neg\neg\Diamond p (w)$ 1, $\beta$
4.	$\Box\neg p (w)$	2, NM	$\Diamond p (w)$ 3, $\alpha$
5.	$\Box\neg\neg p (w)$	3, NM	.
6.	$\Diamond\neg p (w)$	4, $\Box D$	.
7.	$[w R w']$	5,6 $\Diamond NQ$	.
8.	$\neg p (w')$	6,7 $\Diamond NQ$	
9.	$\neg\neg p (w')$	5,7 $\Box RQ$	
	*		

Nota-se que, para essa fórmula, a árvore fecha do lado esquerdo mas que não é possível fecha-la do lado direito uma vez que não há mais regras que sejam aplicáveis a este lado da árvore que obtenham fórmulas diferentes das já obtidas.

A partir dessa árvore podemos concluir que tanto ' $\Diamond\neg p \rightarrow \neg\Diamond p$ ' quanto ' $\neg\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\neg p$ ' não são teoremas em D2 enquanto que ' $\neg\Diamond p \rightarrow \Diamond\neg p$ ' é teorema desse sistema.

$$\vdash_{D2} \Diamond(p \vee \neg q)$$

1.	$\neg\Diamond(p \vee \neg p) (w)$		Hip. $w \in Q$
2.	$\Box\neg(p \vee \neg p) (w)$		1, NM
3.	$\Diamond\neg(p \vee \neg p) (w)$		2, $\Box D$
4.	$[w R w']$		2,3 $\Diamond NQ$
5.	$\neg(p \vee \neg p) (w')$		3,4 $\Diamond NQ$
6.	$p (w')$		5, $\alpha$
7.	$\neg p (w')$		5, $\alpha$
	*		Q.E.D.

Neste sistema todas as tautologias são possíveis, pois sendo  $\top$  uma tautologia, a demonstração de  $\Diamond\top$  teria os seguintes passos:

Em 1. Por hipótese teremos  $\neg\Diamond\top$ , em 2 por aplicação de NM a partir de 1:  $\Box\neg\top$ , depois por aplicação de  $\Box D$  a partir de 2 teremos no passo 3:  $\Diamond\neg\top$ , todos os passos até aqui se referiram a fórmulas em  $w$ , agora, a partir das fórmulas de 2 e 3 poderemos obter um acesso do tipo  $[w R w']$  na linha 4, e então, a partir de 3,4 por aplicação da regra  $\Diamond NQ$  teremos a fórmula  $\neg\top$  essa fórmula, como sabemos, é uma contradição e por isso a árvore fechará com aplicações de regras proposicionais.

Esse sistema também possui a propriedade característica dos sistemas fracos que comportam o conceito de mundos estranhos que é a propriedade das fórmulas  $\Diamond\phi$  serem V enquanto que as fórmulas  $\Box\phi$  são F como pode ser provado pela seguinte análise:

Suponhamos uma árvore para  $\Box\phi$ : Em 1, por hipótese teremos  $\neg\Box\top$  em  $w$  onde  $w \in Q$ , em 2 a partir de 1 por aplicação da regra NM teremos:  $\Diamond\neg\top$ , daqui não poderemos ter acesso nenhum a outro mundo dado que só possuímos uma das duas premissas necessárias como pode ser visto na formulação da regra, portanto uma árvore para  $\Box\phi$  não poderá ser fechada, para qualquer que seja  $\phi$ , neste sistema.

Exemplo:

	$\nV_{D2} \Box(p \vee \neg q)$	
1.	$\neg\Box(p \vee \neg p) (w)$	Hip. $w \in Q$
2.	$\Diamond\neg(p \vee \neg p) (w)$	1, NM
	.	
	.	
	.	

## O sistema N

Um sistema normal de lógica modal tem quatro características. Nele temos o seguinte:

1. Se  $\varphi$  é uma fórmula tautológica, então  $\Box\varphi$  é válida;
2. Se  $\varphi$  é uma fórmula válida, então  $\Box\varphi$  é válida;
3. Qualquer fórmula da forma  $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$  ( $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi$ ) é válida;
4. O *Modus Ponens* é uma forma válida de argumentação.

As idéias que regem o sistema N são as seguintes:

- a) Em N, apenas as premissas de um argumento podem ser tomadas como necessariamente verdadeiras;
- b) Se o conjunto de premissas de um argumento for vazio, então as regras específicas de N serão inoperantes.

O sistema N.

Regras:  $\alpha$ ,  $\beta$ , NM.

Regra específica de N:

A) Regra da possibilidade em N ( $\Diamond N$ ):

$\Diamond\varphi (w)$

.

.

.

$\varphi (w')$

Restrição:  $w'$  é um mundo novo.

B) Regra da necessidade em N ( $\Box N$ ):

$\varphi(w)$  Pr.

.

.

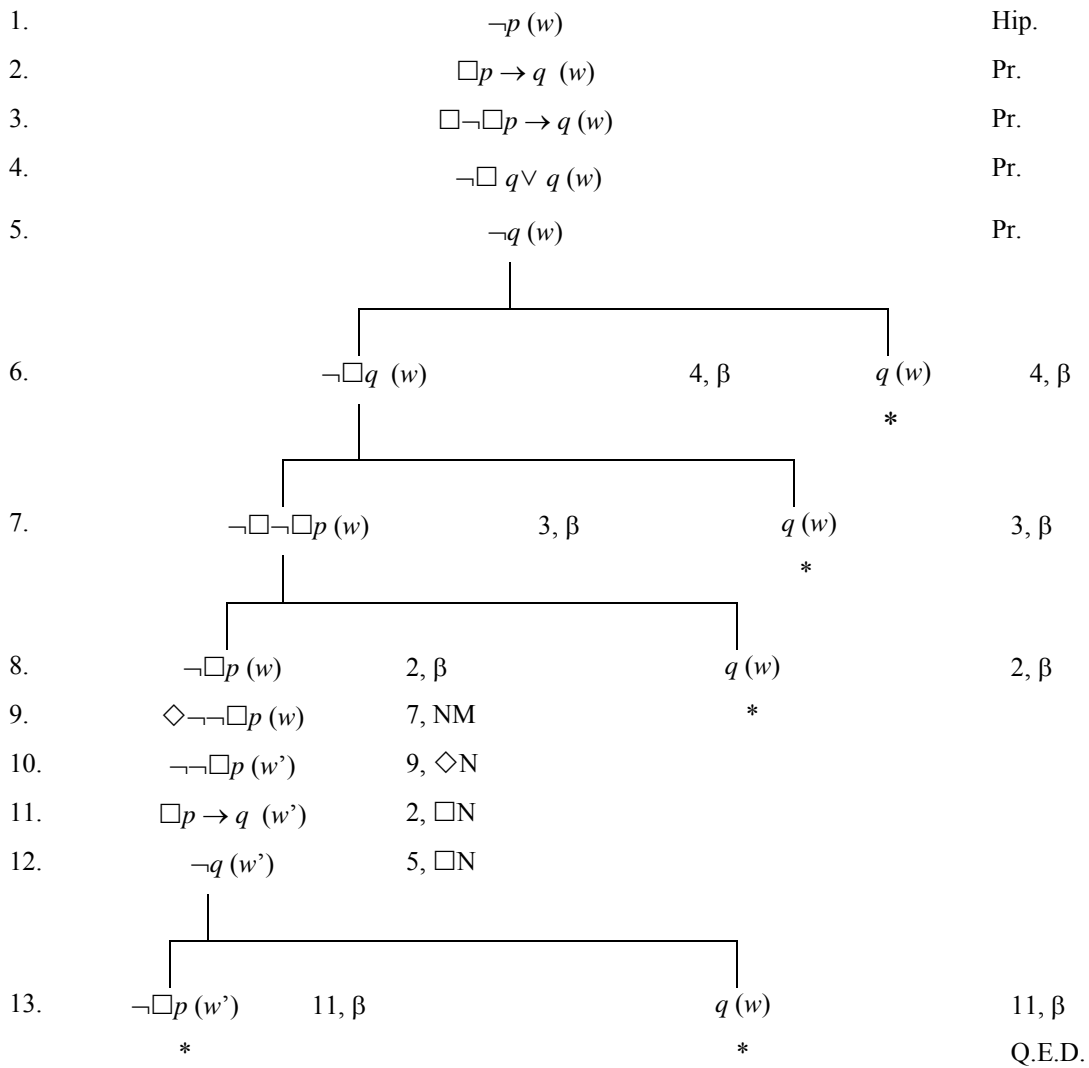
.

$\varphi(w')$

$w'$  é qualquer mundo.

Exemplos:

Dedução:  $\Box p \rightarrow q, \Box \neg \Box p \rightarrow q, \neg \Box q \vee q, \neg q \vdash_N p$



Neste sistema, todas as tautologias podem ser escritas precedidas pelo operador modal  $\Box$ , continuando ainda uma fórmula válida.

Por Exemplo: Em N vale  $\Box(p \vee \neg p)$ .

Entretanto em N não vale:

$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ , ou seja, o princípio K.

$\not\vdash_N \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

1.	$\neg[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)](w)$	Hip.
2.	$\Box(p \rightarrow q)(w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box q)(w)$	1, $\alpha$
4.	$\Box p(w)$	3, $\alpha$
5.	$\neg\Box q(w)$	3, $\alpha$
6.	$\Diamond\neg q(w)$	5, NM
7.	$\neg q(w')$	6, $\Diamond N$
	.	
	.	
	.	

Não há, conseqüentemente nenhuma árvore fechada para o princípio K em N pois as regras que foram aplicadas acima esgotam todas as possibilidades de aplicação de regras em N. A fórmula  $\Box(p \rightarrow q)$  não nos habilitaria tampouco a fechar essa árvore dado que não há regras em N que eliminem o operador  $\Box$ . Portanto não há árvore alguma fechada para a fórmula  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$  em N.

Logo o princípio K não é N-válida.

Também em N não vale  $\Box p \rightarrow p$ :

$$\vdash_N \Box(p \rightarrow p)$$

1.	$\neg(\Box p \rightarrow p) (w)$	Hip.
2.	$\Box p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg p (w)$	1, $\alpha$
	.	
	.	
	.	

Assim como não vale. Em suma, não valem as leis especificamente modais, que não sejam meras modalizações de tautologias.

Portanto, N é mais fraco do que K.

O sistema N satisfaz as condições (1) e (2) acima estabelecidas [ $\Box\Box p \vee \neg p$ ], por exemplo, é válida. Mas não satisfaz às condições (3) e (4). Por exemplo:

$$\Box(p \rightarrow q), \Box p \not\vdash_N \Box q$$

1.	$\neg\Box q (w)$	Hip.
2.	$\Box(p \rightarrow q) (w)$	Pr.
3.	$\Box p (w)$	Pr.
4.	$\Diamond\neg q (w)$	1, NM
5.	$\neg q (w')$	4, $\Diamond N$
6.	$\Box(p \rightarrow q) (w')$	2, $\Box N$
7.	$\Box p (w')$	3, $\Box N$
	.	
	.	
	.	

$\vdash_N \Box\Box(p \rightarrow p)$

1.	$\neg\Box\Box(p \rightarrow p) (w)$	Hip.
2.	$\Diamond\neg\Box(p \rightarrow p) (w)$	1, NM
3.	$\neg\Box(p \rightarrow p) (w')$	2, $\Diamond N$
4.	$\Diamond\neg(p \rightarrow p) (w')$	3, NM
5.	$\neg(p \rightarrow p) (w'')$	4, $\Diamond N$
6.	$\neg p (w'')$	5, $\alpha$
7.	$p (w'')$	5, $\alpha$
	*	Q.E.D.

$\nVdash_N \Box p \rightarrow \Box\Box p$

1.	$\neg(\Box p \rightarrow \Box\Box p) (w)$	Hip.
2.	$\Box p (w)$	1, $\alpha$
3.	$\neg\Box\Box p (w)$	1, $\alpha$
4.	$\Diamond\neg\Box p (w)$	3, NM
5.	$\neg\Box p (w')$	4, $\Diamond N$
6.	$\Diamond\neg p (w')$	5, NM
7.	$\neg p (w'')$	6, $\Diamond N$
	.	
	.	
	.	

$\Box p \vdash_N \Box\Box p$

1.	$\neg\Box\Box p (w)$	Hip.
2.	$\Box p (w)$	Pr
3.	$\Diamond\neg\Box p (w)$	1, NM
4.	$\neg\Box p (w')$	3, $\Diamond N$
5.	$\Box p (w')$	2, $\Box N$
	*	Q.E.D.

$$\vdash_N \Diamond(p \rightarrow p)$$

- |    |                                      |       |
|----|--------------------------------------|-------|
| 1. | $\neg \Diamond(p \rightarrow p) (w)$ | Hip.  |
| 2. | $\Box \neg(p \rightarrow p) (w)$     | 1, NM |
|    | .                                    |       |
|    | .                                    |       |
|    | .                                    |       |

Nenhuma tautologia é possível em N.

$$\nVdash_N \neg \Diamond p \leftrightarrow \Diamond \neg p$$

- |    |   |                   |                                       |
|----|---|-------------------|---------------------------------------|
| 1. | $\neg(\neg \Diamond p \leftrightarrow \Diamond \neg p) (w)$ |                   | Hip.                                  |
|    |   |                   |                                       |
|    | ├──┤                  |                   |                                       |
| 2. | $\neg \Diamond p (w)$                                       | 1, $\beta$        | $\Diamond \neg p (w)$ 1, $\beta$      |
| 3. | $\neg \Diamond \neg p (w)$                                  | 1, $\beta$        | $\neg \neg \Diamond p (w)$ 1, $\beta$ |
| 4. | $\Box \neg p (w)$   | 2, NM             | $\Diamond p (w)$ 3, $\alpha$          |
| 5. | $\Box \neg \neg p (w)$                                      | 3, NM             | .                                     |
| 6. | $\Diamond \neg p (w)$                                       | 4, $\Box D$       | .                                     |
| 7. | $[w R w']$  | 5,6 $\Diamond NQ$ | .                                     |
| 8. | $\neg p (w')$   | 6,7 $\Diamond NQ$ |                                       |
| 9. | $\neg \neg p (w')$  | 5,7 $\Box RQ$     |                                       |
|    | *   |                   |                                       |

$$\nVdash_N \Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$$

1.	$\neg(\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p)(w)$		Hip.
	├──		
2.	$\Box p(w)$	1, $\beta$	$\neg \Diamond \neg p(w)$
3.	$\neg \neg \Diamond \neg p(w)$	1, $\beta$	$\neg \Box p(w)$
4.	$\Diamond \neg p(w)$	3, $\alpha$	$\Diamond \neg p(w)$
5.	$\neg p(w)$	4, $\Diamond N$	*
	.		Q.E.D.
	.		
	.		

Apenas  $\neg \Diamond \neg p \rightarrow \Box p$  é valido em N.

$$\vdash_N \neg \Box p \leftrightarrow \neg \neg \Diamond \neg p$$

1.	$\neg(\neg \Box p \leftrightarrow \neg \neg \Diamond \neg p)(w)$		Hip.
	├──		
2.	$\neg \Box p(w)$	1, $\beta$	$\neg \neg \Diamond \neg p(w)$
3.	$\neg \neg \neg \Diamond \neg p(w)$	1, $\beta$	$\neg \neg \Box p(w)$
4.	$\neg \Diamond \neg p(w)$	3, $\alpha$	$\Diamond \neg p(w)$
5.	$\Diamond \neg p(w)$	2, NM	$\Box p(w)$
	*	Q.E.D.	$\Diamond \neg p(w)$
	.		$\neg \Box p(w)$
	.		*
	.		Q.E.D.

O teorema acima e uma variaao da negaao modal, ou seja, de:

$\neg \Box p \leftrightarrow \Diamond \neg p$  onde a formula  $\neg \neg \Diamond \neg p$  que aparece em  $\neg \Box p \leftrightarrow \neg \neg \Diamond \neg p$  e simplificada para  $\Diamond \neg p$ .

## Considerações finais.

Um das questões mais freqüentes ao se realizar um trabalho em filosofia que envolva demasiadamente a lógica formal é: Qual é a relação disso com a filosofia? Ou em outras palavras, o que faz um sistema de lógica formal algo mais do que um mero jogo?

Não sei como posso dar uma resposta a essa questão que me satisfaça, mas posso apontar algumas candidatas.

Em primeiro lugar não vejo problemas em se considerar a lógica como um “mero jogo” uma vez que a própria filosofia também pode ser taxada como um “mero jogo”. Assim se tomarmos o que está colocado acima, tanto a filosofia quanto a lógica formal pertenceriam à uma categoria de “mero jogo”. O que viria ao caso, então, seria a relação que poderia haver entre filosofia e lógica formal.

A pesar de existir essa possibilidade a saber: a de taxar a filosofia como um “mero jogo” acredito que ela queira ser algo mais, quer dizer, algo que não tenha valores apenas com relação às regras desse jogo. Para fazer isso, é necessário que a filosofia possa dizer não exatamente tudo, mas pelo menos algo. Para dizer algo que tenha alguma relevância é preciso uma linguagem que se permita uma utilização filosófica. A lógica formal aparece aqui, então, como uma ferramenta da linguagem que está sendo utilizada pela filosofia.

Para se fazer uma pequena analogia, tomemos a seguinte comparação: a lógica formal é como um satélite que rasteia e faz um mapeamento da área sobre a qual se quer fazer alguma construção que tenha “valor”.

A área mapeada neste trabalho é uma área já muito cultivada chamada de metafísica. Dessa área fizemos um recorte para que, em sua extensão não houvesse desorientação. Um outro recorte então foi feito, porém esse segundo recorte não foi bem um recorte mas sim mudança na lente do satélite, a saber: Ao invés de vermos o terreno como algo base para uma construção o vimos como um terreno fértil para a plantação. Portanto a analogia ficou assim:

1° A terra seria a filosofia.

2° A área geográfica a ser estudada foi a metafísica.

3° O objeto usado foi um satélite chamado Lógica formal.

4° As lentes usadas no satélite para tirar as fotografias da área escolhida foi da marca “sistemas modais fracos”.

Feita então essa analogia meio tosca para uma consideração acerca da metodologia da orientação do assunto aqui trabalhado, voltemos ao cerne da questão.

O cerne da questão a que me refiro aqui é aquela pulga pragmática que fica atrás das orelhas das orientações mais práticas e que coçam no seguinte sentido:

Para que fazer um trabalho desses? Ou melhor, para que trabalhar com sistemas modais fracos?

Mas antes dessa questão mais específica há outras mais gerais que quando respondidas me ajudariam quanto a questão acima. Essas perguntas são as que se seguem abaixo e vão na mesma linha da pulga referida acima:

Porque a filosofia?

Desculpe-me mas essa não precisa ser respondida.

Porque a metafísica?

Porque é impossível não se interessar por metafísica.

Porque a lógica formal?

Por causa do rigor.

E por fim:

Porque sistemas modais fracos?

Para responder essa questão não poderei usar satisfatoriamente uma única linha.

A última das questões postas acima é o principal motivo dessas considerações finais. Terei portanto que argumentar sobre a importância deste tema (sistemas modais fracos) no âmbito da filosofia.

Os sistemas modais em geral são sistemas básicos para a lógica intensional, sua estruturação pode, com algumas alterações, servir para as mais diversos tipos de lógicas intensionais como por exemplo, a lógica do tempo ou a lógica epistêmica.

Neste trabalho em especial foram visados dois campos importantes da filosofia, um (mais explicitamente) deles foi o campo ontológico e outro (mais implícito) foi o campo epistêmico.

No campo ontológico tive como motivação a seguinte pergunta:

Qual ontologia refletiria melhor o real estado de coisas?

Note-se desde já que tal pergunta nos remete a uma visão metafísica mais tradicional onde haveria uma ontologia mais adequada dentre todas as outras sendo esta portanto “ ‘a’ ontologia”. O presente trabalho tende a mostrar, através de diferentes sistemas, que podemos considerar diversas ontologias possíveis com relação à modalidade das coisas, além de mostrar também quais as características das proposições da lógica clássica (tautologias e contradições em especial) a partir de cada um desses sistemas (ou estruturas ontológicas).

Dado que foi dito acima, não seria estranho que viesse uma voz quineana do além dizendo que os sistemas modais estariam comprometidos com paisagens não desérticas<sup>6</sup>. Essa acusação é aceitável, porém refutável. É aceitável pois uma posição ontológica que trate apenas de objetos atuais parece ter uma ontologia menos povoada que uma posição na qual, além de objetos atuais temos também objetos possíveis ou necessários. Essa aparência se justificaria pelo argumento quineano do compromisso ontológica de uma teoria onde: “ser é ser o valor de uma variável”.

Porém não é assim que acontece e é por isso que podemos refutar tais acusações quineanas.

A acusação de Quine não leva em consideração a diversidade de sistemas modais que podemos construir. Assim para cada sistema modal poderemos ter uma posição ontológica diferente no qual a própria existência desses fatos passa a ser relativa aos sistemas que se está utilizando para analisá-lo. Assim o compromisso ontológico dos operadores modais também passa a ser relativo ao sistema usado. Todavia isso não significa que o argumento de Quine é de todo

---

<sup>6</sup> “O universo sobre povoado de Wyman é, de diversas maneiras, desagradável. Para nós, que gostamos de paisagens desertas, ele ofende o sentido estético”. (Quine. *sobre o que há em existência e linguagem* pg. 23) Ou ainda. “A possibilidade – juntamente com as outras modalidades de necessidade, impossibilidade e contingência – levantam problemas que não quero aqui sugerir que devam ser ignorados” (idem, pg. 24)

inválido. Temos que considera-lo à luz dos diversos sistemas modais para que possamos tirar conclusões acerca de quais sistemas estariam de acordo com o padrão quineano de qualidade (PQQ).

Desta forma, se tomarmos uma ontologia baseada por exemplo no sistema S3, teremos uma ontologia mais “gorda” do que se fosse baseada em um sistema fraco como C2. A questão então que surge de uma discussão nesta linha de raciocínio é a seguinte:

Pode um sistema modal ter um compromisso ontológico mais fraco do que o compromisso ontológico de um sistema proposicional clássico?

Não poderei responder a essa questão de forma completa neste trabalho, todavia fica uma proposta de trabalho futuro do qual posso apenas citar algumas “idéias” para argumentação.

Primeiramente é preciso ter em mente que em um sistema modal não quantificado (como são os sistemas tratados nesta monografia) possui noções existenciais somente no âmbito de uma metalinguagem. É portanto na metalinguagem que deveremos focalizar uma pesquisa acerca do compromisso ontológico de um sistema modal não quantificado.

Em segundo lugar, devemos precisar o conceito de “mundos possíveis” onde os objetos que povoarão tais mundos podem tanto ser objetos atuais em novas “posições” quanto objetos não atuais mas que podem ser atualizados. Assim para uma argumentação que defenda uma estética da “magreza” ontológica para os sistemas modais em relação aos argumentos quineanos, poderíamos ter a seguinte orientação: a) Comparar o compromisso ontológico metalingüístico de um sistema modal fraco com o de uma lógica proposicional clássica. b) Considerar o conceito de mundos possíveis como coisas que só podem conter objetos atuais, onde a não atualidade de tal objeto signifique apenas uma não atualidade de posição.

A partir então da orientação vista acima teríamos uma questão mais estrutural acerca da posição quineana frente a uma lógica modal, a saber:

Dado uma semântica de mundo possível que considere esses mundos possíveis como sendo reconfigurações de objetos de um mundo atual, em que

sentido poderíamos ainda acusar a lógica modal de possibilitar a engorda de uma ontologia já que o número de objetos permanecem o mesmo mudando apenas as suas relações entre si?

Um outro ponto a que me dispus a tratar nesta parte da dissertação é acerca das relações entre a lógica modal e a lógica epistêmica.

Como sabemos, a lógica epistêmica possui uma estrutura muito semelhante à lógica modal. Portanto, ao se fazer um estudo sobre sistemas modais é interessante pensar as conseqüências desses estudos para lógica epistêmica. No caso dos sistemas aqui estudados poderemos fazer importantes considerações acerca de agentes epistêmicos relacionados aos sistemas epistêmicos análogos.

Agentes epistêmicos são seres que possuem as mesmas características epistêmicas de um determinado sistema epistêmico, assim, se uma determinada fórmula é válida em um sistema  $S$ , então o agente epistêmico  $S$  conhecerá  $\varphi$ . Portanto o agente epistêmico conhece todas as fórmulas válidas de um sistema.

A importância de se estudar sistemas modais fracos para a lógica epistêmica recai portanto na consideração de agentes epistêmicos fracos. Os agentes epistêmicos fracos são os que melhor representa a condição humana de conhecimento uma vez que os agentes epistêmicos mais fortes são quase sempre Deuses oniscientes acerca de certos tipos de fórmulas.

## **Referência Bibliográfica**

**HUGHES, G. E. e CRESSWELL, M. J. A new introduction to modal logic. Routledge1996.**