O problema dos futuros contingentes e as lógicas modais

Samir Bezerra

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE FILOSOFIA E
CIÊNCIAS HUMANAS DA
UNIVERSIDADE DE CAMPINAS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM FILOSOFIA (ÁREA DE LÓGICA)

Orientador: **Prof. Dr. Walter A. Carnielli**

Durante a elaboração deste trabalho
o autor recebeu apoio financeiro do meu vô.

27 de dezembro de 2006

Dedico aos sem tese

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr.Walter Carnielli.

Resumo

O presente trabalho analisa questões referentes à expressabilidade das linguagens modais e multimodais com relação a certas perspectivas filosóficas. Serão levados em conta as idéias aristotélicas, diodoréias e filonianas sobre a interação entre modalidades aléticas e temporais. Alguns teoremas e metateoremas do sistema minimal temporal K_t serão apresentados e discutidos além de resultados como incompletude do sistema multimodal MA que é apresentado em [Whi84]. Será feita, também, uma brave exposição da lógica da necessidade histórica assim como encontramos em [Gab94]. O objetivo deste trabalho será identificar possíveis formalizações para a idéia de que o passado é necessário e o futuro possível. Cosideraremos ainda alguns sistemas multimodais cf [Car00] e alguns sistemas entre S4 e S5 cf [Pri67] e [Byr78].

Sumário

Introdução

O presente trabalho é relacionado ao problema lógico dos futuros contingentes. O principal objetivo é possibilitar o discurso lógico envolvendo tempo e modalidades aléticas. Uma primeira idéia é criar um sistema que ajude a solucionar a questão da negação da bivalência no tratamento aristotélico dos futuros contingentes. Isso para não cairmos no necessitarismo lógico por um lado e por outro para poder trabalhar um aspecto a mais em lógica, ou seja o discurso temporal ou de mudança temporal. Tal sistema deverá ser modificável ou automodificável. Isso porque o universo lógico parece mudar com o tempo. Assim o problema posto sobre o valor de verdade de sentenças que remetam aos futuros contingentes seria resolvido se mostrassemos como deve-se trabalhar tais sentenças (com relação ao seu valor de verdade). Aristoteles considera o valor de verdade a partir da correspondencia que uma idéia tem com a realidade. O futuro como não existe ainda não pode ser objeto de correspondência. Daí que uma sentença que fale sobre algo que não existe não pode ser nem verdadeira nem falsa (pois não existe neste caso uma realidade a qual possa ser comparada a idéia exposta na sentença e portanto esta não pode discordar ou concordar). Porem certas senteças desse tipo podem vir a ter uma correspondência bastando que o objeto de correspondência desta venha a existir. Portanto tais objetos tem que ser logicamente possíveis. O sistema para tratar pois, de tais sentenças, deveria ser tal que pudesse modificar seus valores de verdade a medida que objetos vinhesse a existir ou deixasse de existir. Portanto esse sistema deveria "aprender"e "esquecer". Quando enuncio "haverá uma batalha naval amanhã"não posso ter já um valor de verdade associado pois não tenho também o objeto correspondente ou seja o "amanhã". Isso se dá porque estou falando sobre algo que ainda não existe. Mas deverá existir. É possível que haja um amanhã e por isso é possível que a sentença sobre a batalha naval tenha um valor de verdade associado. Este valor de verdade que poderá ser associado portanto só poderá de fato ser associado se houver um amanhã. Pois se digo haverá uma batalha naval amanhã e o amanhã não vier a ser jamais então não posso dizer se o que foi proferido tinha ou não algum sentido (ou valor de verdade associado). Posso dizer também que se tomo tal sentença como fixa ela jamais terá um valor de verdade associado. Se eu escrevo hoje "haverá uma batalha naval amanhã"em um papel qualquer, posso pensar que deverei esperar até amanhã para verificar o seu valor de verdade, porem amanha quando eu for ler o papel o que estará escrito nele? "haverá uma batalha naval amanhã"e daí que jamais terei chances de verificar o valor de verdade desta sentença. Portanto o sistema lógico que trate de tais sentenças deve modificar de acordo com as modificações do tempo e portanto ser coerente com a mudança. Penso que algo como os operadoes bola da lógica paraconsistentes pudessem ser úteis na construção de tal sistema. Uma outra possibilidade é dizer que proposições sobre o futuro tem valores no futuro, proposições sobre o presente tem valores no presente etc. Porem neste caso taríamos relativizando a lógica ao tempo, o que não parece ser muito bom a primeira vista.

Samir Gorsky

Capítulo 1

Considerações históricas

1.1 Introdução Histórico filosófica

1.1.1 Tempo e modalidades aléticas.

O conceito de necessidade ('ananke' em Grego, 'Necessitas' em latim e Notwendkeit em alemão) aparece pela primeira vez na literatura filosófica no seguinte fragmento de Anaximandro:

"ex hõn dè he génesís esti tois oûsi kaì tèn phthoran eis taûta gínesthai katà tò khereón; didónai gàr autà díken kaì tísin allélois tês adikías katà tèn tou khrónou táxin.De onde as coisas tiram o seu nascimento; de fato, reciprocamente pagam a pena e a culpa da injustiça, segundo a ordem do tempo."

nietzsche traduz assim:

"De onde as coisas têm seu nascimento, para lá também devem afundar-se na perdição, segundo a necessidade; pois elas devem expiar e ser julgadas pela injustiça, segundo a ordem do tempo."

Cavalcante de Souza, assim:

"...princípio dos seres...ele disse (que era) o ilimitado...pois donde a geração é para os seres, é para onde também a corrupção se gera segundo o necessário; pois concedem eles mesmos justiça e deferência uns aos outros pela injustiça, segundo a ordenação do tempo."

Note-se que tanto o conceito de necessidade quanto o conceito de tempo aparecem no fragmento. Essa deve ser também a primeira vez que temos o uso do conceito de tempo na literatura filosófica. É de fato curioso que tais conceitos apareçam juntos em um mesmo fragmento quando estes são usados pela primeira vez com relação aos textos pré-socráticos (dentre aqueles que temos acesso hoje em dia). Portanto é natural pensarmos uma relação entre tais conceitos em seus usos primitivos.

Segundo Reale [Reale; 1993 p. 55] há uma ligação entre nascimento e dissolução com culpa e injustiça, e da necessidade com a expiação desta culpa. O tempo é tomado como juiz para com a injustiça da imposição dos contrários. (outros pré-socráticos apesar de usarem o termo necessidade não os da um desenvolvimento assim como o faz Anaximandro).

No âmbito da cultura grega, o conceito de necessidade tem seu principal desenvolvimento filosófico com a obra de Aristoteles. O significado mais geral de necessidade encontrado nos escritos do peripatético é o que define necessidade como aquilo que tem que ser assim e não pode ser de outra maneira. Essa definição aparece na Metafísica (1015a e 1015b) [Aristotle].

Necessidade é um conceito modal. Há na obra aristotélica um grande desenvolvimento sobre conceitos modais aléticos, ou seja, aqueles que tratam do modo como a verdade está sendo entendida. As sentenças nesse caso podem ser verdadeiras por necessidade ou não, ou serem apenas "possivelmente"verdadeiras, em outros casos ainda dizemos algo como "contigentemente"verdadeira. Uma importante referência com relação aos estudos sobre as modalidades aléticas tratadas por Aristóteles é a obra de Jaako Hintikka: Time and necessity. Como o próprio título da obra indica, Hintikka faz um estudo das interrelações entre modalidades aléticas e modalidades do tempo (passado, futuro etc.) na obra do estagirita.

Aristóteles distingue diferentes tipos de potendialidades em [Met. Δ, 12]. Observa-se também que há um contraste de potenciais. Alguns fatos potenciais são chamados assim porque são fontes de mudanças ou movimento. Outras potencialidades não envolvem relação com o movimento. [ver início de Met. Θ, 6]. Da mesma forma há um contraste entre possibilidade que envolve mudança e possibilidade que é equivalente à "não necessariamente falso". Assim temos uma diferença entre possibilidade própria e contingência.

Outra questão interessante é sobre o valor de verdade das sentenças que envolvem a noção de tempo. Os termos que costumam gerar incomodos lógicos se refere ao tempo presente. O problema está na variação do valor de verdade de palavras ou expressões como "agora"ou "nesse instante". Por exemplo, uma frase como "agora está chovendo"deverá ser considerada incompleta com relação ao seu valor de verdade por este não estar determinado univocamente.

As frases modais temporais podem ser divididas em duas classes: as definidas e as indefinidas. As definidas estão formuladas como datas e as indefinidas com noções abertas de temporalidades, ou seja, termos como "agora", "é dia", "hoje"etc.

As noções modais aléticas em Aristóteles são as vezes relacionadas de certa forma com as noções modais temporais. Essa relação entre tempo e necessidade diferencia o modo como os antigos entendiam a necessidade do modo como os modernos a entendem. Aristóteles ainda diferencia o "necessário´´ (apodítico) e as verdades gerais (assertóricos), ou seja entre necessidade e universalidade. [Aristóteles; Reth. III 141 8^a 3 - 5; Eth. Nic. VI 2. 1139^b 7 - 9; De Caelo I 12283^b 13ss] [Hintikka; Time and Modality cap IX]

Há uma acepção sobre a interrelação do temporal e do alético que, indiscutivelmente, tem desempenhado um papel muito mais importante na história do pensamento ocidental - na história da metafísica, teologia, lógica, filosofia da natureza e mesmo poesia especulativa - que qualquer outra acepção com respeito a seus relacionamentos. Essa acepção é a de que algo que é possível tem que ser realizado em algum ponto do tempo (no passado, no presento ou no futuro). [Hintikka; Time and Modality] [Moderns studies in philosophy: Leibiniz; Leibniz on plenitude, relations and the "reign of law´´] [Arthur O. Lovejoy; "The principle of plenitude"]. Essa acepção ganhou o nome de peincípio da plenitude.

O historiador das idéias, Arthur O. Lovejoy, foi o primeiro pensador moderno a discutir filosoficamente este importante princípio. Agostinho trouxe este princípio dos neo-platônicos para a teologia cristã primitiva. O argumento ontológico de Anselmo usa a implicação do princípio para mostrar que a natureza deve ser tão completa quanto possível, e argumenta sobre a existência de uma perfeição no sentido de uma "completude"da natureza. A crença de Tomás de Aquino na plenitude de deus conflita com a crença de que deus tem o poder de não criar tudo o que pode ser criado, e portanto rejeita o princípio. A insistência de Giordano Bruno sobre a infinidades de mundos não foi baseada nas teorias de Copernico, ou na observação, mas na aplicação desse principio a deus. Leibniz acreditava que o melhor dos mundos possíveis atualizava todas as possibilidades genuinas e argumentou, na Teodicéia, que o melhor dos mundos possíveis contém todas as possibilidades e que por termos apenas uma experiencia finita da eternidade não podemos chegar a um termo sobre disputas envolvendo a perfeição. Kant acreditava neste princípio mas não em sua verificação empírica.

O "Infinite monkey theorem"e a lei zero-um de Komogorov, formulados por matemáticos contemporâneos, ecoa o princípio da plinitude. Pode-se ver também que tal princípio ajuda a sustentar posições em física contemporânea especificamente a interpretação dos muito-mundos da mecânica quântica e as especulações cornucopianas de Tipler Frank do estado final do universo.[Lovejoy, A. O., 1957 (1936)."Plenitude and Sufficient Reason in Leibniz and Spinoza"in The Great Chain of Being, A Study of the History of an Idea, 1933. Harvard UP: 144-82.] [Erkka Maula; Plato on plenitude, 1967 12-50].

Formailização do peincípio da plenitude: Cada possibilidade é realizada em algum momento do tempo.

Seja T a formulação deste princípio de modo a estar de acordo com as intenções de Aristóteles. Assim temos:

(T) Nenhuma possibilidade genuina permanece inatualizada durante toda a infinidade do tempo.

$(T)_1$ O que nunca é, é impossível.

$(T)_2$ O que sempre é, é por necessidade.

1.1.2 Necessidade e espaço

A noção de necessidade pode ser descrita como relacionada à noção de espaço da seguinte maneira: Algo é necessário se acontece em todos os pontos do espaço.Esse tipo de relação pode ser interpretada de duas maneiras diferentes.

Por exemplo:

1)P é necessário sse P é possível em todo x tal que x é delimitação espacial, ou seja, o necessário é aquilo que pode acontecer em qualquer ponto do espaço.

2)P é necessário sse P acontece em x1 e para todo xi , P acontece em x1 , ou seja, o necessário é aquilo que acontecendo em um ponto do espaço, em todos os outros pontos do espaço será verdade que aquilo acontece naquele determinado ponto do espaço.

Outros conceitos aparecem subtendidos nas definições acima. São eles a Causalidade e o Tempo. Segundo algumas concepções da física a simultaneidade entre dois fatos depende do espaço entre eles. De fato a simultaneidade pode ser considerada possível apenas no âmbito reflexivo. Assim P só pode ser simultâneo (neste sentido) a ele mesmo. Isso acontece porque uma determinada informação de um determinado acontecimento pode se deslocar em velocidade da luz (no máximo). Assim dada qualquer extensão espacial entre dois acontecimentos, estes serão simultâneos se suas informações se cruzarem em um determinado ponto do espaço para o qual ambas as informações tenham percorrido um determinado espaço e que estes percursos tenham sido coberto em um mesmo intervalo de tempo. Daí podemos deslocar a questão da simultaneidade para a questão do encontro de informações ou do tempo de percurso de informações. Sendo assim, um acontecimento P seria simultâneo a um acontecimento Q sse o tempo T que a informação de P levou para cruzar com a informação Q fosse igual ao tempo que a informação de Q levou para se encontrar com a informação de P. Esse deslocamento da questão de simultaneidade nos trás novamente a suposição anterior de reflexividade. Se consideramos o ponto de cruzamento das informações, este será simultâneo a si mesmo (pois este ponto é único). Se considerarmos o intervalo de tempo então a simultaneidade será resultado da reflexividade deste intervalo de tempo com relação a si, ou seja, o intervalo de tempo considerado será simultâneo a si mesmo. Assim a simultaneidade de dois fatos se reduzem a simultaneidade do intervalo de tempo que as informações destes fatos levam para percorrerem o percurso até que essas informações se encontrem e essa simultaneidade é a reflexividade deste intervalo de tempo.

Uma outra coisa que influencia a existência de fatos com relação a outros é a função espaço/tempo existentes entre eles. Um Fato F só pode existir para F1 em um tempo T se há uma interseção nas funções espaço/tempo entre ambos. Isso se dá porque a informação de F deve chegar a F1 antes que F1 desapareça. Daí o tempo que a informação levará para percorrer todo o espaço de F a F1 será fundamental para determinar a existência de F para F1.

1.1.3 Tempo e movimento

Quais relações podemos ter entre tempo e causalidade?

Tendo em mente que o conceito de causalidade tem uma certa ligação com a idéia de movimento, podemos também considerar a questão acima com outro enfoque: Qual(quais) a(s) relação(ões) entre tempo e mudança?

De imediato vemos que esses conceitos são fortemente ligados entre si. Mas daí a dizer que são o mesmo conceito é um salto. Pode haver tempo (duração) sem que qualquer mudança ocorra?

A resposta aristotélica a essa pergunta é negativa. Para Aristóteles o tempo é definido em termos de mudança. Por outro lado é trivial que mudança envolva tempo, e daí isso não é posto em questão. Há um artigo de 1969 de Sydney Shoemaker (Time whitout change, the journal of philosophy, LXVI, 1969) no qual encontra-se um forte argumento em favor da possibilidade lógica do tempo sem a mudança. O grande problema que envolve tal coisa (tempo sem mudança) é que seria impossível para qualquer pessoa perceber ou ter consciência desse fato (para algo ser percebido deve haver pelo menos movimento no cérebro do sujeito que percebe). O problema que surge aqui é saber se a possibilidade lógica implica uma possibilidade material, e se tal implicação poderia ser demonstrada logicamente.

O método para se provar a possibilidade lógica do tempo sem mudança é pois indireto.

1.1.4 Modalidades Diodoréias

1.1.5 Prior e a lógica temporal

Arthur Prior foi um dos pioneiros a trabalhar lógicas intencionais para a lógica temporal (tense logic). Ele inventou a lógica temporal e foi o principal teórico do movimento para aplicar a sintaxe modal em uma grande variedade de fenômenos. Prior e Carew Meredith dividiram uma versão da semântica dos mundos possíveis vários anos antes de Kripke publicar seu primeiro paper neste tópico.

A mais significante realização de Prior foi sem dúvida alguma a invensão e o desenvolvimento da lógica temporal. Suas primeiras citações sobre a lógica das distinções-tempo esta no penúltimo capítulo de seu manuscrito não publicado "The Craft of Formal Logic"(completado em 1951). Seguindo o que von Wright fez para a "lógica deôntica"Prior observou que há outros grupos de predicados modais alem dos modos "aléticos"de necessidade e possibilidade. Prior refere a essas modalidades não-aléticas como "quasi-modais". Após notar que Pedro da Espanha classifica distinções adverbiais de tempo como modos ele diz (p. 750):

"That there should be a modal lógic of time-distinctions has been suggested in our own day by Professor Findlay."

O artigo de Findlay "Time: A treatment of Some Puzzles"apareceu no Australasian of psychoplogy em 1941. Prior tornou-se ciente dele através do seu aparecimento na coleçãp de Flews Essays on logic and Language, que chegou em Nova Zelândia justamente quando Prior estava escrevendo o capítulo final do The Craft of formal Logic. O Caulculo temporal inclui proposições óbvias como:

x presente sse (x presente) presente.

x futuro sss (x futuro) presente sse (x presente) futuro.

Mais a seguinte condição:

(x) (x passado) futuro.

Isto é, todos eventos passado, presente e futuro serão passados. O artigo "Three-Valued Logic and Future Contingents"de Prior apareceu no Philosophical Quartely em 1953 e foi o primeiro artigo dele em lógica temporal. Uma antiga questão do pensamento escolástico versa sobre uma expressão do tipo "Sócrates está sentado"ser completa. Para Prior, porem, tal expressão seria incompleta até que fosse suprimida uma informação relativa ao tempo cronológico da expressão. Daí que não se pode falar em mudança do valor de verdade de uma sentença com relação a passagem do tempo. O tema crucial com relação a filosofia de Prior é a idéia de que algumas proposições podem ser verdadeiras em um tempo e falsas em outro. Mais tarde Prior escreveu:

"Certainly there are unchanging truths, but there are changing truths also, and it is a pity is logic ignores these, and leave it...to comparatively informal "dialecticians"to study the more "dynamic"aspects of reality. (Prior 1996a: 46).

O exemplo da sentença "sócrates está sentado"aparece também nas considerações de Aristóteles sobre o tempo. Para o estagirita, algumas sentenças sobre o futuro podem ser indeterminadas, ou seja, elas não são falsas nem verdadeiras quando proferidas, pois poderia não haver ainda fatos com os quais tal sentença concordasse ou discordasse. Prior então cita Aristóteles por acreditar que existam tais eventos (De Interpretatione, Cap. 9): se não houvesse "there would be no need to deliberate so take trouble, on the supposition that if we should adopt a certain course, a certain result would follow, while, if we did not, the result would not follow"(1953: 232-3). Daí que o interesse de Prior em lógica temporal estivesse ligado à sua crença na existência de uma liberdade real. (veja Prior 1996b).

Mais de trinta anos antes, inspirado por essas mesmas passagens ukasiewicz planejou um calculo de três valores no qual o valor $\frac{1}{2}$ era atribuído às proposições que denotavam os futuros contigentes. Prior tomou conhecimento deste calculo ao ler o trabalho de Jordan intitulado "The Development of Mathematical Logic and of Logical Positivism in Poland Between the Two Wars". O artigo de 1953 "Three -Valued Logic and Future Contingents".

Referência Bibliográfica

[Aristotle] ARISTOTLE. Metafisica. Ed. trilingüe por: Valentín Garcia Yebra.

[Hintikka; 1973] HINTIKKA, Jaakko. Time and Necessity; studies in Aristotle's theory of modality. Oxford at the Clarendon press. 19973, reimpresso, em 1975.

[Long] LONG, A. A. ed. Early Greek philosophy (Compagnion).

[Pizzi, 1995] PIZZI, Claudio. Time whitout change: a logical analysis. In Espaço e tempo (F. R.R. Évora, ed.) pp 132-53. Coleção CLE, Vol. 15, 1995.

[Reale 1993] REALE, Giovanni. História da filosofia antiga. (tradução: Marcelo Perine). São Paulo: Loyola, 1993. (série história da filosofia).

[Barnes 1995] BARNES, Johanes. Ed. The Cambridge compagnion to Aristotle. Cambridge University Press, 1995.

[Prior 1996b]

Referências na Web

http://plato.stanford.edu/entries/prior/ http://en.wikipedia.org/wiki/Principle-of-plenitude

1.2 Noções de lógica modal

Nesta seção será apresentado algumas definições e operações básicas em lógica modal cf.[Venema 2002].

Definiçôes 1:

a) Enquadramento.

Um Enquadramento para a liguagem modal básica é um par $\mathfrak{F}$ = (W, R) tal que:

i) W é um conjunto não vazio.

ii) R é uma relação binária em W.

b) Modelo.

Um modelo para a linguagem modal básica é um par $\mathfrak{M}$ = ($\mathfrak{F}$, V), onde $\mathfrak{F}$ é um enquadramento para a linguagem modal básica e V é uma função que associa um subconjunto V(p) de W para cada variável proposicional p em Φ. Formalmente, V é uma função $V : \Phi \rightarrow P(W)$, onde P(W) denota o conjunto das partes de W. Informalmente podemos pensar V(p) como sendo o conjunto de pontos em nosso modelo onde p é verdadeiro. A função V é chameda *valoração.* Dado um modelo $\mathfrak{M}$ = ($\mathfrak{F}$, V), nó dizemos que $\mathfrak{M}$ é baseado no enquadramento $\mathfrak{F}$, ou que $\mathfrak{F}$ é o enquadramento subjacente a $\mathfrak{M}$.

c) Verdade em $\mathfrak{M}$.

Suponha que w é um estado em um modelo $\mathfrak{M}$ = (W, R, V). Definimos indutivamente a noção de uma fórmula φ ser verdadeira em $\mathfrak{M}$ em um estado w da seguinte forma:

$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ sse $w \in V(p)$, onde $p \in \Phi$
$\mathfrak{M}, w \Vdash \perp$ nunca
$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ sse não $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ou $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$
$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ sse para algum v $\in$ W tal que Rwv, $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$
$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ sse para todo v $\in$ W tal que Rwv, $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

d) Globalmente verdadeiro em um modelo $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \Vdash \varphi$)

Uma fórmula φ é globalmente verdadeira em um modelo $\mathfrak{M}$ (notação: $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$)se for satisfeita em todos os pontos (mundos) em $\mathfrak{M}$, ou seja, se $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, para todo w $\in$ W.

e) Satisfactível

Uma fórmula φ é satisfactível em um modelo $\mathfrak{M}$ se há algum ponto em $\mathfrak{M}$ para o qual φ é verdadeira.

f) Falsificável ou Refutável

Uma fórmula é falsificável ou refutável em um modelo se sua negação é satisfactível.

Obs: Qualquer fórmula precedida por $\Box$ será verdadeira em qualquer ponto final de qualquer modelo.

Notação:
Escrevemos $\Diamond^n\varphi$ para φ precedido por n ocorrências de $\Diamond$ e $\Box^n\varphi$ para φ precedido por n ocorrências de $\Box$.

Pode-se, se assim for o caso, associar cada um desses operadores definidos com suas próprias relações de acessibilidade. Portanto, temos indutivamente que:

R^0xy é definido indutivamente como $x = y$
$R^{n+1}xy$ é definido indutivamente como $\exists z(Rxz \wedge R^nzy)$

Sob essa definição, para qualquer modelo $\mathfrak{M}$ e ponto w em $\mathfrak{M}$, vale $\mathfrak{M}, w, \Vdash \Diamond^n\varphi$ sse existe um v tal que R^nwv e $\mathfrak{M}, w, \Vdash \Diamond\varphi$.

g) Tipo de Similaridade Modal

Um tipo de similaridade modal é um par $\tau = (O, \rho)$ onde O é um conjunto não vazio e ρ é uma função $0 \rightarrow$ N. Os elementos de O são chamados operadores modais, usa-se $\triangle$ (”triângulo”), $\triangle_0, \triangle_1$,..., para denotar elementos de O. A função ρ associa para cada operdaor $\triangle \in O$ uma aridade finita, indicando o número de argumentos para o qual $\triangle$ pode se aplicado.

h) Lingugagem modal

Uma linguagem modal $ML(\tau, \Phi)$ é construida a partir de um tipo de similaridade modal
$\tau = (O, \rho)$ e de um conjunto de letras proposicionais Φ.
O conjunto $Form(\tau, \Phi)$ de fórmulas modais sobre τ e Φ é dado pelas seguintes regras de formação.

$\varphi := p \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \triangle(\varphi_1, ..., \varphi_{\rho(\triangle)})$

Onde p varia sobre os elementos de Φ

Obs: o tipo de similaridade da linguagem modal básica é τ_0

i) Operadores duais

Definição de operadores duais para triângulos não nulos.
Para cada $\triangle \in O$ o dual ∇ de $\triangle$ é definido como:
$\nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n) := \neg\triangle(\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n)$

Obs: O dual de um triângulo de aridade no mínimo 2 é chamado de "nabla".

j) τ-enquadramento

Seja τ um tipo de similaridade modal. Um τ-enquadramentos é uma n-upla $\mathfrak{F}$ consistindo dos seguintes ingredientes:

i) Um conjunto não vazio W
ii) Para cada $n \geq 0$, e cada operador modal n-ário $\triangle$ no tipo de similaridade τ, uma relação $(n+1)$-ária $R_\triangle$

Enquadramentos são simplesmente estruturas relacionais. Se τ contém somente um número finito de operadores modais $\triangle_1, ..., \triangle_n$ então o enquadramento pode ser denotado por $\mathfrak{F} := (W, R_{\triangle_1}, ..., R_{\triangle_n})$; caso o número de operadores modais seja infinito denota-se $\mathfrak{F} := R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ ou $\mathfrak{F} := (W, \{R_\triangle : \triangle \in \tau\})$. Tal enquadramento pode ser transformado em um modelo da mesma maneira em que é feito na linguagem modal básica, ou seja, adicionando uma valoração. Desta forma, um τ-modelo é um par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ onde $\mathfrak{F}$ é um τ-enquadramento, e V uma valoração com domínio Φ e contradomínio P(W), onde W é o universo de $\mathfrak{F}$.

Define-se a satisfação ou verdade de uma fórmula φ em um ponto (estado, ou mundo) w, em um modelo $\mathfrak{M} = (W, \{R_\triangle : \triangle \in \tau)$ (notação: $\mathfrak{M}, w, \Vdash \varphi$) indutivamente da seguinte maneira.

i) As cláusulas para os casos atômicos e booleanos são os mesmos que os definidos para a linguagem básica modal.

ii) Para $\rho(\triangle)$ 0 define-se:

$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sse para algum $v_1, ...v_n \in W$ com $R_\triangle wv_1, ...v_n$ tem-se, para cada i, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i$

$\mathfrak{M}, w \Vdash \nabla(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sse para todo $v_1, ...v_n \in W$ com $R_\triangle wv_1, ...v_n$ tem-se, para cada i, $\mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i$

Quando $\rho(\triangle) = 0$ (quando $\triangle$ é uma modalidade 0-ária) então $R_\triangle$ é uma relação unária e:

$\mathfrak{M}, w \Vdash \triangle$ sse $w \in R_\triangle$

Assim uma modalidade 0-ária não acessa outros pontos (estados ou mundos). Com efeito, sua semântica é identica àquela da variável proposicional, salvo que a relação unária é usada para interpretá-la e não é dada pela valoração mas sim são partes do enquadramento subjacente.

Frequentemente escreve-se $w \Vdash \varphi$ para $\mathfrak{M}, w \vdash \varphi$ quando $\mathfrak{M}$ é claro no contexto. O conceito de verdade global (ou universalmente verdadeiro) em um modelo é definido como na linguagem modal básica e significa simplismente verdadeiro em todos os mundos do modelo.

Definiçôes 2:

a) R_P é a relação conversa de R_F

$\forall xy(R_F xy \leftrightarrow R_P yx)$
A conversa de uma relação R é denotada por $R^\vee$

b) Enquadramento Bidirecional

Um enquadramento da forma $(T, R, R^\vee)$ é chamado de enquadramento bidirecional e um modelo construido sobre tal enquadramento de modelo bidirecional.

Enquadramentos e Validade

As linguagens modais podem ser vistas como ferramentas para se falar sobre modelos.

a) Validade em um ponto (ou mundo) w ($\mathfrak{F}, w \Vdash \varphi$)

Uma fórmula φ é válida em um ponto (ou mundo) w de um enquadramento $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F}, w \Vdash \varphi$)se φ é verdadeiro em w para todo modelo $(\mathfrak{F}, V)$ baseado em $\mathfrak{F}$.

b) Válido em um enquadramento $\mathfrak{F}$ ($\mathfrak{F} \Vdash \varphi$)

φ é válido em um modelo $\mathfrak{F}$ (notação: $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$) se é válido em todo ponto (ou mundo) em $\mathfrak{F}$.

c) Válido em uma classe de enquadramentos

Uma fórmula φ é válida em uma classe de enquadramentos F (notação $F \Vdash \varphi$) se é válida em todo enquadramento $\mathfrak{F}$ em F.

d) Validade

Uma fórmula φ é válida (notação: $\Vdash \varphi$) se é válida na classe de todos os enquadramentos.

e) Lógica de F (Λ_F)

O conjunto de todas as fórmulas que são válidas em uma classe de enquadramentos F é chamado a lógica de F (notação: Λ_F).
Assim $\Lambda_F = \{\varphi \in Form(\tau, \Phi : F \Vdash \varphi\}$

Enquadramentos Gerais

a) Enquadramento geral $(\mathfrak{F}, A)$

Um enquadramento geral $(\mathfrak{F}, A)$ é um enquadramento $\mathfrak{F}$ junto com uma restrita, mas bem-comportada e apropiada coleção A de valorações admissiveis.

b) Bem-comportada e Apropiada Coleção de valorações

É uma coleção de valorações fechadas sob as operações de conjuntos correspondetes a nossos conectivos e operadores modais.

1.2.1 Multimodalidade

Se indentificarmos o passado com o necessário teremos o seguinte caso:

P acontece em um ponto t co passado. Daí $\Box P$. $\neg P$ acontece em um outro ponto t_1 do passado. Daí $\Box\neg P$.

Portanto em t_2 posterior a t e t_1 o seguinte: $\Box P$ e $\Box\neg P$. Que é portanto um problema.

1. Enumerai uma lista de ítens.
2. Inserir marcador, isto é, uma bolinha preta na frente do parágrafo.
3. Outros

1.3 Enumerar uma lista de axiomas

A seguinte enumeração é obviamente auto-referente, porque o foi produzido usando-se a si mesmo...

Utilizamos o comando **description**, mas poderíamos utilizar o **enumerate**, como feito acima.

AX.1 $\vdash_{PC} \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

Ax.2 $\vdash_{PC} (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \lambda)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \lambda))$

Ax.3 $\vdash_{PC} ((\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi))$

1.4 Como referenciar e enumerar automaticamente teoremas, lemas, corolários, etc.

Os procedimentos abaixo são auto-explicativos.

Lema 1.4.1. *O* **label** *é utilizado para dar um código ao lema, teorema ou definição, para facilitar a referência no corpo do trabalho.*

Corolário 1.4.2. *Para citar um lema, teorema ou definição, basta digitar o código deste, dentro do comando* **ref** *.*

Demonstração. É imediato a partir do lema 1.4.1. $\Box$

Lema 1.4.3. $\vdash_{PC} (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$*)*

Demonstração. Vejamos:

1. $\vdash_{PC} ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ [Ax3]
2. $\vdash_{PC} (\neg\varphi \to \neg\varphi)$ [Lm 1.4.1]
3. $\vdash_{PC} ((\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi))$ [MP em 1 e 2]

$\square$

Capítulo 2

Aspectos Formais

o conceito "necessidade"pode definido de diversas formas:

a) Necessário é aquilo que não pode ser de outra maneira (grosso modo esta é a definição aristotélica).

b) Necessário é aquilo que é e será sempre o caso (grosso modo esta é a definição diodoréia)

c) Necessário é algo que acontece em todos os lugares (uma definição espacial de necessidade)

d) Necessário é aquilo que acontece sempre (no passado, no presente e no futuro) (esta é uma definição temporal de necessidade).

e) Necessário é aquilo que acontece sempre e em todos os lugares (uma definição de necessidade forte que mescla a necessidade do ponto de vista espacial e do ponto de vista temporal)

Em todas as definições acima temos também, mas de forma oculta, uma certa idéia de igualdade que constitui a noção de necessidade. Me parece que as várias maneiras diferentes de definir necessidade reflete as várias maneiras diferentes de definir igualdade. Por outro lado a noção de igualdade é constantemente usada pra contrapor a mudança (que é um conceito fortemente relacionado à temporalidade). Daí, podemos concluir que, em qualquer caso acontece uma relação entre modalidade alética e modalidades temporais. A questão é: É possível formalizar tal relação?

2.1 Modalidades Aristotélicas

Aristoteles trata em suas obras sobre lógica dos silogismos modais. O termo modal aparece para se referir aos modos de apresentação do ser, ou simplesmente, os modos do ser. Tais silogismos são análogos aos silogismos aristotélicos clássicos (estes são chamados por alguns comentadores de silogismos assertóricos). A diferença aparece por causa da adição de palavras como "possível"e "necessário"às já tão conhecidas figuras. Os silogismos modais são, de certa forma, mais complicados que os assertóricos devido a algumas ressalvas e controvérsias.

O tratamento moderno das modalidades considera a possibilidade e a necessidade como conceitos interdefiníveis. Desta forma. "possível p"é o mesmo que "não necessário não p"e "necessário p"o mesmo que "não possível não p". Essas equivalência também são encontradas em [Aristoteles *Interpretationes*]. Porém nos *Primeiros Analíticos* aparece uma distinção entre duas noções de possibilidade. Por um lado a possibilidade é definida como "não necessário p e não necessário não p"por outro a necessidade é definida da mesma forma que encontramos na literatura moderna [mais informações cf. Robin Smith, Aristotle's logic em Stanford Encyclopedia of Philosophy]

2.2 Tempo e Necessidade: A batalha Naval

A questão sobre os futuros contigentes tem seu ponto de partida na passagem da obra aristotélica *Interpretationes* 9 onde é exposto uma análise de sentenças que estando no futuro podem, portanto, ter valores de verdade contraditórios.

Uma contradição (antiphasis), neste contexto, é um par de proposições no qual uma afirma o que a outra nega. Para Aristóteles podemos ter exceções nos tratamentos das contradições quando falamos sobre o futuro.

Um dos casos são as proposições indefinidas como por exemplo "um ser humano está caminhando": Nada impede que a frase "não é o caso que um homem está caminhando"seja verdadeira enquanto a outra também o for.

Uma outra exceção aparece por razões um pouco mais complexas. Considere as seguintes sentenças:

1) Haverá uma batalha naval amanhã.

2) Não Haverá uma batalha naval amanhã.

Parece que apenas uma dessas sentenças podem ser verdadeiras. Mas, se 1) for verdadeira agora, então amanhã *deverá* acontecer uma batalha naval. Como resutado obtemos uma noção peculiar de possibilidade, ou seja, não há possibilidades sem a atualização do que é possível. Em termos mais simples: O que é possível tem (deve necessariamente) acontecer.

No caso acima, partimos de uma proposição temporalizada e chegamos a uma definição modal alética. Na introdução deste artigo fizemos um caminho inverso, partimos da definição de necessidade (uma modalidade alética) e chegamos a uma noção temporalizada da proposição. Daí portanto a seguinte questão:

Qual a verdadeira relação entre modalidades aléticas e modalidades temporais?

É esta questão que deve ser levada em conta neste artigo. queremos justamente encontrar a formalização lógica adequada de tal relaçao. Por enquanto, porém, devemos apenas expor as noções modais restantes para que então possamos passar para as possíveis formalizações.

O problema do exemplo acima é que ele se contrapõe a metafísica aristotélica no que concerne as potencialidades. Aristóteles então parece propor uma terceira via. Esta terceira via usaria uma lógica de três-valores para tratar apenas dos futuros contingentes. (para mais informações ver: Hintikka 1973, Anscombe, D. Frede 1970, Whitaker 1996 e Waterlow)

As proposições futuras que colocam problemas sobre os valores de verdade não são aquelas caracterizadas por necessidade física ou lógica, mas aquelas que na terminologia escolástica eram dadas como futuros contingentes [Pizzi 1974 p. 36]

O probelma dos futuros contingentes nasce com Aristóteles, é passado ao medieval através do "De Facto"de Cícero.

Será que podemos ter futuros necessários com relação à lógica ou à física? O que garante que a lógica no futuro será regida pelas mesmas leis que a lógica no presente ou no passado?

Quanto ao tratamento dos futuros contingentes por meio de uma lógica trivalente [cf. Pizzi 1974 nota 39 p. 36].

Em *Time and Modality* Prior tentou formalizar um tipo particular de lógica indeterminista não trivalente. [cf. Pizzi 1974 nota 44 p 37].

Leibniz porém tem uma posição particular com relação aos futuros contingentes:

"Os filósofos atualmente concordam que a verdade dos futuros contingentes é determinada, ou seja, que os futuros contingentes são futuros, ou que serão, que ocorrerão: pois é tão certo que o futuro será, quanto é certo que o passado foi. Há cem anos já era verdade que eu estaria hoje a escrever, como daqui a cem anos, será verdade que agora escrevi. Assim, o contingente não é menos contingente porque é futuro; e determinação, que se denominaria certeza se fosse conhecida, não é incompatível com a contingência."[Leibniz, Teodicéia]

Podemos ainda prestar atenção na seguinte dica dada por Robin Smith, [Aristotle's logic em Stanford Encyclopedia of Philosophy p. 25]:

"it is likely that Aristotle is responding to an argument originating in the Megarian School. He ascribe the view that only that which happens is possible to the Megarians in *Methaphysics* IX Θ. The Puzzle with which he is concerned strongly recalls the "Master Argument"of Diodorus Cronus, especially in certain further details. For instace, Aristotle imagines the statement about tomorrow's sea battle haven been uttered ten thousand years ago. If it was true, then its truth was a fact about past; if the past is now unchangeable, then so is the truth value of that past utterance. This recalls the Master Argument's premise that "what is past is necessary". Diodorus Cronus was active a little after Aristotle, and he was a megarian. It seems to me reasonable to conclude that Aristotle's target here is some Megarian argument, perhaps an earlier version of the master."

2.3 Modalidades Filonianas e Diodoréias

Definição Diodoréia de Possível:

"o que é ou será verdadeiro"

De um ponto de vista teorético, a definição diodoréia constrói uma ponte entre a noção modal alética e a temporal.

Definição formal da modalidade diodoréia:

$Mp \leftrightarrow (p \vee Fp)$ e $Lp \leftrightarrow (p \wedge Gp)$

A definição de Mp proposta corresponde à modalidade que Rescher chama de "megárico-aristotélica"em contraposição à modalidade estóica (ou diodoréia)

2.4 O Sistema minimal K_t

O sistema minimal das PF-lógicas chama-se K_t (Prior). Podemos construir K_t adicionando à lógica proposicional Clássica PC, os seguintes axiomas e regras.

Axiomas:

(cópias de K)

A1. $G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$

A2. $H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$

(axiomas mistos)

A3. $p \to HFp$

A4. $p \to GPp$

Regras:

(Além do modus ponens e da substituição que ja são regras em PC, temos:)

NG:

$$\frac{\vdash_{K_t} A}{\vdash_{K_t} GA}$$

NH:

$$\frac{\vdash_{K_t} A}{\vdash_{K_t} A}$$

[cf. Carnielli e Pizzi 2000] e [cf. Gabbay et alii 2003]

Resultados em K_t:

1. Todo teorema em K_t com apenas operadores H, P, é também teorema se substituirmos H por G e P por F.

2. $A \vdash_{K_t} HFA$ e $A \vdash_{K_t} GPA$

Prova: Dado p, pode-se substituir p por Pp e então aplicar NG, ou por Fp e então aplicar NH.

3. As seguintes sequencias de operadores temporais preservam teoremas em K_t:

H, G, HF, GP, HHF, HH, GGP, GG,...etc.

4. Qualquer sequência de H e G em frente de um teorema é também um teorema por aplicações sucessivas de NH e NG. Daí, para qualquer seguido de teorema, será também teorema.

5. ...HFHFHF... e ...GPGPGP... essas sequências em frente a um teorema será também um teorema.

6. HHFHHFHHF... e HHHFHHHFHHHF... e seus duais são sequências que preservam teoremas.

7. Qualquer permutação finita de HF que comece com H e que, entre quaisquer dois F haja pelo menos um H será uma sequência que preserva teorema. (isso vale também para os duais destas permutações)

2.5 Tentavivas de axiomatização para sistemas modais Megarico-Aristotélicos

Para construção de sistemas multimodais temos duas opções:

a) Partir de um sistema modal alético e adicionar um sistema temporal.

b) Partir de um sistema temporal e adicionar um alético.

Para exemplos de sestemas multimodais [cf. Venema et alii 2002, Michael White 1984 e Carnielli e Pizzi 2000].

Questões motivadoras:

É possivel formalizar (axiomatizar) um sistema multimodal alético-temporal que afirme que todo o passado é necessário?

Se é possível então:

Quais os sistemas o fazem?

Qual o mais simples dos sistemas que o fazem?

Os sistemas apropriados são normais?

São corretos e completos?

Vale compacidade ou Löwenheim-Skolem?

Existe alguma hierarquia destes sistemas?

Vejamos agora algumas possíveis fómulas que podem expressar a noção de necessidade do passado.

1. $LPp \wedge MFp$
2. $Pp \rightarrow Lp$
3. $Hp \rightarrow Lp$
4. $Pp \leftrightarrow Lp$
5. $Hp \leftrightarrow Lp$
6. $Pp \leftrightarrow LPp$
7. $Pp \rightarrow Lp$
8. $Pp \rightarrow LPLp$
9. $Pp \rightarrow GLPp$
10. $Pp \rightarrow LGPp$
11. LHp
12. $\forall p(Pp \rightarrow Lp)$

Para Frames Multimodais, os domínios das relações devem ser os mesmo ou podemos ter dois domínios diferentes?

É possivel uma lógica n-modal na qual todas as modalidades são definidas a partir de uma única relação? Em outras palavras seria o mesmo que já é feito na "tense logic"(duas modalidades e uma única relação). Uma terceira modalidade poderia ser definida assim:

$V(Mp, w) = 1 sse \exists z \exists x(wRx \wedge xRz) e V(p, z) = 1$

ou

$V(Mp, w) = 1 sse \exists z \exists x(wRx \wedge wRz) e V(p, x) = V(p, z)$

.

.

.

etc.

Uma outra coisa a fazer a partir de tais sistemas é analisar o grau de incompletude (caso sejam incompletos) dos sistemasmultimodais. [cf Goldblatt 2005 p. 47 e Fine 1974].

Obs: Me parece que o Axioma A3 produz um determinismo para as coisas que acontecem. É como se de acontecer p, não pudéssemos dizer que p seria o casopara todo o passado. O que o axioma expressa é que um acontecimento presente faz com que todo o passado seja convergente para tal acontecimento. Essa é aquela mesma idéia do presente como alinhador dos pontos possíveis do futuro, ou seja, o presente seria uma espécie de máquina que alinha os acontecimentos em uma ordem sequencial.

Por outro lado A4 conecta todo o futuro ao presente. A divergência entre esse axioma e a idéia de que o futuro e o possível são intercambiáveis é a de que a necessidade do passado seja necessária no futuro, ou seja:

(fórmula da nec. do passado) → LG (fórmula da nec. do passado.

Em [Pizzi 1974] encontramos que o axioma A3 do sistematemporal minimal K_t é sugerida a Prior através da leitura do livro *Tractatus de Praedestinatione* de Okhan.

2.5.1 O sistema T1

Axiomas:

1. Axiomas e regras proposicionais.

2. Axioma K $L(p \to q) \to (Lp \to q)$

Regras

1. Necessitação

$$\frac{\vdash A}{\vdash LA}$$

2. Regra da necessitação com relação ao passado.

$$\frac{\vdash HA}{\vdash LA}$$

2.6 A Lógica da necessidade Histórica

[Gabbay et alii, 2003 - logics of historical necessity p. 299]

[Zanardo, 1985] Axiomatização da lógica da necessidade histórica.

[Zanardo, 1992]

A lógica da necessidade histórica parte da seguinte questão:

$G\bot \to LG\bot$ é válida ou não?

2.6.1 O sistema HN1

1. Axiomas para a lógica linear temporal envolvendo (F, P)

São os axiomas para K_t

2. Axiomas para a modalidade S5 envolvendo (M)

HN11 $L(A \wedge B) \leftrightarrow LA \wedge LB$

HN12 $LA \to LLA$

HN13 $LA \to A$

HN14 $A \to LMA$

3. $A \to LA$ Para todo A que não contém F.
4. $\neg r \wedge Hr \wedge LA \to GLH(\neg r \wedge Hr \wedge \to A$
5. $A \to GLPMA$

Regras:
1. As regras de Modus Ponens e $\vdash A \Rightarrow \vdash LA, \vdash GA, \vdash HA$.
2. A regra IRR onde q é um átomo que não está em A.

$$\frac{\vdash \neg q \wedge (Hq \to A)}{}$$

Vamos neste capítulo nos deter a alguns detalhes tal como deixar o texto centralizado e como construir uma tabela.

2.7 Centralizando

Para dar destaque, por exemplo a uma equação no meio do texto, deixando a mesma centralizada, basta:

$$a \wedge b \leq a$$

digitar a fórmula ou a equação entre o comando **dolar dolar**, como no exemplo.

Note que para continuar o texto, foi digitado o comando **noindent**. Este comando serve para o programa entender que o texto deve dar seqüencia ao texto acima, isto é, para não iniciar um novo parágrafo.

2.8 Tabelas

Considere as seguintes matrizes trivalentes onde T e T^- são valores distinguidos:

$\wedge$	T	T^-	F
T	T^-	T^-	F
T^-	T^-	T^-	F
F	F	F	F

$\vee$	T	T^-	F
T	T^-	T^-	T^-
T^-	T^-	T^-	T^-
F	T^-	T^-	F

$\to$	T	T^-	F
T	T^-	T^-	F
T^-	T^-	T^-	F
F	T^-	T^-	T^-

	$\neg_w$	$\neg_s$	$\circ_w$	$\circ_s$
T	F	F	T	T
T^-	T^-	F	T	F
F	T	T	T	T

As barras entre os **c** servem para colocar as linhas horizontais da tabela e o comando **hline** é colocado em cada linha que se deseja colocar a linha horizontal da tabela.

A quantidade de **c** indicam o número de colunas da tabela e a letra **c** indica que os dados ficarão centralizados. Para alinhar a direita utiliza-se a letra **r** e para alinhar a esquerda a letra **l**.

Os ítens das colunas são separados pelo &. Para mais detalhes observe os exemplos.

Capítulo 3

Falando sério

Agora estamos prontos para aprender a colocar nota de roda pé nos textos e este será nosso próximo assunto.

3.1 Nota de roda pé

A nota de roda pé [1] é feita utilizando o comando **footnote** e numera automaticamente as notas.

[1] Todos sabem para o que serve.

Considerações Finais

Como já sabemos, o objetivo desta nota é apenas mostrar um pouco dos comandos que eu julgo serem os mais utilizados no decorrer do texto. Para maiores informações consulte um guia de Latex ou peça auxilio aos colegas, e obviamente ao orientador.

Incluo a seguir um exemplo de arquivo de bibliografia. Prefiro fazer os rótulos bastante mnemônicos, para que eu lembre o que estou citnadp. Por exemplo, [Set73] mas você pode escreve qualquer coisa ao invés de `Sette_1973_On_the_Propositional_Calculus_P1` . Note que estou usando o comando chamado *Verbatim* para escrever a frase anterior sem que o programa entenda isso como matemática. Este comando é produzido por `\verb`. Veja que exemplo curioso da diferença de *uso* e *menção*!

Outro exemplos de citação seriam [Pop59], [D'O87],etc.

Você pode fazer com que apareça trudo o que você tem no banco de dados da Bibliografia com o comando dddddd.

Apêndice 1 (Opcional)

Exemplos dos mais interessantes manuais de latex na rede são os seguintes:

Página sobre criptografia do IME- USP Manuais de LaTeX em português e inglês, inclusive com conversores entre LaTeX e outros formatos:
http://www.ime.eb.br/ pinho/pessoal/latex/

Manual básico do IFGW- UNICAMP:
http://www.ifi.unicamp.br/encontro/latex-exemplo.html

Referências Bibliográficas

[Byr78] M. Byrd. Megarian necessity in forward-branching, backward-linear time. *Noûs*, 1978.

[Car00] *Modalitá e Multimodalitá*. 2000.

[D'O87] I.M.L. D'Ottaviano. Definability and quantifier elimination for $\mathbf{J}_3$-theories. *Studia Logica*, 46(1):37–54, 1987.

[Gab94] *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects*. 1994.

[Pop59] K. R. Popper. *The Logic of Scientific Discovey*. Hutchinson & Co., Ltd., London, 1959. (English translation of *Logik der Forschung*, Julius Springer Verlag, Vienna, 1936).

[Pri67] *Past, Present and Future*. Oxford: Clarendon Press, 1967.

[Set73] A.M. Sette. On the Propositional Calculus P^1. *Mathematica Japonicae*, 18(13):173–180, 1973.

[Whi84] M. White. The necessity of the past and modal-tense logic incompleteness. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1984.