1 Teorema de Lindström

Samir Gorsky

A - Não existe sistema lógico com força expressiva maior do que a lógica de primeira ordem, para o qual vale ambos: o teorema da compacidade e o teorema de Löwenheim-Skolem.

B - Não existe sistema lógico com força expressiva maior do que a lógica de primeira ordem, para o qual o teorema de Löwenheim-Skolem vale e o conjunto de sentenças válidas ée numerável.

Definições:

Seja $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ sistemas lógicos.

- Sentenças logiamente equivalentes.

  Seja S um conjunto de símbolos, $\varphi \in L(S)$ e $\psi \in L'(S)$
  φ e ψ são denominados logicamente equivalentes sse $Mod^S_{\mathcal{L}}(\varphi) = Mod^S_{\mathcal{L}'}(\psi)$

  Obs: Temos um mesmo conjunto de símbolos S em dois sistemas lógicos $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ diferentes.

- $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$

  $\mathcal{L}'$ é no mínimo tão expressivo quanto $\mathcal{L}$ sse para todo S e para todo $\varphi \in L(S)$ existe algum $\psi \in L'(S)$ tal que φ e ψ são equivalentes ($Mod^S_{\mathcal{L}}(\varphi) = Mod^S_{\mathcal{L}'}(\psi)$)

- $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}'$.

  $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são igualmente expressivos sse $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$.

Definições:

- Boole ($\mathcal{L}$) ($\mathcal{L}$ contém conectivos proposicionais booleanos)

  1 - Dados S e $\varphi \in L(S)$, existe $\chi \in L'(S)$ tal que para toda S-estrutura $\mathfrak{A}$:

  $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \chi$ sse $\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{L}} \varphi$

2 - Dados S e $\varphi, \chi \in L(S)$, existe $\chi \in L(S)$ tal que para toda S-estrutura $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \chi$ sse ($\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi$.

Se vale Boole ($\mathcal{L}$) então $\neg\varphi$ e $(\varphi \vee \psi)$ estabelecem a fórmula χ no sentido de 1) e 2), $(\varphi \wedge \psi))$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ ... são usados analogamente.

- Rel ($\mathcal{L}$) ($\mathcal{L}$ permite relativização)
  Para S, $\varphi \in L(S)$ e U (símbolo de relação unário), existe $\psi \in L(S \cup \{U\})$ tal que: $(\mathfrak{A}, U^A) \models_{\mathcal{L}} \psi$ sse $(\mathfrak{A}, U^A) \models_{\mathcal{L}} \varphi$ para toda estrutura $\mathfrak{A}$ e todo subconjunto S-closed U^A de A ($[U^A]^{\mathfrak{A}}$ é a subestrutura de $\mathfrak{A}$ com domínio U^A).

- Repl ($\mathcal{L}$) ($mathscrL$ permite "substituição" de símbolos de função e de constantes por símbolos de relação).
  Se S é um conjunto de símbolos e S^r é fechado para símbolos de função e de constantes de S, então para todo $\varphi \in L(S)$ existe $\psi \in L(S^r)$ tal que, para toda S-estrutura $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \varphi$ sse $\mathfrak{A}^r \models_{\mathcal{L}} \psi$
  Se Repl ($\mathcal{L}$), escreveremos φ^r para a fórmula ψ com a propriedade acima.

- $\mathcal{L}$ é regular.
  Um sistema lógico $\mathcal{L}$ é dito regular se satisfaz as propriedades Boole ($\mathcal{L}$), Rel ($\mathcal{L}$) e Repl($\mathcal{L}$).

- LöSko ($\mathcal{L}$) (o teorema de Löwenheim-Skolem vale para $\mathcal{L}$).
  Se $\varphi \in L(S)$ é satisfatível , então existe modelo de φ cujo domínio é no máximo contável.

- Comp ($\mathcal{L}$) (o teorema da compacidade vale para $\mathcal{L}$)
  Se $\Phi \subseteq L(S)$ e se todo subconjunto finito de Φ é satisfatível, então Φ é ele próprio satisfatível.

Com esta terminologia o resultado de Lindström mencionado em 'A' formula-se da sequinte maneira:

Se $\mathcal{L}$ é um sistema lógico regular tal que $\mathcal{L}_I \leq \mathcal{L}$, LöSko($\mathcal{L}$) e Comp($\mathcal{L}$) então $\mathcal{L} \sim \mathcal{L}_I$.

Lema 1: Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico regular. Se para todo conjunto se símbolos relacional S, toda L(S)-sentença é logicamente equivalente a uma sentença de primeira ordem, então $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}_I$.

Sistema lógico compacto regular.

Lema 2: Suponha Comp($\mathcal{L}$), e seja $\Phi \cup \{\varphi\} \subseteq L(S)$ e $\Phi \models_{\mathcal{L}} \varphi$. Então existe $\Phi_0 \subseteq \Phi$ finito, tal que $\Phi \models_{\mathcal{L}} \varphi$.

O lema acima mostra que Comp($\mathcal{L}$), o teorema da compacidade para satisfação implica o teorema da compacidade para a relação de consequência.

Lema 3: Suponha Comp($\mathcal{L}$) e $\psi \in L(S)$. Então existe $S_0 \subseteq S$ tal que, para toda S-estrutura $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{A}_{S_0} \simeq \mathfrak{B}_{S_0} \Rightarrow (\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \psi)$$

Primeiro Teorema de Lindström

Lema 4: Seja S um conjunto de síbolos relacional e ψ uma L(S)-sentença que não é logicamente equivalente a qualquer sentença de primeira ordem. Então, para todo $S_0 \subseteq S$ finito e todo $m \in \mathbb{N}$, existem S-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que:

$$\mathfrak{A}|_{S_0} \simeq_m \mathfrak{B}|_{S_0}, \, \mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi \text{ e } \mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi.$$

Lema 5: Para todo $m \in \mathbb{N}$ existe um modelo $\mathfrak{C}$ de χ no qual o corpo W^c de $<^c$ consiste de exatamente (m + 1) elementos.

Lema 6: Assuma LöSko($\mathcal{L}$). Então uma das seguintes condições a) ou b) vale:

a) Existem S-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que:

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi, \, \mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi \text{ e } \mathfrak{A}|_{S_0} \simeq \mathfrak{B}|_{S_0}$$

b) Em todos modelos $\mathfrak{D}$ de χ, o corpo W^c de $<^c$ é finito.

Lema Principal: Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico regular com $\mathcal{L}_I \leq \mathcal{L}$ e LöSko($\mathcal{L}$). Alem do mais, seja S um conjunto de símbolos relacional, e seja ψ uma sentença em L(S) que não seja logicamente equivalente a qualquer sentença de primeira ordem. Então a) ou b) vale.

a) Para todo conjunto finito de símbolos S_0 com $S_0 \subseteq S$ existem S-estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tais que.

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{L}} \psi,\ \mathfrak{B} \models_{\mathcal{L}} \neg\psi \text{ e } \mathfrak{A}|_{S_0} \simeq \mathfrak{B}|_{S_0}.$$

b) Para um símbolo de relação unário W e um dado conjunto de síbolos S^+ com $S \cup \{W\} \subseteq S^+$ e finito $S^+ \setminus S$, existe uma $L(S^+)$-sentença χ tal que:

i) Em todo modelo $\mathfrak{C}$ de χ, W^c é finito e não vazio.

ii) Para todo $m \geq 1$ existe um modelo $\mathfrak{C}$ de χ, no qual W^c tem exatamente m elementos.

Primeiro Teorema de Lindström

Para um sistema lógico regular $\mathcal{L}$ com $\mathcal{L}_I \geq \mathcal{L}$ o seguinte vale:

$$(\text{LöSko}(\mathcal{L}) \wedge Comp(\mathcal{L})) \Rightarrow \mathcal{L} \sim \mathcal{L}_I$$

Segundo Teorema de Lindström

Não existe sistema lógico com força expressiva maior do que a lógica de primeira ordem, para o qual o teorema de Löwenheim-Skolem vale e o conjunto de sentenças válidas ée numerável.

Definições:

- Sitema Lógico Efetivo.

  Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico. $\mathcal{L}$ é chamado sistema lógico efetivo se para todo conjunto decidível de símbolos S o conjunto L(S) é decidível, e para toda $\varphi \in L(S)$ existe um subconjunto finito S^0 de S tal que $\varphi \in L(S_0)$.

- $\mathcal{L} \leq_{eff} \mathcal{L}'$

  $\mathcal{L} \leq_{eff} \mathcal{L}'$ sse para todo S decidível existe uma função computável * que associa para cada $\varphi \in L(S)$ uma senteça $\varphi^* \in L'(S)$ tal que $Mod^S_{\mathcal{L}}(\varphi) = Mod^S_{\mathcal{L}'}(\varphi^*)$

- $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$

  $\mathcal{L} \sim_{eff} \mathcal{L}'$ sse $\mathcal{L} \leq_{eff} \mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}' \leq_{eff} \mathcal{L}$

- Sistema Lógico Efetivamente Regular

  Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico. $\mathcal{L}$ é dito efetivamente regular se $\mathcal{L}$ é efetivo e se os seguintes efetivos análogos de Boole($\mathcal{L}$), Rel($\mathcal{L}$) e Repl($\mathcal{L}$) valem:

  Para todo conjunto decidível de síbolos S:

  i) Existe uma função computável que associa para quaisquer $\varphi \in L(S)$ uma fórmula $\neg\varphi$, e, adicionalmente, uma função computável que associa para quaiquer φ e ψ de L(S) uma fórmula $(\varphi \vee \psi)$.

  ii) Para todo U unário, existe uma função computável que associa toda $\varphi \in L(S)$ a uma fórmula φ^U.

  iii) Existe uma função computável que associa todo $\varphi \in L(S)$ a uma fórmula $\varphi^r \in L(S^r)$ (onde S^r é escolhido como conjunto decidível de símbolos).

Segundo teorema de Lindström: Seja $\mathcal{L}$ um sistema lógico efetivamente regular tal que $\mathcal{L}_I \leq_{eff} \mathcal{L}$. Se LöSko($\mathcal{L}$) e se para $\mathcal{L}$ o conjunto de sentenças válidas é enumerável, então $\mathcal{L}_I \sim_{eff} \mathcal{L}$.