

beschränkten Kette eine Teilmenge von \mathbb{R}^P , während jede unbeschränkte Kette w in ihrem Träger enthält. Eine 0-Kette τ^0 ist genau dann beschränkt, wenn τ^0 w nicht als Element enthält.

Sei $A \subseteq Z^P$ (\mathbb{R}^P), $x \in Z^P$ (\mathbb{R}^P) und τ^k eine k -Kette des Gitters G im Z^P (\mathbb{R}^P).

Die Sprechweisen "x liegt in τ^k " bzw. "x liegt nicht in τ^k " bzw. "A ist in τ^k enthalten" bzw. "A ist nicht in τ^k enthalten" bzw. " τ^k ist in A enthalten (gelegen)" bzw. " τ^k besitzt mit A leeren Durchschnitt" bzw. " τ^k besitzt mit A nichtleeren Durchschnitt" sollen vereinbarungsgemäß soviel, wie $x \in |\tau^k|$, $x \notin |\tau^k|$, $A \subseteq |\tau^k|$, $A \not\subseteq |\tau^k|$, $|\tau^k| \subseteq A$, $|\tau^k| \cap A = \emptyset$, $|\tau^k| \cap A \neq \emptyset$ bedeuten. Wir führen diese Sprechweisen ein, um manche Formulierungen weniger umständlich erscheinen zu lassen ("abus de langage").

1.41 Bemerkungen

- (1) τ^k ist eine abgeschlossene Punktmenge in Z^P , bzw. in \mathbb{R}^P , falls τ^k beschränkt ist. (Alle $c_i^k \in \tau^k$ sind abgeschlossene Mengen in Z^P bzw. in \mathbb{R}^P und es werden nur endlich viele c_i^k vereinigt.)
- (2) Für je zwei k -Ketten τ_1^k, τ_2^k auf G ist $\tau_1^k = \tau_2^k$ gleichbedeutend mit $|\tau_1^k| = |\tau_2^k|$; $\tau_1^k \subset \tau_2^k$ gleichbedeutend mit $|\tau_1^k| \subset |\tau_2^k|$, insgesamt ist somit $\tau_1^k \subseteq \tau_2^k$ gleichbedeutend mit $|\tau_1^k| \subseteq |\tau_2^k|$.

Beweis:

$\tau_1^k = \tau_2^k \Leftrightarrow |\tau_1^k| = |\tau_2^k|$ ist klar aufgrund der Definitionen der Ketten und Träger. Sei nun $|\tau_1^k| = |\tau_2^k| = A$.

Wäre $\tau_1^k \neq \tau_2^k$, so gäbe es o.B.d.A. eine k -Zelle c^k , die in τ_1^k , aber nicht in τ_2^k liegt. Nach 1.31.1 enthält c^k jedoch Punkte, die in keiner anderen k -Zelle von G enthalten sind, somit kann $|\tau_1^k| = |\tau_2^k|$ nicht gelten.

Sei $\tau_1^k \subset \tau_2^k$. Dann gibt es eine k -Zelle c^k , die in τ_2^k , aber nicht in τ_1^k liegt; wiederum nach 1.31.1 gibt es in c^k Punkte, die in keiner anderen k -Zelle von G liegen, somit liegen diese Punkte auch in keiner k -Zelle von τ_1^k , woraus $|\tau_1^k| \subset |\tau_2^k|$ folgt.

Sei nun $|\tau_1^k| \subset |\tau_2^k|$. Falls $\tau_1^k \not\subseteq \tau_2^k$ gälte, gäbe es eine k -Zelle c^k , die in τ_1^k , aber nicht in τ_2^k läge. Wiederrum nach 1.31.1 gäbe es Punkte aus Z^P , die nur in c^k , aber keiner von c^k verschiedenen k -Zelle von G lägen. Somit könnte $|\tau_1^k| \subseteq |\tau_2^k|$ nicht gelten. Somit haben wir: $\tau_1^k \subseteq \tau_2^k$. Gälte jedoch

$\tau_1^k = \tau_2^k$, so hätten wir nach (1): $|\tau_1^k| = |\tau_2^k|$.

Strenggenommen haben wir 1.41(2) nur für den Fall $k \geq 1$ bewiesen, da der Satz 1.31.1, auf den wir uns fortwährend berufen haben, nur für k -Zellen mit $k \geq 1$ gilt. Die Behauptungen von 1.41(2) sind jedoch für 0-Ketten völlig offensichtlich, da 0-Ketten mit ihrem Träger übereinstimmen.

- (3) $|\tau^k| = \emptyset$ ist gleichbedeutend mit $\tau^k = 0^k$ aufgrund der Definition von 0^k , als dem leeren System von k -Zellen. □

1.41.1 Hilfssatz

Jeder Punkt x aus Z^p liegt in einer geeigneten p -Zelle jedes Gitters G auf Z^p .

Beweis:

Da jedes Gitter G mindestens eine unbeschränkte p -Zelle besitzt,

etwa die abgeschlossene Hülle bzgl. Z^p von $\prod_{i=1}^p (-\alpha_i, \alpha_i]$, α_i die kleinste Bestimmungszahl aus B_i , $1 \leq i \leq p$, liegt w in mindestens einer p -Zelle eines jeden Gitters.

Sein nun $x \in \mathbb{R}^p$. Für alle $i=1, \dots, p$, gilt: entweder $x_i < \alpha_i$, α_i die kleinste Bestimmungszahl aus B_i , oder $x_i > \alpha_{n_i}$, α_{n_i} die größte Bestimmungszahl aus B_i , oder, falls $\alpha_i \leq x_i \leq \alpha_{n_i}$ gilt, entweder $x_i = \alpha_j$, $\alpha_j \in B_i$ oder $x_i \neq \alpha_j$ für alle $\alpha_j \in B_i$, in welchem Fall es ein α_k aus B_i mit $\alpha_k < x_i < \alpha_{k+1}$ gibt. $Z_i(c)$ wird dann je nachdem als $-h_i^1, +h_i^{n_i}, +Q_i^j, +Q_i^k$ gewählt und $\bigcap_{i=1}^p Z_i(c)$ ist eine x enthaltende p -Zelle. □

1.42 Hilfssatz

$\tau_1^k, \tau_2^k, \tau^p$ seien Ketten auf dem Gitter G .

- (1) $|\tau_1^k + \tau_2^k| \subseteq |\tau_1^k| \cup |\tau_2^k|$; die Gleichheit gilt genau dann, wenn die beiden Ketten keine gemeinsame k -Zelle enthalten.
- (2) $|\tau^p|^{\circ} = |\tau^p|$.
- (3) $|\tau^p| = |\tau^p|^{\circ}$, $|\tau^p|^{\circ} = |\tau^p|$.
- (4) Ist τ^p die Kette der gemeinsamen p -Zellen von τ_1^p und τ_2^p , so gilt: $|\tau_1^p|^{\circ} \cap |\tau_2^p|^{\circ} = |\tau^p|^{\circ}$.
- (5) Ist τ^p die Kette der p -Zellen von G , die eine Menge $A \subseteq Z^p$ treffen, so gilt $A \subseteq \tau^p$.

Beweis:

(1) $\tau_1^k + \tau_2^k = (\tau_1^k \cup \tau_2^k) \setminus (\tau_1^k \cap \tau_2^k) \subseteq \tau_1^k \cup \tau_2^k$. Nach 1.41(2) folgt hieraus: $|\tau_1^k + \tau_2^k| \subseteq |\tau_1^k \cup \tau_2^k|$. Falls τ_1^k und τ_2^k keine gemeinsamen k -Zellen enthalten, gilt: $\tau_1^k \cap \tau_2^k = \emptyset$, somit haben wir in diesem Fall: $\tau_1^k + \tau_2^k = \tau_1^k \cup \tau_2^k$; 1.41(2) liefert dann sofort: $|\tau_1^k + \tau_2^k| = |\tau_1^k \cup \tau_2^k|$.

Sei nun umgekehrt $|\tau_1^k \cup \tau_2^k| = |\tau_1^k + \tau_2^k|$. Gäbe es eine k -Zelle c^k , die sowohl in τ_1^k , als auch in τ_2^k läge, so wäre c^k nicht in $\tau_1^k + \tau_2^k$. Nach 1.31.1 besitzt c^k Punkte aus \mathbb{R}^p , die in keiner anderen k -Zelle von G enthalten sind, und somit auch nicht in $|\tau_1^k + \tau_2^k|$. Da aber c^k in $\tau_1^k \cup \tau_2^k$ liegt, sind diese Punkte in $|\tau_1^k \cup \tau_2^k|$ enthalten, woraus $|\tau_1^k + \tau_2^k| \neq |\tau_1^k \cup \tau_2^k|$ folgt. Wiederrum haben wir strenggenommen die letzte Teilbehauptung nur für $k \geq 1$ bewiesen, da Satz 1.31.1 nur für k -Zellen mit $k \geq 1$ gilt. Die Behauptung (1) gilt jedoch wiederum ganz offensichtlich für 0-Ketten, da 0-Ketten mit ihrem Träger übereinstimmen.

(2) Aus $|\tau^p|^\circ \subseteq |\tau^p|$ folgt, weil $|\tau^p|$ abgeschlossen ist, $\overline{|\tau^p|^\circ} \subseteq |\tau^p|$.

Sei nun $x \in |\tau^p|$, $x \neq w$, etwa $x \in c^p \in \tau^p$. Die Kugel $K(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ beliebig, enthält einen inneren Punkt y von c^p (I 1.49, c^p läßt sich als ein Intervall des \mathbb{R}^p auffassen (1.28(2))). Aus $y \in (c^p)^\circ \subseteq c^p \subseteq |\tau^p|$ folgt $y \in |\tau^p|^\circ$. ε war beliebig, daher muß x Berührungspunkt von $|\tau^p|^\circ$ sein. Falls τ^p beschränkt, somit $w \notin c^p$ gilt für alle c^p aus τ^p , haben wir $w \notin |\tau^p|$. Somit stimmt die abgeschlossene Hülle von $|\tau^p|$ bzgl. Z^p mit der abgeschlossenen Hülle von $|\tau^p|^\circ$ bzgl. \mathbb{R}^p überein und wir sind fertig.

Sei nun $w \in |\tau^p|$, also $w \in c^p \in \tau^p$. c' sei die zu c^p gehörige Präzelle, die ganz in \mathbb{R}^p enthalten ist. c' ist die abgeschlossene Hülle bzgl. \mathbb{R}^p des offenen Kerns O von c' bzgl. \mathbb{R}^p (I 1.49).

Nach I 3.8 ist dann c^p die abgeschlossene Hülle von O bzgl. Z^p . Somit hat jede in Z^p offene Menge O' , welche w enthält, mit O nichtleeren Durchschnitt. Da $w \notin O$, gilt: $O' \setminus \{w\} \cap O \neq \emptyset$, w ist somit Häufungspunkt von O . $O \subseteq c' \subseteq c^p$, deshalb gilt:

$O = O^\circ \subseteq (c^p)^\circ \subseteq |\tau^p|^\circ$. Deshalb ist w Berührungspunkt von $|\tau^p|^\circ$

und wir haben: jeder Punkt aus $|\tau^p|$ ist Berührungspunkt von $|\tau^p|^\circ$.

(3) $|\tau^P|$ ist abgeschlossen in Z^P , deshalb ist $|\tau^P|$ offen.
 Jeder Punkt $x \in |\tau^P|$ kann nicht in einer p-Zelle aus τ^P liegen.
 Somit muß die p-Zelle c_x , welche nach 1.41.1 x enthält, aus $|\tau^P|$ sein. $|\tau^P|$ ist offen, somit gibt es eine Umgebung U von x, welche noch ganz in $|\tau^P|$ enthalten ist. Offenkundig kann auch kein Punkt y aus U in $|\tau^P|$ liegen und die p-Zelle c_y , welche ihn wiederum nach 1.41.1 enthält, muß ebenfalls in $|\tau^P|$ liegen.
 Somit: $U \subseteq |\tau^P|$ und daher ist x innerer Punkt von $|\tau^P|$. Wir haben somit: $|\tau^P| \subseteq |\tau^P|^\circ$.

Sei nun $x \in |\tau^P| \cap |\tau^P| \sim x \in c_1^P \in \tau^P$ und $x \in c_2^P \in \tau^P$. Jede Umgebung von x hat mit $(c_1^P)^\circ \subseteq |\tau^P|^\circ$ und $(c_2^P)^\circ \subseteq |\tau^P|^\circ$ nichtleeren Durchschnitt (I 1.49). Nach 1.31.1 kann kein Punkt aus $(c_2^P)^\circ$ in einer anderen p-Zelle als c_2^P liegen, somit kann a fortiori kein Punkt aus $(c_2^P)^\circ$ in $|\tau^P|$ enthalten sein. Somit kann kein Punkt aus $|\tau^P| \cap |\tau^P|$ innerer Punkt von $|\tau^P|$ sein, deshalb muß $|\tau^P|^\circ \subseteq |\tau^P|$ gelten.

Summa summarum:

$$|\tau^P| = |\tau^P|^\circ \sim |\tau^P| = |\tau^P|^\circ = |\tau^P| \text{ nach (2).}$$

(4) $\tau^P \subseteq \tau_1^P, \tau_2^P$. Somit gilt: $|\tau^P| \subseteq |\tau_1^P|, |\tau_2^P|$ und deshalb haben wir: $|\tau^P| \subseteq |\tau_1^P| \cap |\tau_2^P|$. Somit gilt: $|\tau^P|^\circ \subseteq (|\tau_1^P| \cap |\tau_2^P|)^\circ = |\tau_1^P|^\circ \cap |\tau_2^P|^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Andererseits haben wir: } |\tau_1^P|^\circ \cap |\tau_2^P|^\circ &\subseteq |\tau_1^P| \cap |\tau_2^P|^\circ = \\ &= |\tau^P + (\tau_1^P + \tau^P)| \cap |\tau_2^P|^\circ \subseteq (|\tau^P| \cup |\tau_1^P + \tau^P|) \cap |\tau_2^P|^\circ = \\ &= (|\tau^P| \cap |\tau_2^P|^\circ) \cup (|\tau_1^P + \tau^P| \cap |\tau_2^P|^\circ) \subseteq (|\tau^P| \cap |\tau_2^P|) = |\tau^P|. \end{aligned}$$

Denn, wegen $|\tau^P| \subseteq |\tau_2^P|$ ist $|\tau^P| \cap |\tau_2^P| = |\tau^P|$ und wegen $\tau_1^P + \tau^P \subseteq \tau_2^P$ gilt: $|\tau_1^P + \tau^P| \subseteq |\tau_2^P| = \overline{|\tau_2^P|} = (|\tau_2^P|^\circ)$.

Deshalb ist $|\tau_1^P + \tau^P| \cap |\tau_2^P|^\circ = \emptyset$.

Aus $|\tau_1^P|^\circ \cap |\tau_2^P|^\circ \subseteq |\tau^P|$ folgt: $|\tau_1^P|^\circ \cap |\tau_2^P|^\circ \subseteq |\tau_2^P|^\circ$.

(5) $\tau^P = \{c^P \in \Omega^P \mid c^P \cap A \neq \emptyset\} \sim [\tau^P = \{c^P \in \Omega^P \mid c^P \cap A = \emptyset\}]$; sei $x \in |\tau^P| \sim x \in c_x^P \in [\tau^P]$; deshalb ist $c_x^P \cap A = \emptyset$ und es gilt: $c_x^P \subseteq [A$.

Daher liegt x in $[A$ und, weil x aus $|\tau^P|$ beliebig war, gilt: $|\tau^P| \subseteq [A$, was sofort $A \subseteq \overline{|\tau^P|} = \overline{|\tau^P|} = |\tau^P|^\circ$ impliziert.

$\overline{|\tau^P|} = |\tau^P|^\circ$, weil $\overline{[B]} = B^\circ$ für jede Teilmenge eines topologischen Raumes X gilt. □

Aus dem Beweis ergibt sich, daß alle Aussagen von 1.42 auch im Falle, G ist ein Gitter im \mathbb{R}^p und alle betrachteten Mengen sind Teilmengen von \mathbb{R}^p , gilt. Es ist wesentlich, daß die Aussagen für p -Ketten aufgestellt werden, da jede k -Kette für $k < p$ ganz im Träger von G enthalten ist; $|G|$ ist aber nun, gleichgültig, ob wir unsere Betrachtungen in \mathbb{R}^p oder Z^p durchführen, in beiden Räumen nirgendsdicht und deshalb besitzt auch jede Teilmenge von $|G|$ keine inneren Punkte (1.2, 1.33). Selbstverständlich gelten die Aussagen von 1.42 für die k -Zellen, falls $k \geq 1$ und $k=p$ ist.

1.43 Hilfssatz

Sei A eine Teilmenge von Z^p und τ^k eine Kette auf G mit $|\tau^k| \subseteq A$. Ist C eine Komponente von A und ist τ_0^k die Kette derjenigen k -Zellen von τ^k , welche C treffen, so gilt $|\tau_0^k| = |\tau^k| \cap C$. Ist insbesondere $A = |\tau^k|$, so gilt: $|\tau_0^k| = C$.

Beweis:

Jede k -Zelle aus τ_0^k ist eine zusammenhängende Teilmenge von A , die C trifft und ist somit in C enthalten, daher gilt $|\tau_0^k| \subseteq |\tau^k| \cap C$.

Sei $x \in |\tau^k| \cap C$, dann haben wir $x \in C^k \in \tau^k$ und $x \in C$. Somit gilt: $C^k \in \tau_0^k$, was sofort $x \in |\tau_0^k|$ nach sich zieht. Deshalb haben wir: $|\tau^k| \cap C \subseteq |\tau_0^k|$. □

1.44 Definition

- (1) Eine Kette τ^k auf G heißt zusammenhängend, wenn ihr Träger zusammenhängend ist.
- (2) Die "maximalen" zusammenhängenden Teilketten einer Kette $\tau^k \neq 0^k$ auf G heißen Komponenten von τ^k .

1.45 Hilfssatz

Die Kette τ_1^k ist genau dann eine Komponente der Kette τ^k , wenn $|\tau_1^k|$ eine Komponente von $|\tau^k|$ ist.

Beweis:

Sei τ_1^k eine Komponente von τ^k .

Als zusammenhängende Teilmenge von $|\tau^k|$ ist $|\tau_1^k|$ in einer Komponente C von $|\tau^k|$ enthalten. Nach 1.43 ist mit der dortigen Bezeichnungsweise $|\tau_0^k| = C$. Es folgt $|\tau_1^k| \subseteq |\tau_0^k|$ und weiter nach 1.41(2): $\tau_1^k \subseteq \tau_0^k \subseteq \tau^k$. Da τ_1^k eine Komponente von τ^k ist und τ_0^k zusammenhängt, gilt $\tau_1^k = \tau_0^k$. Daraus ergibt sich mit 1.41(2): $|\tau_1^k| = |\tau_0^k| = C$, C eine Komponente von $|\tau^k|$.

Sei umgekehrt $|\tau_1^k|$ eine Komponente von $|\tau^k|$. Wiederum nach 1.41(2) folgt: $\tau_1^k \subseteq \tau^k$. Angenommen, es ist $\tau_1^k \subseteq \tau_2^k \subseteq \tau^k$, τ_2^k zusammenhängend. Dann folgt: $|\tau_1^k| \subseteq |\tau_2^k| \subseteq |\tau^k|$. Da $|\tau_1^k|$ eine Komponente von $|\tau^k|$ ist und da $|\tau_2^k|$ zusammenhängt, gilt: $|\tau_1^k| = |\tau_2^k|$ und damit: $\tau_1^k = \tau_2^k$. Folglich muß τ_1^k eine Komponente von τ^k sein. \square

Aus Hilfssatz 1.45 und den bekannten topologischen Eigenschaften von Zusammenhangskomponenten folgt nun sofort:

1.46 Satz

τ^k sei eine Kette auf G .

- (1) Die Träger zweier verschiedener Komponenten von τ^k sind disjunkt.
- (2) Jede zusammenhängende Teilmenge von $|\tau^k|$ ist im Träger einer Komponente von τ^k enthalten.
- (3) Sind $\tau_1^k, \tau_2^k, \dots, \tau_n^k$ die (endlich vielen!) Komponenten von τ^k , so gilt: $\tau^k = \tau_1^k + \tau_2^k + \dots + \tau_n^k$.

Beweis:

(1) folgt aus KUHN, Topologie, 3.2(1), p. 129 und der Tatsache, daß die Träger zweier verschiedener Komponenten von τ^k zwei verschiedene Komponenten von $|\tau^k|$ sind.

(2) folgt aus KUHN, Topologie, 3.2(2), p. 129 und der Tatsache, daß der Träger einer Komponente von τ^k eine Komponente von $|\tau^k|$ ist (1.45).

(3) Jede Kette τ^k ist eine Teilmenge der endlichen Menge Ω^k und daher selbst endlich. Da jede Zelle $c^k \in \tau^k$ eine zusammenhängende Teilmenge von $|\tau^k|$ ist, besitzt eine Kette höchstens soviele Komponenten wie Zellen, also ebenfalls nur endlich viele. Da die Träger der Komponenten von τ^k nach (1) disjunkt sind, sind auch die Komponenten von τ^k untereinander disjunkt und daher gilt die Summendarstellung. \square

2. Ränder, Zyklen

II 2

2.1 Definition

Unter dem algebraischen Rand $\partial\tau^k$ einer k -Kette τ^k , $k=1, \dots, p$, auf G versteht man das System aller $(k-1)$ -Zellen c^{k-1} , die in einer ungeraden Anzahl von k -Zellen der Kette τ^k enthalten sind; (für 0 -Ketten wird kein algebraischer Rand definiert.) $\partial\tau^k$ ist somit eine $(k-1)$ -Kette auf G .

2.2 Bemerkungen

- (1) Statt $\partial\{c^k\}$ schreiben wir einfach ∂c^k . Der algebraische Rand jeder k -Zelle c^k , $k \geq 1$, besteht somit aus allen in c^k enthaltenen $(k-1)$ -Zellen, d.h. aus allen Zellen, welche aus c^k durch Entregularisierung in einer Regularitätsachse von c^k hervorgehen.
- Man könnte den algebraischen Rand ∂c^k einer k -Zelle, $k \geq 1$, auch als die Menge aller in ihr enthaltenen $(k-1)$ -Zellen definieren. Der algebraische Rand einer k -Kette τ^k , $k \geq 1$, wäre dann die Summe modulo 2 der algebraischen Ränder der k -Zellen c^k aus τ^k . Anwendung von 1.39(1) zeigt, daß der algebraische Rand von τ^k aus allen $(k-1)$ -Zellen c^{k-1} besteht, welche in einer ungeraden Anzahl der $(k-1)$ -Ketten $\{\partial c^k \mid c^k \in \tau^k\}$, also in einer ungeraden Anzahl von k -Zellen von τ^k enthalten sind. Unsere Definition und die eben beschriebene sind somit äquivalent.
- (2) $0^k := 0^{k-1}$.
- (3) Für die p -Kette Ω^p , die aus allen p -Zellen von G besteht, gilt $\partial\Omega^p = 0^{p-1}$, da nach 1.28(6) jede $(p-1)$ -Zelle in genau zwei p -Zellen enthalten ist.
- (4) Für jede k -Kette τ^k gilt: $|\partial\tau^k| \subseteq |\tau^k|$, da jede $(k-1)$ -Zelle c^{k-1} aus $\partial\tau^k$ in mindestens einer k -Zelle c^k aus τ^k enthalten ist und daher $c^{k-1} \subseteq c^k$ gilt.

2.3 Satz

Sind τ_1^k, τ_2^k zwei k -Ketten auf G , so gilt:

$$\partial(\tau_1^k + \tau_2^k) = \partial\tau_1^k + \partial\tau_2^k, \quad k = 1, \dots, p.$$

Beweis:

Zunächst setzen wir voraus, daß τ_1^k und τ_2^k keine gemeinsame k -Zelle enthalten.

Sei $c^{k-1} \in \partial(\tau_1^k + \tau_2^k)$. c^{k-1} ist in einer ungeraden Anzahl u von k -Zellen aus $\tau_1^k + \tau_2^k$ enthalten; etwa in n_1 Zellen von τ_1^k und n_2 Zellen von τ_2^k ; $n_1 + n_2 = u$.

Sei etwa n_1 gerade, n_2 ungerade (wären n_1 und n_2 gerade, so wäre auch u als Summe zweier gerader Zahlen gerade). Dann haben wir: $c^{k-1} \in \partial \tau_1^k$, $c^{k-1} \notin \partial \tau_2^k$, somit: $c^{k-1} \in \partial \tau_1^k + \partial \tau_2^k$.

Sei umgekehrt $c^{k-1} \in \partial \tau_1^k + \partial \tau_2^k$ und etwa $c^{k-1} \in \partial \tau_1^k$, $c^{k-1} \notin \partial \tau_2^k$, (wäre $c^{k-1} \in \partial \tau_1^k, \partial \tau_2^k$, so gälte $c^{k-1} \notin \partial \tau_1^k + \partial \tau_2^k$.) Dann ist c^{k-1}

in einer ungeraden Anzahl von k -Zellen aus τ_1^k und in einer geraden Anzahl von k -Zellen aus τ_2^k enthalten. Also ist c^{k-1} in einer ungeraden Anzahl von k -Zellen aus $\tau_1^k + \tau_2^k$ enthalten.

(Sei n_1 die Anzahl der k -Zellen aus τ_1^k , in denen c^{k-1} enthalten ist. Dann ist n_1 ungerade. n_2 sei die Anzahl der k -Zellen aus τ_2^k , in denen c^{k-1} enthalten ist, so ist n_2 gerade. r sei die Anzahl der k -Zellen, in denen c^{k-1} enthalten ist und die in τ_1^k und τ_2^k liegen, dann ist $r \leq n_1, n_2$. c^{k-1} liegt nun in $n_1 - r + n_2 - r = n_1 + n_2 - 2r$ Zellen von $\tau_1^k + \tau_2^k$. $n_1 + n_2 - 2r \geq 0$ und ungerade, da $r \leq n_1, n_2$ und $2r$ gerade, $n_1 + n_2$ jedoch ungerade.)

Es folgt: $c^{k-1} \in \partial(\tau_1^k + \tau_2^k)$.

Enthalten die beiden Ketten τ_1^k, τ_2^k gemeinsame k -Zellen, so schreiben wir: $\tau_1^k = \tau_3^k + \tau^k, \tau_2^k = \tau_4^k + \tau^k$, wobei τ^k die Kette der gemeinsamen k -Zellen von τ_1^k und τ_2^k bedeutet. $\tau_3^k = \tau_1^k - \tau^k, \tau_4^k = \tau_2^k - \tau^k$. $\tau_3^k, \tau_4^k, \tau^k$ enthalten paarweise keine gemeinsamen k -Zellen, da $\tau^k = \tau_1^k \cap \tau_2^k, \tau_3^k = \tau_1^k \setminus \tau^k$ und $\tau_4^k = \tau_2^k \setminus \tau^k$.

Nach dem schon Bewiesenen ist dann:

$$\begin{aligned} \partial(\tau_1^k + \tau_2^k) &= \partial(\tau_3^k + \tau^k + \tau_4^k + \tau^k) = \partial(\tau_3^k + \tau_4^k) + \partial(\tau^k + \tau^k) = \\ &= \partial\tau_3^k + \partial\tau_4^k + \partial\tau^k + \partial\tau^k = \partial(\tau_3^k + \tau^k) + \partial(\tau_4^k + \tau^k) = \partial\tau_1^k + \partial\tau_2^k. \quad \square \end{aligned}$$

2.4 Folgerung

Für endlich viele k -Ketten gilt aufgrund vollständiger Induktion:

(1) $\partial(\tau_1^k + \dots + \tau_n^k) = \partial\tau_1^k + \dots + \partial\tau_n^k$.

(2) Ist $\tau^k = c_1^k + \dots + c_n^k$, so gilt insbesondere $\partial\tau^k = \partial c_1^k + \dots + \partial c_n^k$.

2.5 Satz

Für jede p -Kette auf \mathbb{G} ist $\partial[\tau^p] = \partial\tau^p$.

Beweis:

$$\partial[\tau^p] = \partial(\tau^p + \Omega^p) = \partial\tau^p + \partial\Omega^p = \partial\tau^p + 0^{p-1} = \partial\tau^p. \quad \square$$

2.6 Satz

Ist $\tau^k = \tau_1^k + \tau_2^k + \dots + \tau_n^k$ und sind die Träger der τ_j^k paarweise disjunkt, so ist $|\partial\tau_j^k| = |\partial\tau^k| \cap |\tau_j^k|$, $j=1,2,\dots,n$.

Beweis:

Aus $\partial\tau^k = \partial\tau_1^k + \partial\tau_2^k + \dots + \partial\tau_n^k$ folgt nach 1.42(1):

$$|\partial\tau^k| = |\partial\tau_1^k| \cup |\partial\tau_2^k| \cup \dots \cup |\partial\tau_n^k|, \text{ denn wegen } |\partial\tau_j^k| \subseteq |\tau_j^k|$$

sind die Träger der $\partial\tau_j^k$ paarweise disjunkt. Damit ist:

$$|\partial\tau^k| \cap |\tau_j^k| = (|\partial\tau_1^k| \cap |\tau_j^k|) \cup \dots \cup (|\partial\tau_j^k| \cap |\tau_j^k|) \cup \dots \cup (|\partial\tau_n^k| \cap |\tau_j^k|) = |\partial\tau_j^k|, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad \square$$

2.7 Folgerung

Ist τ_0^k eine Komponente von τ^k , so ist $|\partial\tau_0^k| = |\partial\tau^k| \cap |\tau_0^k|$.

Beweis:

Aus 1.46(3) folgt, daß τ^k die Summe modulo 2 ihrer Komponenten ist. Nach 1.46(1) sind die Träger dieser Komponenten disjunkt, somit ist 2.6 anwendbar. □

2.8 Satz

Für jede p-Kette τ^p auf \mathbb{G} gilt: $|\partial\tau^p| = \text{Rd } |\tau^p|$.

Für p-Ketten τ^p stimmt somit der Träger des algebraischen Randes mit dem topologischen Rand bzgl. \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p , falls τ^p beschränkt ist, oder die Betrachtungen in \mathbb{R}^p durchgeführt werden) des Trägers von τ^p überein.

Beweis:

Da $|\partial\tau^p| \subseteq |\tau^p|$ und $|\partial\tau^p| = |\partial[\tau^p]| \subseteq |[\tau^p]|$, ist einerseits

$$|\partial\tau^p| \subseteq |\tau^p| \cap |[\tau^p]| = |\tau^p| \cap \overline{|\tau^p|} = \text{Rd } |\tau^p|.$$

Sei nun $x \in \text{Rd } |\tau^p|$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt: $x \in |\tau^p|$, $x \in |[\tau^p]|$; $x \in c^p \in \tau^p$, $x \in c_0^p \in [\tau^p]$. Nach 1.35(2) liegt x in einer k-Zelle c^k , $k \leq p-1$. Falls $k = p-1$, folgt nach 1.28(6), daß c^p und c_0^p die beiden einzigen p-Zellen von \mathbb{G} sind, die $c^k = c^{p-1}$ enthalten und somit muß c^{p-1} ein Element von $\partial\tau^p$ sein, da die andere p-Zelle c_0^p auf \mathbb{G} , in welcher c^{p-1} ebenfalls enthalten ist, zu $[\tau^p]$ gehört. Sei nun $k \leq p-2$.

Sei $c^k = \bigcap_{j=1}^p z_j(c^k)$, wobei $j_1 < j_2 < \dots < j_{p-k}$ die Defektachsen

von c^k sind. Um zu zeigen, daß es eine c^k umfassende $(p-1)$ -Zelle c^{p-1} gibt, die in genau einer p-Zelle von τ^p enthalten ist, wollen wir einige Bezeichnungsweisen einführen, die uns das Leben sehr erleichtern werden.

Jede c^k enthaltende p-Zelle c^p läßt sich in der Form:

$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k\text{-mal}}, \underbrace{+, +, \dots, +}_{(p-k)\text{-mal}})$ als p-Tupel darstellen, wobei die ersten

k Einser die regulären Zellenkomponenten von c^k vertreten, während an der $(k+s)$ -ten Stelle, $1 \leq s \leq p-k$, des p-Tupels jeweils entweder + oder - steht, je nachdem, ob c^p aus c^k durch Regularisierung nach oben (+) oder Regularisierung nach unten (-) in der j_s -ten Achse entsteht. Solche Tupel wollen wir "regulär" nennen. Wir sagen, das c^p repräsentierende reguläre Tupel wird in der $(k+s)$ -ten Stelle, $1 \leq s \leq p-k$, entregularisiert, wenn wir an der $(k+s)$ -ten Stelle statt + oder - das Zeichen "0" hinschreiben. Die 0 soll hierbei den Prinzipal $z_{j_s}(c^k)$ vertreten. Offenkundig repräsentiert jedes in der r-ten Stelle ($r > k$) entregularisierte p-Tupel eine c^k umfassende $(p-1)$ -Zelle. Solche in einer Stelle entregularisierte p-Tupel wollen wir defekte Tupel nennen.

Umgekehrt wird das defekte Tupel $t = (1, \dots, 1, +, +, \dots, +, 0, +, \dots, +)$ nach oben regularisiert, falls die 0 durch +, es wird nach unten regularisiert, falls die 0 durch - ersetzt wird. Die aus t dergestalt entstehenden regulären Tupel wollen wir das obere bzw. das untere Regularisat von t nennen. Falls nun T die Gesamtheit aller regulären Tupel bezeichnet und K eine Element der Potenzmenge von T mit folgender Eigenschaft ist: das Tupel $t = (1, 1, \dots, 1, +, +, \dots, +)$ liegt in K und für jedes in K gelegene reguläre Tupel t_1 gilt, daß, falls t_0 ein aus t_1 hervorgehendes defektes Tupel ist, auch das von t_1 verschiedene Regularisat von t_0 zu K gehört; dann ist $K = T$.

(A)

Dies sieht man sehr leicht ein. Sei t_2 ein beliebiges reguläres Tupel. Falls an den $(k+i_j)$ -ten Stellen, $1 \leq j \leq m$, $m \leq p-k$, von t_2 - steht, so erhält man t_2 aus t dadurch, daß t zunächst an der $(k+i_1)$ -ten Stelle entregularisiert wird; das so entstandene defekte Tupel t' wird nach unten regularisiert und es entsteht das reguläre Tupel t_{i_1} , das voraussetzungsgemäß auch zu K gehören muß. t_{i_1} wird nun in der $(k+i_2)$ -ten Stelle entregularisiert und das so entstehende defekte Tupel nach unten regularisiert. Wir erhalten das reguläre Tupel t_{i_2} usw. Nach m Schritten sind wir somit, in der angegebenen Weise fortfahrend, bei t_2 angelangt. Da t_2 aus T beliebig war, folgt somit die Behauptung.

Falls K_1 die Klasse aller regulärer Tupel bezeichnet, welche c^k umfassende p -Zellen $c^p \in \tau^p$ darstellen, K_2 diejenige Klasse regulärer Tupel, welche c^k umfassende p -Zellen $c^p \in [\tau^p$ repräsentieren, so gilt, wegen $c^k = c^p \cap c_0^p$, $c^p \in \tau^p$, $c_0^p \in [\tau^p$, daß beide Klassen nicht leer sind und somit keine der beiden Klassen mit T übereinstimmen kann. Wegen $\tau^p \cap [\tau^p = \emptyset$ gilt: $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Da jede p -Zelle, die c^k umfaßt, entweder zu τ^p oder $[\tau^p$ gehört, gilt $K_1 \cup K_2 = T$. Somit enthält mindestens eine, etwa K_1 , das Tupel $(1, 1, \dots, 1, +, +, \dots, +)$. Gäbe es nun keine $(p-1)$ -Zelle, die c^k enthält und in genau einer durch ein Tupel aus K_1 repräsentierten p -Zelle von τ^p enthalten wäre, so müßte jede $(p-1)$ -Zelle, die aus $c^p \in \tau^p$, $c^p \supseteq c^k$, dadurch entstehen, daß c^p in einer Defektachse von c^k so entregularisiert wird, daß an Stelle der regulären Zellenkomponente $Z_j(c^p)$ die Defektkomponente $Z_j(c^k)$ tritt, bei der Regularisierung in der j -ten Achse in deren Verlauf $Z_j(c^k)$ durch $-Z_j(c^p)$ ($= -Q_j$, falls $Z_j(c^p) = +Q_j$ und umgekehrt) ersetzt wird, wiederum eine p -Zelle c_1^p mit $c^k \subseteq c_1^p \in \tau^p$ liefern. In die Sprache der Tupel übersetzt bedeutet dies aber, daß K_1 gerade die Voraussetzungen an K im obigen Hilfssatz (A) erfüllt und deshalb mit T übereinstimmen müßte, im Widerspruch dazu, daß $K_1 = T \setminus K_2$, $K_2 \neq \emptyset$.

Es gibt somit eine $(p-1)$ -Zelle c_0^{p-1} aus $\partial\tau^p$, die c^k umfaßt, woraus $x \in c^k \subseteq c_0^{p-1} \in \partial\tau^p$ folgt. Somit haben wir $x \in |\partial\tau^p|$, woraus sich wiederum, da x aus $\text{Rd}|\tau^p|$ beliebig war, $\text{Rd}|\tau^p| \subseteq \subseteq |\partial\tau^p|$ ergibt.

Auch hier ist es wieder wesentlich, daß p -Ketten betrachtet werden, da für jede k -Kette, $k < p$, $|\tau^k|$ eine abgeschlossene Teilmenge der in Z^p nirgendsdichten Menge $|G|$ ist. Somit ist $|\tau^k|$ selbst abgeschlossen und nirgendsdicht und stimmt deshalb nach I 1.37.2 mit seinem topologischen Rand bzgl. Z^p überein. Der Satz 2.8 bleibt auch richtig, wenn wir unsere Betrachtungen auf \mathbb{R}^p beschränken.

2.9 Definition

G sei ein Gitter in Z^p (\mathbb{R}^p).

Ein k -Zyklus \mathfrak{Z}^k auf G ist für $k=1, 2, \dots, p$ eine k -Kette auf G , deren algebraischer Rand die Nullkette ist; $\partial\mathfrak{Z}^k = 0^{k-1}$.

Ein 0 -Zyklus \mathfrak{Z}^0 ist eine 0 -Kette mit einer geraden Anzahl von 0 -Zellen.

2.10 Bemerkung

Jede Summe modulo 2 von k-Zyklen ist wieder ein k-Zyklus nach 2.3, im Falle $k \geq 1$.

Falls \mathfrak{z}_1^0 und \mathfrak{z}_2^0 zwei 0-Zyklen sind, so enthält \mathfrak{z}_1^0 $2n_1$, $n_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und \mathfrak{z}_2^0 $2n_2$, $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 0-Zellen. Falls r wiederum die Anzahl der 0-Zellen in $\mathfrak{z}_1^0 \cap \mathfrak{z}_2^0$ bezeichnet, haben wir: $0 \leq r \leq 2n_1, 2n_2$. $\mathfrak{z}_1^0 + \mathfrak{z}_2^0$ enthält $0 \leq 2n_1 + 2n_2 - 2r = 2(n_1 + n_2 - r)$ 0-Zellen, ist somit ebenfalls ein 0-Zyklus.

2.11 Satz

Die Komponenten \mathfrak{z}_j^k eines Zyklus \mathfrak{z}^k sind Zyklen, $k = 1, \dots, p$.

Beweis:

Nach 2.7 und 1.41(2)(3) haben wir:

$$|\partial \mathfrak{z}_j^k| = |\partial \mathfrak{z}^k| \cap |\mathfrak{z}_j^k| = |o^{k-1}| \cap |\mathfrak{z}_j^k| = \emptyset. \text{ Somit gilt: } \partial \mathfrak{z}_j^k = o^{k-1}. \quad \square$$

2.12 Satz (Entspricht Theorem 18.1, p. 131, NEWMAN) (Kettenränderzyklensatz)

- (1) Der algebraische Rand jeder k-Zelle c^k , $k \geq 1$, des Gitters \mathbb{G} in \mathbb{Z}^p ist ein (k-1)-Zyklus.
- (2) Der algebraische Rand jeder k-Kette, $k \geq 1$, ist ein (k-1)-Zyklus.

Beweis:

(1) Sei $c = c^1$ eine 1-Zelle des Gitters \mathbb{G} in \mathbb{Z}^p , d.h. c^1 besitzt genau ein reguläres Koordinatenintervall K_i ; es gilt nun drei Fälle zu unterscheiden:

- 1. K_i ist nach unten unbeschränkt, nach oben beschränkt. In diesem Fall enthält c den Punkt w als eine 0-Zelle und die durch Entregularisierung nach oben in der i-ten Achse entstehende 0-Zelle c^0 . Offenkundig sind w und c^0 die einzigen 0-Zellen, die in c^1 enthalten sind. Somit ist c^1 ein 0-Zyklus.
- 2. K_i ist nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt. Ganz analog, wie im Fall 1 sind w und die durch Entregularisierung von c nach unten in der i-ten Koordinate entstehende 0-Zelle die einzigen in c enthaltenen 0-Zellen; wiederum ist c^1 ein 0-Zyklus.
- 3. K_i ist beschränkt. Somit $K_i = [\downarrow_j, \downarrow_{j+1}]$, $\downarrow_j, \downarrow_{j+1} \in B_i$. In diesem Fall ist c^1 in der i-ten Koordinate sowohl nach oben, wie auch nach unten entregularisierbar und wir erhalten wiederum daß c^1 ein Zyklus ist, da c in keiner von i verschiedenen Koordinate entregularisierbar ist und somit die aus c durch Entregularisierung nach oben, bzw. nach unten, entstehenden beschränkten 0-Zellen die einzigen in c enthaltenen 0-Zellen sind.

Sei nun $k \geq 1$.

Nach 1.28(5) kann die $(k-2)$ -Zelle c^{k-2} nur dann in c^k enthalten sein, wenn c^{k-2} durch Entregularisierung in zwei voneinander verschiedenen Regularitätsachsen von c^k aus c^k hervorgeht.

Sei nun c^{k-2} durch Entregularisierung in der i -ten und der s -ten, $i < s$, Koordinatenachse aus $c^k = \bigcap_{j=1}^p z_j(c^k)$, $k \geq 2$, k der $z_j(c^k)$ regulär, hervorgegangen.

D.h. $c^{k-2} = \bigcap_{j=1}^{i-1} z_j(c^k) \cap h_i \cap \bigcap_{j=i+1}^{s-1} z_j(c^k) \cap h_s \cap \bigcap_{j=s+1}^p z_j(c^k)$.

Dann sind:

$$c_1 = \bigcap_{j=1}^{i-1} z_j(c^k) \cap h_i \cap \bigcap_{j=i+1}^p z_j(c^k), \text{ bzw. } c_2 = \bigcap_{j=1}^{s-1} z_j(c^k) \cap h_s \cap \bigcap_{j=s+1}^p z_j(c^k)$$

nach 1.28(5) zwei $(k-1)$ -Zellen, für welche $c^{k-2} \subseteq c_1, c_2 \subseteq c^k$

gilt. Somit: $c_1, c_2 \in \partial c^k, c^{k-2} \in \partial c_1, \partial c_2$.

$$c'_1 = \bigcap_{j=1}^{i-1} z_j(c^k) \cap h_i \cap \bigcap_{j=i+1}^{s-1} z_j(c^k) \cap (-z_s(c^k)) \cap \bigcap_{j=s+1}^p z_j(c^k),$$

$$\text{wobei } -z_s(c^k) = \begin{cases} -Q_s, & \text{falls } z_s(c^k) = +Q_s \\ +Q_s, & \text{falls } z_s(c^k) = -Q_s \end{cases}, \quad 1 \leq s \leq p \text{ und}$$

$$c'_2 = \bigcap_{j=1}^{i-1} z_j(c^k) \cap (-z_i(c^k)) \cap \bigcap_{j=i+1}^{s-1} z_j(c^k) \cap h_s \cap \bigcap_{j=s+1}^p z_j(c^k)$$

sind zwar auch $(k-1)$ -Zellen, welche c^{k-2} umfassen, aber, da $-z_j(c^k) \not\subseteq z_j(c^k)$ und $z_j(c^k) \not\subseteq -z_j(c^k)$ für alle j , in denen c^k regulär ist, gilt nach 1.22: $c'_1, c'_2 \not\subseteq c^k$, somit: $c'_1, c'_2 \notin \partial c^k$.

Jeder von i und s verschiedene Defektindex von c^{k-2} ist auch ein Defektindex von c^k , so, daß jede aus c^{k-2} durch Regularisierung in einer von der x_i - bzw. x_s -Achse verschiedenen Defektachse x_r aus c^{k-2} hervorgegangene $(k-1)$ -Zelle c' wiederum nicht in c^k

enthalten sein kann, da $h_r = z_r(c^k) \subset z_r(c')$, jedoch $h_i = z_i(c') \subset$

$$\subset z_i(c^k), h_s = z_r(c') \subset z_s(c^k).$$

$c_1, c_2 \in \partial c^k, c_1 \neq c_2$, sind somit die einzigen $(k-1)$ -Zellen auf G für welche $c^{k-2} \subseteq c_1, c_2 \subseteq c^k$ gilt.

Da $|\partial(\partial c^k)| \subseteq |\partial c^k| \subseteq |c^k|$ gilt, muß jede $(k-2)$ -Zelle von ∂c^k ganz in $|c^k|$ enthalten sein. Somit gibt es genau zwei verschiedene $(k-1)$ -Zellen von ∂c^k , in denen jede $(k-2)$ -Zelle von $\partial(\partial c^k)$ enthalten ist. Daher ist ∂c^k ein $(k-1)$ -Zyklus.

(2) folgt sofort aus (1) und 1.39(3) und 2.4, 2.10. □

Satz 2.12 gilt für beschränkte 1-Zellen, 1-Ketten, deren Träger in \mathbb{R}^p enthalten ist und für beliebige k-Zellen, k-Ketten, falls $k \geq 2$.

Führten wir unsere Betrachtungen *nicht* in \mathbb{Z}^p aus, so wäre der Rand einer *unbeschränkten* 1-Zelle kein 0-Zyklus, da jede unbeschränkte 1-Zelle nur *eine* beschränkte 0-Zelle enthält.

2.13 Satz

A sei eine Teilmenge des \mathbb{Z}^p und τ^k , $k=1,2,\dots,p$, sei eine k-Kette auf G mit $|\tau^k| \subseteq A$.

Ist C eine Komponente von A und τ_o^k die Kette derjenigen k-Zellen von τ^k , die C treffen, und ist ∂_o^{k-1} die Kette derjenigen k-Zellen von $\partial\tau^k$, die C treffen, so gilt: $\partial\tau_o^k = \partial_o^{k-1}$.

Beweis:

Bezeichnen wir mit τ_1^k die Kette der k-Zellen von τ^k , die C *nicht* treffen, so ist $\tau^k = \tau_o^k + \tau_1^k = \tau_o^k \cup \tau_1^k$, da $\tau_o^k \cap \tau_1^k = \emptyset$.

Nach 1.43 ist $|\tau_o^k| = |\tau^k| \cap C \subseteq C$. Somit gilt sicherlich:

$|\tau_o^k| \cap |\tau_1^k| = \emptyset$, da jede k-Zelle c^k aus τ_1^k ganz in $\mathbb{Z}^p \setminus C$ enthalten ist. Nach 2.6 gilt somit: $|\partial\tau_o^k| = |\partial\tau^k| \cap |\tau_o^k| =$

$= |\partial\tau^k| \cap |\tau^k| \cap C = |\partial\tau^k| \cap C$. Anwendung von 1.43 auf $\partial\tau^k$ liefert: $|\partial_o^{k-1}| = |\partial\tau^k| \cap C = |\partial\tau_o^k|$. 1.41(2) liefert: $\partial_o^{k-1} = \partial\tau_o^k$. □

2.14 Satz

Bilden die beiden voneinander verschiedenen Gitterpunkte $x=c_1^o$, $y=c_2^o$ den Rand einer 1-Kette τ^1 auf G, ($x=w$ bzw. $y=w$ ist auch zugelassen!), so sind sie zusammenhängend in $|\tau^1|$.

Beweis:

Angenommen, c_1^o und c_2^o sind *nicht* zusammenhängend in $|\tau^1|$.

Als zusammenhängende Teilmenge von $|\tau^1|$ ist c_1^o im Träger $|\tau_o^1|$ einer Komponente τ_o^1 von τ^1 enthalten (1.46(2)). Aufgrund der

Antithese ist c_2^o nicht in $|\tau_o^1|$. Nach 2.7 wird daher $|\partial\tau_o^1| =$

$|\partial\tau^1| \cap |\tau_o^1| = (c_1^o \cup c_2^o) \cap |\tau_o^1| = (c_1^o \cap |\tau_o^1|) \cup (c_2^o \cap |\tau_o^1|) = c_1^o =$

$= |c_1^o|$. $\partial\tau_o^1$ besteht somit nur aus der einen 0-Zelle c_1^o und ist somit kein Zyklus im Widerspruch zu 2.12(1). □

2.15 Satz

Ω^p und O^p sind die einzigen p-Zyklen auf G. G ein Gitter in \mathbb{Z}^p oder \mathbb{R}^p .

Beweis:

1. Variante:

Z^p sei ein p -Zyklus auf G . wegen $\partial Z^p = 0^{p-1}$ ist nach 2.8 $Rd |Z^p| = |\partial Z^p| = \emptyset$. Aufgrund von I 1.15 muß daher $|Z^p|$ gleichzeitig offen und abgeschlossen sein und, da Z^p (\mathbb{R}^p) zusammenhängt, entweder gleich Z^p (\mathbb{R}^p) oder gleich \emptyset sein. Somit: entweder $|Z^p| = Z^p$ (\mathbb{R}^p) = $|\Omega^p|$ oder $|Z^p| = \emptyset = |0^p|$; somit: $Z^p = \Omega^p$ oder $Z^p = 0^p$.

2. Variante:

Sei τ^p eine p -Kette auf G , welche von Ω^p und 0^p verschieden ist. Dann muß $\emptyset \subset |\tau^p| \subset Z^p$ (\mathbb{R}^p) gelten. Da Z^p (\mathbb{R}^p) zusammenhängt, gilt: $\emptyset \neq Rd |\tau^p| = |\partial \tau^p|$ (2.8), da nach I 1.16 jede nichtleere, echte Teilmenge eines zusammenhängenden Raumes nichtleeren Rand besitzt. Somit haben wir: $0^{p-1} \subset \partial \tau^p$. □

Aus denselben Gründen, aus denen sich Satz 2.8 nicht auf k -Ketten τ^k , $k < p$, verallgemeinern ~~läßt~~ läßt sich Satz 2.15 nicht auf kleinere Dimensionen als p übertragen, weil Satz 2.8 in beiden Varianten ganz entscheidend in den Beweis von Satz 2.15 eingeht.

2.16 Satz

τ_1^p sei eine p -Kette auf G .

Mit $\tau_2^p := [\tau_1^p]$ und $Z^{p-1} := \partial \tau_1^p = \partial \tau_2^p$ (vergl. 2.5) gilt dann:

- (1) $Rd |\tau_{1/2}^p| = Rd (|\tau_{1/2}^p|^\circ) = |\tau_1^p| \cap |\tau_2^p| = |Z^{p-1}|$.
- (2) $|\tau_2^p|^\circ = [|\tau_1^p|]$.
- (3) $|\tau_1^p|^\circ, |Z^{p-1}|, |\tau_2^p|^\circ$ bilden eine Zerlegung von Z^p (\mathbb{R}^p).
- (4) Ist $A \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) eine zusammenhängende Menge, welche $|Z^{p-1}|$ nicht trifft, so gilt: $A \subseteq |\tau_1^p|^\circ$ oder $A \subseteq |\tau_2^p|^\circ$.

Beweis:

(1) Unter Beachtung von 1.42(2) und 2.8 finden wir:

$$Rd |\tau_{1/2}^p|^\circ = \overline{|\tau_{1/2}^p|^\circ} - |\tau_{1/2}^p|^\circ = |\tau_{1/2}^p| - |\tau_{1/2}^p|^\circ = \overline{|\tau_{1/2}^p|} - |\tau_{1/2}^p|^\circ = Rd |\tau_{1/2}^p| = |\partial \tau_{1/2}^p| = |Z^{p-1}|.$$

$$|\tau_1^p| \cap |\tau_2^p| = \overline{|\tau_1^p|} \cap |\tau_2^p| = \overline{|\tau_1^p|} \cap [|\tau_1^p|] = Rd |\tau_1^p|.$$

(2) $[|\tau_2^p|^\circ] = \overline{|\tau_2^p|^\circ} = [|\tau_2^p|] = |\tau_1^p|, |\tau_2^p|^\circ = [|\tau_1^p|]$.

(3) folgt aus dem bereits Bewiesenen, denn bekanntlich bilden mit $A = |\tau_1^p|$ die Mengen $A^\circ, Rd A, ([A])^\circ$ eine Zerlegung des Z^p (\mathbb{R}^p); siehe Kuhn, Topologie, 5.3, p. 36.

(4) folgt aus (3) und (1), sowie der Tatsache, daß, falls A sowohl $|\tau_1^p|^\circ$, als auch $|\tau_2^p|^\circ$ träge, A auch $\text{Rd } |\tau_1^p|^\circ = |\tau_1^{p-1}|$ treffen müßte, da $|\tau_2^p|^\circ \subseteq [(|\tau_1^p|^\circ)]$; siehe auch: KUHN, Topologie, 1.8, p. 119. □

2.17 Schlußbemerkung

Alle Aussagen über Ketten, Träger von Ketten etc., die ab 1.37 bis jetzt aufgestellt wurden, sind gültig unabhängig davon, ob den Betrachtungen Z^p oder \mathbb{R}^p zugrunde liegt, ob die Gitter in Z^p oder \mathbb{R}^p liegen, mit der Ausnahme, daß in Satz 2.12 eine 1-Zelle oder eine 1-Kette nur dann in \mathbb{R}^p einen 0-Zyklus als algebraischen Rand besitzt, wenn die 0-Zelle bzw. die 0-Kette beschränkt ist.

3. Verfeinerung von Gittern, Nullhomologe Zyklen, Fundamentallemma

3.1 Definition

G und G^* seien zwei Gitter in Z^P (R^P).

Gilt $G \subseteq G^*$, so nennen wir G^* eine Verfeinerung von G ; G wollen wir Untergitter von G^* nennen; im Falle $G \subset G^*$ heiße G^* eine echte Verfeinerung von G . Da im Falle, daß G und G^* Gitter in Z^P sind, $w \in G$, G^* gilt, ist G^* eine Verfeinerung von G , wenn alle Prinzipale von G auch in G^* liegen; G^* ist echte Verfeinerung von G , wenn G^* *alle* Prinzipale aus G enthält und zusätzlich mindestens einen, etwa h_i^α , welcher *nicht* in G enthalten ist, umfaßt. Wir sagen dann " G wird durch h_i^α in der i -ten Koordinate (Koordinatenachse) verfeinert" bzw. " G^* verfeinert G in der i -ten Koordinate (Koordinatenachse)"; dieser Sachverhalt ist offenkundig mit $G_i \subset G_i^*$ gleichbedeutend. Wegen der Transitivität der Inklusion ist jede Verfeinerung von G^* auch eine Verfeinerung von G und, da die Vereinigung zweier Gitter wiederum ein Gitter ist, besitzen je zwei Gitter G_1, G_2 in Z^P (R^P) eine gemeinsame Verfeinerung, nämlich $G_1 \cup G_2$.

3.2 Bemerkungen

Seien G, G^* zwei Gitter in Z^P (R^P) und G^* eine Verfeinerung von G .

- (1) Wenn $B_i = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_i}\}$, $B_i^* = \{\alpha_1^*, \dots, \alpha_{n_i}^*\}$ die Mengen der Bestimmungszahlen der i -ten Teilgitter von G bzw. G^* bezeichnen, so haben wir offenkundig: G^* ist Verfeinerung von G genau dann, wenn für alle $i=1, \dots, p$ $B_i \subseteq B_i^*$ gilt; G^* ist echte Verfeinerung von G genau dann, wenn zusätzlich für mindestens ein j aus $\{1, \dots, p\}$ $B_j \subset B_j^*$ gilt.
- (2) Seien G, G^* zwei Gitter in Z^P (R^P) und sei $B_i \subseteq B_i^*$, dabei möge B_i die Menge der Bestimmungszahlen von G_i , B_i^* die Menge der Bestimmungszahlen von G_i^* bezeichnen (die Elemente aus B_i werden mit " α ", diejenigen von B_i^* mit " β " bezeichnet; an die α bzw. β angehängte Indizes sollen die Ordnungsindizes der α bzw. β bzgl. B_i bzw. B_i^* bedeuten, n_i sei der grte Ordnungsindex bzgl. B_i , m_i der grte bzgl. B_i^*); dann gilt: $\beta_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_{n_i} \leq \beta_{m_i}$; falls $\beta = \beta_k$, $1 \leq k \leq m_i$, aus B_i größer oder gleich α_1 ist, bezeichne $-\alpha(\beta) = \alpha_j$, $1 \leq j \leq n_i$, das größte Element aus B_i , das kleiner oder gleich β ist. In diesem Fall gilt: $j \leq k$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn β in B_i liegt und für alle $i=1, \dots, k=j$ $\alpha_i = \beta_i$ gilt; im Falle $j > 1$ haben wir: $\alpha_{j-1} \leq \beta_{k-1}$.

Liegt β zusätzlich noch in $B_i^* \setminus B_i$, so ist $\alpha_j \leq \beta_{k-1}$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn α_j bzgl. B_i^* der unmittelbare Vorgänger von $\beta = \beta_k$ ist.

Im Falle, daß $\beta = \beta_k$, $1 \leq k \leq m_i$, in B_i^* liegt und $\beta \leq \alpha_{n_i}$ gilt, bezeichne $+\alpha(\beta) = \alpha_j$, $1 \leq j \leq n_i$, das kleinste Element aus B_i , das größer oder gleich β ist. In diesem Falle gilt: $j \leq k$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn β in B_i liegt und für alle $i=1, \dots, k=j$ $\alpha_i = \beta_i$ gilt; außerdem haben wir:

$\beta_{k+1} \leq \alpha_{j+1}$. Gilt zusätzlich: β liegt in $B_i^* \setminus B_i$, so ist $\beta_{k+1} \leq \alpha_j$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn α_j bzgl. B_i^* der unmittelbare Nachfolger von β ist.

Falls $\beta = \beta_k$ aus B_i kleiner als α_1 ist, gilt: $\beta_{k+1} \leq \alpha_1$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn α_1 bzgl. B_i^* der unmittelbare Nachfolger von β ist. Ebenso haben wir im Falle $\beta = \beta_k > \alpha_{n_i}$:

$\beta_{k-1} \geq \alpha_{n_i}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn α_{n_i} bzgl. B_i^* der unmittelbare Vorgänger von β ist.

Die Negation irgendeiner der obigen Aussagen von (2) zöge sofort die Existenz eines γ aus B_i nach sich, welches nicht zu B_i^* gehört, woraus $B_i \not\subseteq B_i^*$ folgte.

- (3) a) Aus (2) folgt sofort, daß das Variationsintervall jeder Zellenkomponente Z_i^* von G^* , die entweder regulär ist, oder deren Bestimmungszahl nicht zu B_i gehört, falls Z_i^* eine Prinzipalkomponente ist, im Variationsintervall genau einer regulären Zellenkomponente Z_i von G enthalten ist. Wir sagen: " Z_i^* bestimmt Z_i ", bezeichnet mit: $Z_i = G(Z_i^*)$. Falls Z_i^* aus G mit einer Prinzipalkomponente Z_i von G übereinstimmt, setzen wir: $Z_i =: G(Z_i^*)$, gesprochen " Z_i wird von Z_i^* bestimmt". Damit besitzt die Sprechweise: "Die Zellenkomponente Z_i^* von $G^* - G^*$ eine Verfeinerung von $G -$ bestimmt die Zellenkomponente Z_i von G . ($Z_i = G(Z_i^*)$)" stets eine wohldefinierte Bedeutung.

Im Falle $V(Z_i^*) = [-\alpha, \beta_1], (-\alpha, \beta_1], [\beta_k, \beta_{k+1}], \beta_{k+1} \leq \alpha_1$ gilt: $V(G(Z_i^*)) = [-\alpha, \beta_1]$ bzw. $(-\alpha, \beta_1]$, je nachdem, ob wir unsere Betrachtungen in Z^p oder \mathbb{R}^p anstellen. Entsprechend haben wir, falls $V(Z_i^*) = [\beta_{m_i}, \alpha], (\beta_{m_i}, \alpha], [\beta_k, \beta_{k+1}], \beta_k \geq \alpha_{n_i}$: $V(G(Z_i^*)) = [\alpha_{n_i}, \alpha], (\alpha_{n_i}, \alpha]$; falls nun $V(Z_i^*) = [\beta_k, \beta_{k+1}], (\beta_k, \beta_{k+1})$, $\beta_{k+1} > \alpha_1$ und $\beta_k < \alpha_{n_i}$, somit $\beta_k \geq \alpha_1$ und $\beta_{k+1} \leq \alpha_{n_i}$ ($\alpha_1 \leq \beta_k \leq \beta_{k+1} \leq \alpha_{n_i}$) gilt, setze: $V(G(Z_i^*)) = [-\alpha(\beta_k), +\alpha(\beta_{k+1})]$ ($V(G(Z_i^*)) = [-\alpha(\beta_k), +\alpha(\beta_k)]$); die so eingeführten $V(G(Z_i^*))$ erfüllen offenkundig die Behauptung.

- b) Umgekehrt umfaßt jede Zellenkomponente Z_i von G eine Zellenkomponente Z_i^* von G^* . Diese ist, falls Z_i keine Prinzipalkomponente von G ist, im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, kann jedoch im Falle, Z_i regulär, als reguläre Zellenkomponente gewählt werden; (falls etwa $V(Z_i) = [\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, kann $V(Z_i) = [\alpha_j, \beta]$, β der unmittelbare Nachfolger von α_j bzgl. B_i^* gewählt werden.)
- (4) Jede k -Zelle c^k auf G umfaßt mindestens eine k -Zelle $*c^k$ von G^* , da c^k der Durchschnitt von k regulären und $(p-k)$ Prinzipalkomponenten ist und jede Prinzipalkomponente von G auch eine solche von G^* , jede reguläre Zellenkomponente von G eine solche von G^* umfaßt. ((3)b).
- (5) Sei $*c^k$ eine k -Zelle von G und $*c^k \subseteq c_1^k, c_2^k, c_1^k$ und c_2^k seien k -Zellen von G . Dann gilt $c_1^k = c_2^k$.
 Wäre $c_1^k \neq c_2^k$, so wäre $\emptyset \neq *c^k \subseteq c_1^k \cap c_2^k = c^r$ eine r -Zelle von G mit $r \leq k-1$ (1.35(2)). Somit sind $p-r \geq p-k+1$ der Zellenkomponenten von c^r Prinzipalkomponenten. Daher muß für mindestens $p-k+1 > p-k$ der Koordinaten x_i jedes Punktes x aus $*c^k$ gelten, daß $x_i = \alpha_i$, im Widerspruch zur Tatsache, daß, da $*c^k$ eine k -Zelle von G^* ist, nur $(p-k)$ der Koordinaten x_i eines Punktes x aus $*c^k$ konstant sein können, während die übrigen k Koordinaten in einem in den reellen Zahlen enthaltenen Intervall variieren.

3.3 Definition

G^* sei eine Verfeinerung von G und τ^k sei eine k -Kette auf G . Das System $*\tau^k$ aller k -Zellen $*c^k$ von G^* , die in einer k -Zelle c^k aus τ^k enthalten sind, heißt die Verfeinerung von τ^k bzgl. G^* .

Im Falle $\tau^k = \{c^k\}$, $*\tau^k = \{c^k\}$, spricht man von der Verfeinerung der Zelle c^k .

Offensichtlich gilt: $*\tau^0 = \tau^0$ für jede 0-Kette τ^0 auf G .

Die soeben vereinbarten Sprechweisen sind unabhängig davon, ob die Betrachtung in Z^P oder \mathbb{R}^P durchgeführt wird.

3.3.1 Satz

Sei G ein Gitter in Z^P (\mathbb{R}^P), G^* sei eine Verfeinerung von G , G' sei eine Verfeinerung von G^* ($G \subseteq G^* \subseteq G'$) und τ^k sei eine k -Kette auf G . $*\tau^k$ bezeichne die Verfeinerung von τ^k auf G^* , $'\tau^k$ die Verfeinerung von τ^k auf G' . Dann gilt:

$'(*\tau^k) = '\tau^k$. (Die Verfeinerung von τ^k auf G' stimmt mit der Verfeinerung von $*\tau^k$ auf G' überein.)

Beweis:

Sei c^k eine k -Zelle von G mit $c^k \in (*\tau^k)$. D.h. es gibt eine k -Zelle $*c^k$ von G mit $*c^k \in *\tau^k$, $c^k \subseteq *c^k$. Aufgrund der Definition von $*\tau^k$ gibt es eine k -Zelle c^k von τ^k , c^k eine Zelle auf G , mit $*c^k \subseteq c^k \in \tau^k$. Insgesamt: $c^k \subseteq *c^k \subseteq c^k \in \tau^k$, somit $c^k \subseteq c^k \in \tau^k$ und deshalb gilt $c^k \in \tau^k$. Da c^k aus $(*\tau^k)$ beliebig war, haben wir: $(*\tau^k) \subseteq \tau^k$.

Sei umgekehrt c^k aus τ^k . D.h.: Es gibt eine k -Zelle c^k auf G mit $c^k \subseteq c^k \in \tau^k$. Nach 3.2(4) gibt es eine k -Zelle $*c^k$ auf G mit $c^k \subseteq *c^k$; ebenfalls nach 3.2(4) ist $*c^k$ in einer k -Zelle c_1^k von G enthalten. Da $c^k \subseteq c^k$ und $c^k \subseteq *c^k \subseteq c_1^k$, somit $c^k \subseteq c_1^k$, c_1^k gilt, haben wir nach 3.4(5): $c_1^k = c^k \in \tau^k$. Somit gilt: $*c^k \in *\tau^k$, $c^k \in (*\tau^k)$ und wegen der Beliebigkeit von $c^k \in \tau^k$ haben wir: $\tau^k \subseteq (*\tau^k)$. □

3.3.2 Satz

Sei H irgendeine Aussage über Verfeinerungen von k -Ketten. Sie besitze folgende Eigenschaft: Falls τ^k eine k -Kette auf dem beliebigen Gitter G in \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p) ist, und G^* aus G durch Hinzunahme eines beliebigen Prinzipals $h \notin G$ entsteht, dann ist H für $*\tau^k$, die Verfeinerung von τ^k auf G^* gültig.

Dann gilt: H gilt für jede Verfeinerung τ^k von τ^k auf G' , G' eine beliebige Verfeinerung von G .

Beweis:

Sei G' eine echte Verfeinerung von G . Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach n , der Anzahl der Prinzipale in $G' \setminus G$ ($n = \text{card}(G' \setminus G)$). Wegen der Endlichkeit von G' und G muß auch $G' \setminus G$ endlich sein und die Behauptung folgt dann aus dem Induktionsbeweis für $n = \text{card}(G' \setminus G)$.

Falls G' aus G durch Hinzunahme eines einzigen nicht in G gelegenen Prinzipals entsteht, gilt H nach Voraussetzung für τ^k , die Verfeinerung von τ^k auf G' ; wegen $\text{card}(G' \setminus G) = 1$ ist die Induktion verankert. Sei \underline{G} eine Verfeinerung von G mit $\text{card}(\underline{G} \setminus G) = n$ und H gelte für $\underline{\tau}^k$, die Verfeinerung von τ^k auf \underline{G} . Da das Gitter \underline{G} , welches in der Voraussetzung über H auftritt, beliebig ist, muß H auch für $(\underline{\tau}^k)$, die Verfeinerung von τ^k auf \underline{G}' , welches aus \underline{G} durch Hinzunahme eines nicht in \underline{G} gelegenen Prinzipals entsteht, gelten. Nach 3.3.1 ist jedoch $(\underline{\tau}^k) = \tau^k$, τ^k die Verfeinerung von τ^k auf \underline{G}' . H gilt somit auch für τ^k . Wegen $\text{card}(\underline{G}' \setminus \underline{G}) = n+1$ ist somit der Induktionsschluß erbracht. □

3.3.3 Satz

Sei G ein Gitter in Z^P (R^P) und G^* eine Verfeinerung von G ; ferner sei c^k eine k -Zelle auf G . Dann gilt:

c^k ist die Vereinigung aller in c^k enthaltenen k -Zellen $*c^k$ von G^* . ($c^k = |\{ *c^k \}|$).

Beweis:

Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, daß G^* aus G durch Hinzunahme eines einzigen nicht in G enthaltenen Prinzipals entsteht. Aus 3.3.2 folgt dann der allgemeine Fall.

Sei also $c^k = \bigcap_{i=1}^p Z_i$ eine k -Zelle von G , die keine k -Zelle von G^* ist, und sei h_j^δ ein nicht

in G enthaltener Prinzipal. B_j sei die Menge der Bestimmungszahlen der Prinzipale aus G_j . Drei Fälle können auftreten:

1) $\delta < \delta_1$, 2) $\delta > \delta_{n_j}$, 3) $\delta_k < \delta < \delta_{k+1}$, $k \leq n_j - 1$, da $\delta \notin B_j$.

O.B.d.A. können wir uns auf den dritten Fall beschränken, da zum Beweis der beiden anderen Fälle nur offenkundige Abänderungen nötig sind.

Falls $Z_j \neq +Q_j^k = -Q_j^{k+1}$, ist c^k ebenfalls eine k -Zelle von G und wir sind fertig. Sei also $Z_j = +Q_j^k = +h_j^k \cap -h_j^{k+1} = (+h_j^k \cap -h_j^\delta) \cup$

$$\cup (+h_j^\delta \cap -h_j^{k+1}).$$

$:= +Q_j^\delta$
 $:= -Q_j^\delta$

$$c^k = \bigcap_{i=1}^p Z_i = \bigcap_{i=1}^{j-1} Z_i \cap Z_j \cap \bigcap_{i=j+1}^p Z_i = \bigcap_{i=1}^{j-1} Z_i \cap -Q_j^\delta \cap \bigcap_{i=j+1}^p Z_i \cup$$

$$\cup \bigcap_{i=1}^{j-1} Z_i \cap +Q_j^\delta \cap \bigcap_{i=j+1}^p Z_i = *c_1^k \cup *c_2^k. \quad := *c_1^k$$

$:= *c_2^k$

$*c_1^k$ und $*c_2^k$ sind die einzigen k -Zellen von G^* , die in c^k enthalten sind. Angenommen $*c^k$ sei eine von $*c_1^k, *c_2^k$ verschiedene k -Zelle von G , deren j -te Zellenkomponente $Z_j(*c^k)$ von $+Q_j^\delta, h_j^\delta$ verschieden ist. Dann ist jede Zellenkomponente $Z_i(*c^k)$ auch eine Zellenkomponente auf G , $*c^k$ ist somit eine k -Zelle auf G und trifft sich, da $*c^k \neq c^k$ gilt (c^k ist keine k -Zelle von G^* !), mit c^k höchstens in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Zelle von G , kann somit nicht in c^k enthalten sein.

Wäre $Z_j(*c^k) = h_j^\delta$, so müßte $*c^k$, da es eine k -Zelle ist, in einer Defektachse von c^k regulär sein, könnte somit wiederum nicht in c^k enthalten sein.

Sei nun o.B.d.A. $Z_i(*c^k) = +Q_j^k$. Dann muß für mindestens ein i aus $\{1, \dots, p\} \setminus \{j\}$ $Z_i(*c^k) \neq Z_i(c^k) = Z_i(c^k)$ sein, da $*c^k \neq c^k$.

Gälte nun $Z_i(*c^k) \not\subseteq Z_i(c^k) = Z_i(c^k)$, so gäbe es eine reelle Zahl λ und mindestens einen Punkt y aus $*c^k$ mit $y_i = \lambda$, während $x_i \neq \lambda$ für alle x aus c^k wäre. Somit könnte $*c^k \subseteq c^k$ nicht gelten.

Somit muß $Z_i(*c^k) \subseteq Z_i(c^k)$ sein. Da aber $Z_i(*c^k) \neq Z_i(c^k)$ ist, muß $Z_i(*c^k) \subset Z_i(c^k)$ sein. $Z_i(*c^k)$ ist eine Zellenkomponente von G , da $G_i^* = G_i$. Nach 1.17 muß daher $Z_i(*c^k)$ eine Prinzipalkomponente und $Z_i(c^k)$ eine reguläre Zellenkomponente sein. Da nun aber $*c^k$ eine k -Zelle von G ist, muß für irgendein $r \neq i, j$, für welches c^k defekt ist, $*c^k$ regulär sein. Wiederum kann $*c^k \subseteq c^k$ nicht gelten. □

3.4 Bemerkungen

(1) Für jede k -Kette τ^k gilt: $|\tau^k| = |*\tau^k|$, da $|\tau^k| = \bigcup_{c^k \in \tau^k} c^k = \bigcup_{c^k \in \tau^k} *c^k = |*\tau^k|$.

3.3.1 \uparrow $c^k \in \tau^k$ $*c^k \subseteq c^k$ $*c^k \subseteq c^k \in \tau^k$

(2) $\tau_1^k \subseteq \tau_2^k$ ist gleichbedeutend mit $*\tau_1^k \subseteq *\tau_2^k$. Insbesondere

ist $\tau_1^k = \tau_2^k$ äquivalent zu $*\tau_1^k = *\tau_2^k$. Denn nach (1) gilt:

$|\tau_1^k| = |*\tau_1^k|, |\tau_2^k| = |*\tau_2^k|$. Nach 1.41(2) ist $\tau_1^k \subseteq \tau_2^k$ gleichbedeutend mit $|\tau_1^k| \subseteq |\tau_2^k|$. Somit: $*\tau_1^k \subseteq *\tau_2^k \iff |*\tau_1^k| = |\tau_1^k| \subseteq |\tau_2^k| \subseteq |*\tau_2^k| = |\tau_2^k| \iff \tau_1^k \subseteq \tau_2^k$.

(1) 1.41(2)

3.5 Satz

G^* sei eine Verfeinerung von G und τ_1^k, τ_2^k seien zwei k -Ketten auf G . Dann gilt:

(1) $*(\tau_1^k + \tau_2^k) = *\tau_1^k + *\tau_2^k, *(\sum_{j=1}^n \tau_j^k) = \sum_{j=1}^n *\tau_j^k$.

(2) $*\partial \tau^k = \partial * \tau^k$ für $k \geq 1$.

Beweis:

(1) Sei $*c^k \in *(\tau_1^k + \tau_2^k)$. Also: $*c^k \subseteq c^k \in \tau_1^k + \tau_2^k$. Ist etwa $c^k \in \tau_1^k, \notin \tau_2^k$, so folgt: $*c^k \in *\tau_1^k$ und $*c^k \notin *\tau_2^k$. (Gälte $*c^k \in *\tau_2^k$, so hätten wir: $*c^k \subseteq c^k \in \tau_1^k, *c^k \subseteq c_1^k \in \tau_2^k$. Somit: $*c^k \subseteq c^k, c_1^k$. 3.2(2) liefert dann: $c^k = c_1^k, c^k \notin \tau_2^k, c^k = c_1^k \in \tau_2^k$. Dies ist jedoch ein Widerspruch!) Somit: $*c^k \in *\tau_1^k + *\tau_2^k$.

Sei nun $*c^k \in *\tau_1^k + *\tau_2^k$. O.B.d.A. $*c^k \in *\tau_1^k, \notin *\tau_2^k$. D.h. $*c^k \subseteq c^k \in \tau_1^k$, aber $*c^k \not\subseteq c_1^k, c_1^k \in \tau_2^k$ für alle $c_1^k \in \tau_2^k$. Hieraus folgt, daß

$c^k \notin \tau_2^k$, da sonst $*c^k \notin c^k$ gelten müßte. Somit: $c^k \in \tau_1^k + \tau_2^k$,
 $*c^k \subseteq c^k \in \tau_1^k + \tau_2^k$, deshalb: $*c^k \in *(\tau_1^k + \tau_2^k)$.

Die zweite Behauptung folgt sofort durch vollständige Induktion.

(2) Wir beweisen die Behauptung zunächst nur für für k -Zellen mit $k \geq 1$ und den Fall, daß G nur durch Hinzunahme eines einzigen nicht zu G gehörigen Prinzipals verfeinert wird. Wiederum sei h_j^δ der nicht zu G gehörige Prinzipal, der G verfeinert und $c^k = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c^k)$ eine k -Zelle auf G . Wenn B_j die Menge der Bestimmungszahlen der Prinzipale aus G_j bezeichnet, können wiederum die Fälle $\delta < \delta_1$, $\delta > \delta_{n_j}$, $\delta_r < \delta < \delta_{r+1}$ auftreten. Wiederum be-

schränken wir uns auf den dritten Fall. Sofern $Z_j(c^k) \neq +Q_j^r = -Q_j^{r+1}$, sind alle Zellenkomponenten von c^k auch Zellenkomponenten von G^* , c^k ist somit eine k -Zelle von G^* und sämtliche in c^k enthaltenen k -Zellen von G entstehen aus c^k durch Entregularisierung von c^k in einer Regularitätsachse. Die so entstandenen in c^k enthaltenen $(k-1)$ -Zellen besitzen wiederum nur Zellenkomponenten, die zugleich Zellenkomponenten von G und G^* sind, da auch eine Entregularisierung in der j -ten Achse niemals eine von h_j bestimmte Zellenkomponente von G^* liefert. Deshalb stimmt die Verfeinerung des Randes von c^k mit dem Rand von c^k überein und wir sind fertig.

Sei nun o.B.d.A. $Z_j(c^k) = +Q_j^r$. Wiederum, wie beim Beweis des Satzes 3.3.1 sei $+Q_j^\delta = +h_j^\delta \cap -h_j^{r+1}$, $-Q_j^\delta = -h_j^\delta \cap +h_j^r$. $*c_1^k$ sei ebenfalls die k -Zelle von G^* mit $Z_i(*c_1^k) = Z_i(c^k)$ für $i \neq j$ und $Z_j(*c_1^k) = -Q_j^\delta$, $*c_2^k$ sei die k -Zelle von G , deren Zellenkomponenten für $i \neq j$ mit denjenigen von c^k übereinstimmen und deren j -te gleich $+Q_j^\delta$ ist. Im Beweis von Satz 3.3.3 haben wir gezeigt, daß $c^k = *c_1^k + *c_2^k$. Somit haben wir:

(a) $\partial^* \{c^k\} = \partial(*c_1^k + *c_2^k) = \partial^*c_1^k + \partial^*c_2^k$ (2.3).

Sei $\pm *c_{1,i}^k$, $i \neq j$, (wegen der Bezeichnungsweise siehe: 1.28(4)) eine in $*c_1^k$ enthaltene $(k-1)$ -Zelle von G , welche aus $*c_1^k$ durch Entregularisierung in der i -ten Achse hervorgeht (+ bedeutet Entregularisierung nach oben, - Entregularisierung nach unten), dann kann $+*c_{1,i}^k$ nicht in $*c_2^k$ enthalten sein, da $Z_j(+*c_{1,i}^k) = Z_j(*c_1^k) = -Q_j^\delta \notin +Q_j^\delta = Z_j(*c_2^k)$; auch $-*c_{1,j}^k$, die k -Zelle von G , welche aus $*c_1^k$ durch Entregularisierung nach unten in der j -ten Achse hervorgeht, kann nicht in $*c_2^k$ enthalten sein, da $Z_j(-*c_{1,j}^k) = h_j^r$, $Z_j(*c_2^k) =$

$=+Q_j^{\delta}$ und $h_j^r \cap +Q_j = \emptyset$, da α_r , die Bestimmungszahl von h_j^r , echt kleiner als δ ist. Somit:

(b) $\pm^*c_{1,i}^k$, $i \neq j$, und $-^*c_{1,j}^k \in \partial^*c_1^k$, $\notin \partial^*c_2^k$. Daher sind diese beiden Zellen aus $\partial^*c_1^k + \partial^*c_2^k$. Genauso erhalten wir:

(c) $\pm^*c_{2,i}^k$, $i \neq j$, und $+^*c_{2,j}^k \in \partial^*c_2^k$, $\notin \partial^*c_1^k$ und somit $\in \partial^*c_1^k + \partial^*c_2^k$.
 $-^*c_{2,j}^k = +^*c_{1,j}^k =: {}^*c^{k-1}$ mit $Z_j({}^*c^{k-1}) = h_j^{\delta}$, $Z_i({}^*c^{k-1}) = Z_i(c^k)$ für $i \neq j$, ist eine sowohl in ${}^*c_1^k$ und ${}^*c_2^k$ enthaltene $(k-1)$ -Zelle und liegt somit nicht in $\partial^*c_1^k + \partial^*c_2^k$. Aus (b) und (c) folgt:

(d) $\partial^*c_1^k + \partial^*c_2^k = (\partial^*c_1^k \cup \partial^*c_2^k) \setminus \{ {}^*c^{k-1} \}$.

(e) ${}^*c^{k-1} \notin \partial^*c^k$, d.h.: für jede in c^k enthaltene $(k-1)$ -Zelle c^{k-1} von G gilt: ${}^*c^{k-1} \notin c^{k-1}$.

Sei etwa $c^{k-1} = -c_j^k$, so besitzt $Z_j(-c_j^k) = h_j^r \in G$ mit $Z_j({}^*c_1^{k-1}) = h_j^{\delta}$ leeren Durchschnitt. Ebenso gilt: ${}^*c^{k-1} \notin +c_j^k$. Falls nun $c^{k-1} = \pm c_i^k$, $i \neq j$, so ist c^{k-1} in der i -ten Achse defekt, während $Z_i({}^*c^{k-1}) = Z_i(c^k)$ regulär ist. Hieraus folgt sofort, daß ${}^*c^{k-1}$ in der i -ten Achse regulär ist. Wiederum gilt: ${}^*c^{k-1} \notin c^{k-1}$.

(f) ${}^*\{\partial c^k\} = (\partial^*c_1^k \cup \partial^*c_2^k) \setminus ({}^*c = -^*c_{2,j}^k = +^*c_{1,j}^k)$.

Sei $c^{k-1} = \pm c_s^k$, s ein Regularitätsindex von c^k . Falls $s=j$, gilt: $+c_j^k = +^*c_{2,j}^k$, da $Z_j(+c_j^k) = h_j^{r+1} = Z_j(+^*c_{2,j}^k)$. $Z_i(+c_j^k) = Z_i(c^k) = Z_i({}^*c_2^k) = Z_i({}^*c_{2,j}^k)$ für $i \neq j$. Ebenso: $-c_j^k = -^*c_{1,j}^k$. Falls $s \neq j$, gilt: $+c_s^k = +^*c_{1,s}^k \cup +^*c_{2,s}^k$, $-c_s^k = -^*c_{1,s}^k \cup -^*c_{2,s}^k$. Die j -te Achse ist Regularitätsachse von $\pm c_j^k$ und, da für $i \neq j$ $Z_i(\pm c_s^k) = Z_i(\pm^*c_{1,s}^k) = Z_i(\pm^*c_{2,s}^k)$, folgt die Behauptung aus $Z_j(c^k) = +Q_j^r = -Q_j^{r+1} = +Q_j^{\delta} \cup -Q_j^{\delta}$, $-Q_j^{\delta} = Z_j(\pm^*c_{1,s}^k)$, $+Q_j^{\delta} = Z_j(\pm^*c_{2,s}^k)$. Jede $(k-1)$ -Zelle $\neq {}^*c$ aus $\partial^*c_1^k \cup \partial^*c_2^k$ ist somit in einer geeigneten $(k-1)$ -Zelle aus ∂c^k enthalten. Andererseits umfaßt jede $(k-1)$ -Zelle aus ∂c^k eine geeignete, von *c verschiedene $(k-1)$ -Zelle von $\partial^*c_1^k \cup \partial^*c_2^k$. Hiermit ist (f) bewiesen.

Falls G^* aus G dadurch entsteht, daß ein einziger Prinzipal, der nicht zu G gehört, zu G hinzugenommen wird, gilt für jede k -Zelle c^k , $k \geq 1$:

$\partial^*\{c^k\} = {}^*\{\partial c^k\}$. 3.3.2 liefert dann für jede Verfeinerung G^* von G :
 $\partial^*\{c^k\} = {}^*\{\partial c^k\}$.

Sei nun $\tau^k = c_1^k + c_2^k + \dots + c_n^k$. Dann haben wir:

$$*\tau^k = *\{c_1^k\} + *\{c_2^k\} + \dots + *\{c_n^k\} \text{ nach (1) und}$$

$$\partial^* \tau^k = \partial^* \{c_1^k\} + \partial^* \{c_2^k\} + \dots + \partial^* \{c_n^k\} \text{ nach 2.4. Nach (1) gilt:}$$

$$\partial^* \{c_j^k\} = *\partial \{c_j^k\} = *\partial c_j^k \text{ f\u00fcr alle } j=1, \dots, n \text{ und somit ergibt sich:}$$

$$\partial^* \tau^k = \sum_{j=1}^n \partial^* \{c_j^k\} = \sum_{j=1}^n *\partial c_j^k \stackrel{(1)}{=} *\sum_{j=1}^n \partial c_j^k = *\partial \tau^k. \quad \square$$

3.6 Folgerung

G^* sei eine Verfeinerung von G und τ^k sei eine Kette auf G .

$*\tau^k$ ist genau dann ein Zyklus (auf G^*), wenn τ^k ein Zyklus (auf G) ist.

Beweis:

Sei $*\tau^k$ ein Zyklus auf G^* .

Falls $k=0$, gilt, da $*\tau^0 = \tau^0$ f\u00fcr jede 0-Kette, da\u00df τ^0 geradzahlig viele 0-Zellen enth\u00e4lt, somit also ein 0-Zyklus ist.

Sei nun $k \geq 1$: $O^{k-1} = \partial^* \tau^k = *\partial \tau^k \sim |\partial \tau^k| = |\tau^k| = \emptyset$ (3.4).

Deshalb ergibt sich nach 1.41(3) und 1.42(2): $\partial \tau^k = O^{k-1}$, τ^k ist somit ein k -Zyklus.

Sei umgekehrt τ^k ein k -Zyklus. Falls $k=0$, haben wir: $*\tau^0 = \tau^0$. τ^0 besitzt geradzahlig viele 0-Zellen, daher ist auch $*\tau^0 = \tau^0$ ein 0-Zyklus. Falls $k \geq 1$, gilt: $O^{k-1} = \partial \tau^k$. Deshalb: $|\partial \tau^k| = |\tau^k| = \emptyset$. Weil $O^{k-1} = *\partial \tau^k = \partial^* \tau^k$, ist $*\tau^k$ ein k -Zyklus. □

3.6.1 Satz

(1) Sei G ein Gitter in Z^p (R^p) und G^* eine Verfeinerung von G . τ^k sei eine k -Kette auf G , $k \geq 0$ und $*\tau^k$ die Verfeinerung von τ^k auf G^* . Dann gilt f\u00fcr alle $*c^k$ aus $*\tau^k$; $Z_i(*c^k)$ ist f\u00fcr alle $i=1, \dots, p$ kein in $G^* \setminus G$ enthaltener Prinzipial.

(2) Sei \mathfrak{z}^k ein k -Zyklus auf G^* , f\u00fcr dessen s\u00e4mtliche k -Zellen c^k gilt, da\u00df $Z_i(c^k)$ f\u00fcr alle $i=1, \dots, p$ kein in $G^* \setminus G$ enthaltener Prinzipial ist. Dann ist \mathfrak{z}^k die Verfeinerung auf G^* eines k -Zyklus \mathfrak{z}_1^k auf G . ($\mathfrak{z}^k = *\mathfrak{z}_1^k$).

Beweis:

Zun\u00e4chst entstehe G^* aus G durch Hinzunahme eines einzigen, nicht in G enthaltenen, Prinzipials $h_j = h_j^\dagger$. $*c^k$ sei eine k -Zelle von $*\tau^k$ mit $Z_j(*c^k) = h_j^\dagger$. Nach der Definition von $*\tau^k$ ist $*c^k$ in einer k -Zelle von τ^k , etwa $c^k \in \tau^k$, enthalten. Zun\u00e4chst kann j kein Regularit\u00e4tsindex von c^k sein. Da $*c^k \subseteq c^k$ folgt aus 1.31(2): $\text{Reg}(*c^k) \subseteq \text{Reg}(c^k)$. W\u00e4re j Regularit\u00e4tsindex von c^k , so g\u00e4lte, da j aus $\text{Def}(*c^k)$, $\text{Reg}(*c^k) \subseteq \text{Reg}(c^k) \setminus \{j\}$ und somit w\u00e4re der Regularit\u00e4tsgrad von $*c^k$ echt kleiner als k , im Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei nun j ein Defektindex von c^k . Wäre $Z_j(c^k) = h_j^! \neq h_j = h_j^+$, so folgte sofort der Widerspruch: $\emptyset \neq *c^k \subseteq c^k \cap *c^k \subseteq h_j^! \cap h_j^+ = \emptyset$, da zwei zueinander parallele und voneinander verschiedene Prinzipale disjunkt sind. Es bleibt somit nur noch übrig, daß $Z_j(c^k) = h_j^+ \notin G$. Auch dies ergibt einen Widerspruch. Daher kann keine k -Zelle von $*\tau^k h_j^+$ als j -te Zellenkomponente besitzen. Die allgemeine Behauptung folgt sofort aus 3.3.2.

(2) Wiederum sei $G^* = G \cup \{h_j^+, h_j^+ \notin G\}$. Sei $c^k \in \mathfrak{Z}^k$. Falls h_j^+ kein Randprinzipal von $Z_j(c^k)$ ist, ist $Z_j(c^k)$ auch eine Zellenkomponente von G . Da für $i \neq j$ $Z_i(c^k)$ sowieso eine Zellenkomponente von G ist, ist c^k somit auch eine k -Zelle von G . Sei nun h_j^+ ein Randprinzipal von $Z_j(c^k)$. (h_j^+ darf voraussetzungsgemäß keine Zellenkomponente von c^k sein!) c^{k-1} entstehe aus c^k durch Entregularisierung in der j -ten Achse, dergestalt, daß $Z_j(c^k)$ durch h_j^+ ersetzt wird. Ergäbe die Regularisierung von c^{k-1} in einer anderen als der j -ten Achse eine in \mathfrak{Z}^k gelegene k -Zelle $'c^k$, so gälte: $Z_j('c^k) = h_j^+ \in G^* \setminus G$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Andererseits muß aber c^{k-1} noch in einer weiteren k -Zelle von \mathfrak{Z}^k enthalten sein, da sonst $c^{k-1} \in \partial \mathfrak{Z}^k = 0^{k-1}$ gälte. Falls etwa c^k aus c^{k-1} durch Regularisation nach oben in der j -ten Achse entsteht, muß somit auch c_1^k , welches aus c^{k-1} durch Regularisation nach unten in der j -ten Achse entsteht, zu \mathfrak{Z}^k gehören. $Z_j(c^k) \cup Z_j(c_1^k) = +h_j^+ \cup -h_j^+$ ist dann aber eine Zellenkomponente von G und $c_2^k = c^k \cup c_1^k$ ist dann eine k -Zelle von G , welche durch c^k, c_1^k verfeinert wird. Wir erhalten somit, daß $\tau^k = \{c^k \text{ auf } G \mid c^k \text{ ist auch eine } k\text{-Zelle von } G^* \text{ und gehört als solche zu } \mathfrak{Z}^k, \text{ oder } c^k = c_1^k \cup c_2^k, c_1^k \text{ und } c_2^k \text{ sind } k\text{-Zellen von } G^* \text{ und gehören zu } \mathfrak{Z}^k, Z_j(c_1^k) = +h_j^+, Z_j(c_2^k) = -h_j^+\}$ eine k -Kette auf G ist, deren Verfeinerung bezüglich G^* gerade \mathfrak{Z}^k ist. Nach 3.6 ist somit auch \mathfrak{Z}^k ein k -Zyklus auf G .

Den allgemeinen Fall erhält man wiederum wie in (1). □

3.7 Definition

Es sei G ein Gitter in Z^p (\mathbb{R}^p) und G eine offene Menge in Z^p (\mathbb{R}^p). Ein Zyklus \mathfrak{Z}^k auf G , $k=0, \dots, p-1$, heißt nullhomolog in G (auf G), geschrieben $\mathfrak{Z}^k \sim 0^k$ in G (auf G), wenn es auf G eine $(k+1)$ -Kette τ^{k+1} gibt, mit $\mathfrak{Z}^k = \partial \tau^{k+1}$ und $|\tau^{k+1}| \subseteq G$. Wir wollen diesen Sachverhalt auch noch, wie folgt, bezeichnen:
 \mathfrak{Z}^k berandet in G (auf G), \mathfrak{Z}^k ist berandend in G (auf G), \mathfrak{Z}^k berandet τ^{k+1} in G (auf G).

O^p soll als nullhomolog auf jeder offenen Teilmenge $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) angesehen werden, da $|O^p| = \emptyset \subseteq G$ und sofern die Betrachtungen auf Z^{p+1} (\mathbb{R}^{p+1}) ausgedehnt werden, $O^p = \partial O^{p+1}$, $|O^{p+1}| = \emptyset \subseteq G$ gilt.

3.8 Bemerkungen

- (1) Der Zyklus O^k , $0 \leq k \leq p$, ist nullhomolog in G , $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) beliebig, da $O^k = \partial O^{k+1}$, $\emptyset = |O^{k+1}| \subseteq G$.
- (2) Aus $z^k \sim O^k$ in G folgt: $z^k = |\partial^{k+1}| \subseteq |\tau^{k+1}| \subseteq G$.
- (3) Aus $G \subseteq H$ (G, H offen in Z^p (\mathbb{R}^p)) und $z^k \sim O^k$ in G folgt: $z^k \sim O^k$ in H , da $z^k = \partial \tau^{k+1}$, $|\tau^{k+1}| \subseteq G \subseteq H$.
- (4) Ist G^* eine Verfeinerung von G und $z^k \sim O^k$ in G (auf G), so ist $*z^k \sim O^k$ in G (auf G^*). Denn: $z^k = \partial \tau^{k+1}$, $|\tau^{k+1}| \subseteq G$, $|*z^k| = |z^k|$, (3.4(1)), $*z^k = *\partial \tau^{k+1} = \partial * \tau^{k+1}$ (3.5(2)), $|*\tau^{k+1}| = |\tau^{k+1}| \subseteq G$ (3.4(1)). $*\tau^{k+1}$ ist eine $(k+1)$ -Kette auf G , daher gilt: $*z^k \sim O^k$ in G (auf G^*).
- (5) Sind c_1^0, c_2^0 zwei voneinander verschiedene 0-Zellen von G und ist a ein von c_1^0, c_2^0 verschiedener, aber ansonsten beliebiger Punkt aus Z^p , so gilt:
 $z^0 := c_1^0 + c_2^0 = \{c_1^0, c_2^0\} \sim O^0$ in $Z^p \setminus \{a\}$.
 Da $Z^p \setminus \{a\} \subseteq Z^p$ ist $z^0 \sim O^0$ in Z^p (3) und, falls $c_1^0, c_2^0 \neq w$, gilt: $z^0 \sim O^0$ in $Z^p \setminus \{w\} = \mathbb{R}^p$. Aussage (5) gilt auch im Falle $p=1$.

Beweis von (5):

Zunächst wollen wir den Fall betrachten, daß G ein Gitter des einfachsten Typus ist, jedes Teilgitter G_i somit aus genau einem Prinzipal $h_i = h_i^{\delta_i}$ besteht. In diesem Fall sind w und der Punkt c^0 , dessen i -te Koordinate gleich δ_i ist, die einzigen Nullzellen von G . Jeder von c^0 und w verschiedene Punkt a aus Z^p muß daher in \mathbb{R}^p liegen und für irgendein j , $1 \leq j \leq p$, muß $a_j \neq \delta_j$ sein. Falls etwa $a_j < \delta_j$, bildet diejenige 1-Zelle von G , deren j -tes Koordinatenintervall mit $[\delta_j, \infty)$ und deren übrige Koordinatenintervalle mit $[\delta_k, \delta_k]$ für $k \neq j$ übereinstimmen eine 1-Kette τ^1 auf G mit $\partial \tau^1 = c^0 + w$, $|\tau^1| \subseteq Z^p \setminus \{a\}$; die Aussage gilt somit in Z^p für jedes Gitter, welches p Prinzipale besitzt. Wir wollen nun die Aussage durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Prinzipale eines Gitters in Z^p beweisen. Sei also die Aussage bereits für jedes Gitter G' , das $n > p$ Prinzipale enthält, bewiesen. G sei ein Gitter mit $(n+1)$ Prinzipalen. c_1^0, c_2^0 seien zwei 0-Zellen von G und $a \neq c_1^0/2$ ein Punkt aus Z^p . Es können nun zwei Fälle eintreten:

1) c_1^0, c_2^0 sind auch Nullzellen von G' , einem n -prinzipaligen Untergitter von G . In diesem Fall gilt: $\mathfrak{z}^0 = c_1^0 + c_2^0 \sim 0^0$ in $Z^p \setminus \{a\}$ (auf G'). Somit ist \mathfrak{z}^0 , die Verfeinerung von \mathfrak{z}^0 auf G' nullhomolog in $Z^p \setminus \{a\}$ (auf G) nach (4) und 3.3.

2) Mindestens eine der beiden 0-Zellen $c_{1/2}^0$ ist keine 0-Zelle eines n -prinzipaligen Untergitters G' von G . Dann muß $c_{1/2}^0 \neq w$ sein. Denn, angenommen $c_1^0 = w$ und für ein $j, 1 \leq j \leq p$, ist G_j , das j -te Teilgitter von G , ^{mindertens} zweiprinzipalig, also $G_j \supseteq \{z_j(c_2^0), h_j\}$, so wäre $G' = G \setminus \{h_j\}$ ein n -prinzipaliges Untergitter, welches sowohl $w = c_1^0$, als auch c_2^0 als Gitterpunkte besitzt, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß nicht beide 0-Zellen $c_{1/2}^0$ Gitterpunkte von G sind. Somit $c_1^0 \neq w$; der Fall $c_2^0 = w$ wird ganz analog erledigt. Außerdem kann im Fall 2) jedes Teilgitter G_i höchstens zwei Prinzipale besitzen, denn, falls etwa $G_j \supseteq \{z_j(c_1^0), z_j(c_2^0), h_j\}$, wäre $G \setminus \{h_j\}$ ein n -prinzipaliges Untergitter von G , das sowohl c_1^0 , als auch c_2^0 als 0-Zellen besitzt im erneuten Widerspruch zur Voraussetzung. Wir können somit die Menge $M_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq p, G_i = \{h_i^1, h_i^2\}\}$ einführen. M_0 ist sicherlich nicht leer, da $M_0 = \emptyset$ sofort "G ist ein Gitter einfachsten Typs mit p Prinzipalen" nach sich zöge. $M_1 = \{i \in M_0 \mid z_i(c_1^0) \neq z_i(c_2^0)\}$ ist nicht leer, da $M_1 = \emptyset$ offensichtlich $c_1^0 = c_2^0$ impliziert. Somit existieren $m_1 := \min M_1, m'_1 := \max M_1$, weil M_1 eine nichtleere endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist. Die 1-Kette τ^1 auf G , welche a meidet und $\mathfrak{z}^0 = c_1^0 + c_2^0$ als ihren algebraischen Rand besitzt, wird folgendermaßen konstruiert: O.B.d.A. wollen wir annehmen, daß, falls i aus M_1 ist, $z_i(c_1^0) = h_i^1, z_i(c_2^0) = h_i^2$. Dann wird, falls $M_1 = m_1 = i_1 < i_2 \dots < i_k = m'_1$ ist, c_j^1 aus $\tau^1, 1 \leq j \leq m'_1$, wie folgt, festgelegt:

- Falls $a = w$ oder $a_{i_j} < \alpha_{i_j} = \text{Bestimmungszahl von } h_{i_j}^1 = z_{i_j}(c_1^0)$ oder $a_{i_j} > \beta_{i_j} = \text{Bestimmungszahl von } h_{i_j}^2 = z_{i_j}(c_2^0)$, a_{i_j} die i_j -te Koordinate von a , wird $K_{i_j}(c_j^1)$, das i_j -te Koordinatenintervall von c_j^1 , gleich $[\alpha_{i_j}, \beta_{i_j}]$ gesetzt, während für $i \neq i_j$, falls $i < m_1$ oder $i_j < i \leq m'_1$, $K_i(c_j^1) = K_i(c_j^0) = i$ -te Koordinate von c_j^0 aus \mathbb{R} gewählt wird; offenkundig gilt: $a \notin c_j^1$.
- Falls $\alpha_{i_j} \leq a_{i_j} \leq \beta_{i_j}$, nimmt man anstelle von c_j^1 zwei 1-Zellen $c_{j,1}^1, c_{j,2}^1$. Dabei wird für $i \neq i_j$ $K_i(c_{j,1}^1) = K_i(c_{j,2}^1) = K_i(c_j^1)$ gesetzt, $K_i(c_j^1)$ wie im Fall a) gewählt, während $K_{i_j}(c_{j,1}^1) = (-\infty, \alpha_{i_j}]$,

$K_{ij}(c_{j,2}^1) = [\alpha_{ij}, \infty)$ wird. Im Falle $\alpha_{ij} < a_{ij} < \beta_{ij}$ haben wir offenkundig: $a \notin c_{j,1}^1, c_{j,2}^1$. Sei etwa $a_{ij} = \alpha_{ij}$: (der Fall $a_{ij} = \beta_{ij}$ wird ganz analog erledigt.) Offenkundig ist $a \notin c_{j,2}^1$, da $a_{ij} < \beta_{ij} \leq x_{ij}$ für alle x aus $c_{j,2}^1$; ebenso gilt für alle y aus $c_{j,1}^1$, $y \neq c_1^0$, $y_{ij} < \alpha_{ij} = a_{ij}$, während $a \neq c_1^0$ nach Voraussetzung. Somit gilt auch: $a \notin c_{j,1}^1$.

c_1^0 entsteht aus c_1^1 ($c_{1,1}^1$) durch Entregularisierung nach unten (nach oben), c_2^0 entsteht aus $c_{m_1}^1$ (c_{1,m_1}^1) durch Entregularisierung nach oben (nach unten). Jeder Gitterpunkt c^0 von G , der aus c_j^1 , $1 < j < m_1$, durch Entregularisierung nach unten (nach oben) in der i_j -ten Achse entsteht, entsteht aus c_{j-1}^1 (c_{j+1}^1) durch Entregularisierung nach oben (nach unten) in der i_{j+1} -ten Achse von c_{j-1}^1 (c_{j+1}^1), ist somit in zwei 1-Zellen von τ^1 enthalten, während c_1^0 und c_2^0 in genau einer 1-Zelle aus τ^1 enthalten sind. Wir haben somit: $\partial\tau^1 = c_1^0 + c_2^0$, $a \notin c^1$ für alle c^1 aus τ^1 . Somit: $a \notin |\tau^1|$ und deshalb $|\tau^1| \subseteq Z^p \setminus \{a\}$. Insgesamt: $\mathfrak{z}^0 = c_1^0 + c_2^0 \sim 0^0$ in $Z^p \setminus \{a\}$ und die Aussage ist auch im zweiten Fall bewiesen. Damit ist der Schluss von n auf $n+1$ erbracht. □

3.9 Satz

Sei G ein Gitter in Z^p (\mathbb{R}^p). Sind die Zyklen $\mathfrak{z}_1^k, \mathfrak{z}_2^k, \dots, \mathfrak{z}_n^k$ nullhomolog in G , so gilt dasselbe für den Zyklus $\mathfrak{z}^k = \mathfrak{z}_1^k + \mathfrak{z}_2^k + \dots + \mathfrak{z}_n^k$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{z}_j^k = \partial\tau_j^{k+1}$, $|\tau_j^{k+1}| \subseteq G$ für $j=1, \dots, n$.

Es folgt: $\mathfrak{z}_1^k + \dots + \mathfrak{z}_n^k = \partial\tau_1^{k+1} + \dots + \partial\tau_n^{k+1} = \partial(\tau_1^{k+1} + \dots + \tau_n^{k+1})$,
 $|\tau_1^{k+1} + \dots + \tau_n^{k+1}| \subseteq |\tau_1^{k+1}| \cup \dots \cup |\tau_n^{k+1}| \subseteq G$.

3.9.1 Satz

Sei G ein Gitter in Z^p (\mathbb{R}^p) und G^* eine Verfeinerung von G . \mathfrak{z}^k sei ein k -Zyklus auf G , $1 \leq k \leq p$ und ${}^*\mathfrak{z}^k$, die Verfeinerung von \mathfrak{z}^k auf G^* sei nullhomolog in $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) (auf G^*). Dann ist auch \mathfrak{z}^k nullhomolog in G (auf G).

Beweis: (Der Beweis enthält eine Lücke für den Fall $1 \leq k \leq p-2$.) Falls \mathfrak{z}^p ein p -Zyklus ist, muß $\mathfrak{z}^p = 0^p$ sein, da nur für 0^p die Nullhomologizität definiert ist (3.7). 0^p ist in jeder offenen Menge nullhomolog und offenkundig ist ${}^*0^p = 0^p$.

Sei nun $1 \leq k \leq p-1$.

$\ast \mathfrak{z}^k$, die Verfeinerung auf \mathbb{G}^\ast von \mathfrak{z}^k sei nullhomolog in G (auf \mathbb{G}^\ast).

Dies bedeutet nichts anderes als: Es gibt eine $(k+1)$ -Kette τ^{k+1} auf \mathbb{G}^\ast deren Träger in G enthalten und deren algebraischer Rand $\ast \mathfrak{z}^k$ ist. Wir müssen nun zeigen, daß es eine $(k+1)$ -Kette τ_1^{k+1} auf G gibt, deren algebraischer Rand \mathfrak{z}^k und deren Träger in G enthalten ist. Wir wollen den Satz durch vollständige Induktion nach der Anzahl der $(k+1)$ -Ketten von τ^{k+1} beweisen. Außerdem nehmen wir an, \mathbb{G}^\ast entstehe aus G durch Hinzunahme eines einzigen *nicht* in G gelegenen Prinzipals h_j^Δ . 3.3.2 liefert dann die allgemeine Behauptung für beliebige Verfeinerungen von G .

Bestehe τ^{k+1} zunächst nur aus einer einzigen $(k+1)$ -Zelle c^{k+1} auf \mathbb{G}^\ast . $\ast \mathfrak{z}^k$ ist in diesem Fall der algebraische Rand von c^{k+1} und besteht somit aus allen in c^{k+1} enthaltenen k -Zellen von \mathbb{G}^\ast . Alle $Z_i(c^{k+1})$ sind für $i \neq j$ auch Zellenkomponenten von G . Wäre $Z_j(c^{k+1}) = h_j^\Delta \pm Q_j^\Delta$, so besäße *mindestens* eine k -Zelle von $\ast \mathfrak{z}^k$ die Zellenkomponente h_j^Δ , da im Falle $Z_j(c^{k+1}) = h_j^\Delta$ jede k -Zelle von $\ast \mathfrak{z}^k$ die Zellenkomponente h_j^Δ besäße, im Falle $Z_j(c^{k+1}) = \pm Q_j^\Delta$ die aus c^{k+1} durch Ersetzung von $Z_j(c^{k+1})$ durch h_j^Δ hervorgegangene. Nach 3.6(1) kann *keine* k -Zelle von $\ast \mathfrak{z}^k$ h_j^Δ als Zellenkomponente besitzen, da $\ast \mathfrak{z}^k$ die Verfeinerung auf \mathbb{G}^\ast von \mathfrak{z}^k ist. Somit ist $Z_j(c^{k+1})$ *nicht* von h_j^Δ bestimmt und deshalb ebenfalls eine Zellenkomponente von G . c^{k+1} ist deswegen auch eine $(k+1)$ -Zelle von G . Es gilt somit: $\ast c^{k+1} = c^{k+1}$, alle k -Zellen von \mathbb{G}^\ast , die in c^{k+1} enthalten sind, sind auch k -Zellen von G , $\ast \mathfrak{z}^k = \mathfrak{z}^k$ stimmt somit mit \mathfrak{z}^k überein. Deshalb ist \mathfrak{z}^k in diesem Fall nullhomolog in G auf G .

Wir wollen nun annehmen, daß das Theorem bereits für alle $\ast \mathfrak{z}^k$, welche n -zellige $(k+1)$ -Ketten in G beranden, gilt.

Sei nun $\tau^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} c_j^{k+1}$ eine $(n+1)$ -zellige $(k+1)$ -Kette auf \mathbb{G}^\ast ,

deren Träger in G enthalten und deren algebraischer Rand $\ast \mathfrak{z}^k$ ist. Es können nun zwei Fälle auftreten:

- 1) Es gibt eine $(k+1)$ -Zelle von τ^{k+1} , o.B.d.A. c_1^{k+1} , die auch eine $(k+1)$ -Zelle von G ist. $Z_j(c_1^{k+1})$ ist somit *nicht* von h_j^Δ bestimmt und alle in c_1^{k+1} enthaltenen k -Zellen sind auch k -Zellen auf G . ∂c_1^{k+1} ist somit ein k -Zyklus auf G und \mathbb{G}^\ast , deshalb gilt: $\partial c_1^{k+1} = \ast \partial c_1^{k+1}$ und nullhomolog in G (auf G), da $c_1^{k+1} \subseteq |\tau^{k+1}| \subseteq G$. $\mathfrak{z}_1^k = \mathfrak{z}^k + \partial c_1^{k+1}$ ist somit nach 3.9 ein k -Zyklus auf G .

$\tau_0^{k+1} = \tau^{k+1} + c_1^{k+1}$ ist eine n -zellige $(k+1)$ -Kette auf G^* mit
 $|\tau_0^{k+1}| = |\tau^{k+1} + c_1^{k+1}| \subseteq |\tau^{k+1}| \cup c_1^{k+1} \subseteq G, \partial \tau_0^{k+1} = \partial \tau^{k+1} +$
 $+ \partial c_1^{k+1} = *z^k + \partial c_1^{k+1} = *z^k + *\partial c_1^{k+1} = *(z^k + \partial c_1^{k+1}) = *z_1^k.$

$*z_1^k$ ist somit aufgrund der Induktionsannahme nullhomolog in G (auf G). Da c_1^{k+1} ebenfalls nullhomolog in G (auf G) ist, haben wir nach 3.9:

$$z^k = (z^k + \partial c_1^{k+1}) + \partial c_1^{k+1} \sim 0^k \text{ in } G \text{ (auf } G\text{)}.$$

2) Alle $(k+1)$ -Zellen von τ^{k+1} sind Zellen von G^* , aber keine Zellen von G . Dies bedeutet, daß die j -te Komponente jeder Zelle von τ^{k+1} von h_j^d bestimmt sein muß.

Leider ist es mir nicht gelungen, einen Beweis dafür zu finden, daß die Teilkette τ_0^{k+1} von τ^{k+1} , bestehend aus den $(k+1)$ -Zellen von τ^{k+1} , deren j -te Komponente gleich h_j^d ist, ein $(k+1)$ -Zyklus ist. Falls dies bewiesen wäre, hätte man: $\tau_0^{k+1} + \tau^{k+1}$ ist eine

von $*z^k$ berandete $(k+1)$ -Kette mit $|\tau_0^{k+1} + \tau^{k+1}| \subseteq |\tau_0^{k+1}| \cup |\tau^{k+1}| \subseteq G$ und: $\tau_0^{k+1} + \tau^{k+1}$ besitzt keine $(k+1)$ -Zelle von G^* , deren j -te Komponente gleich h_j^d ist.

Ganz offenkundig kann man jede von $*z^k$ berandete $(k+1)$ -Kette auf G^* mit dem Zyklus z^{k+1} aller in h_j^d enthaltenen $(k+1)$ -Zellen von G^* vereinigen, ohne den algebraischen Rand von τ^{k+1} zu verändern. z^{k+1} ist ganz offenkundig ein $(k+1)$ -Zyklus, da jede in einer $(k+1)$ -Zelle von z^{k+1} enthaltene k -Zelle von G^* ebenfalls in h_j^d enthalten ist und in jeder Defektachse sowohl nach oben, wie nach unten, regularisiert werden kann, somit in einer geraden Anzahl von $(k+1)$ -Zellen von z^{k+1} enthalten ist. Anschaulich ist es ganz klar, daß jede in h_j^d enthaltene $(k+1)$ -Zelle "zu viele" h_j^d als Zellenkomponenten besitzende k -Zellen von G^* enthält, die ja nach 3.6(1) nicht in $*z^k$ liegen können, somit entweder in einer anderen $(k+1)$ -Zelle von z^{k+1} enthalten sein müssen, oder in einer $(k+1)$ -Zelle von τ^{k+1} , deren j -te Komponente gleich $\pm Q_j$ ist. Man müßte irgendeine einfache Veranschaulichung des algebraischen Randes einer in h_j^d enthaltenen $(k+1)$ -Zelle von G^* , analog zu den "Tupeln" aus dem Beweis von Satz 2.8, gewinnen, um aus der Tatsache, daß τ^{k+1} eine in h_j^d enthaltene $(k+1)$ -Zelle als Element besitzt, abzuleiten, daß dann τ^{k+1} alle in h_j^d enthaltenen $(k+1)$ -Zellen umfaßt. Ich bin an der Unübersichtlichkeit dieses algebraischen Randes gescheitert. Zu berücksichtigen wäre noch, daß jede in c^{k+1} enthaltene $(k+1)$ -Zelle c^{k+1} mit $Z_j(c^{k+1}) = \pm Q_j$, nur eine in h_j^d enthaltene k -Zelle von G^* umfaßt, während

jede in h_j enthaltene $(k+1)$ -Zelle von G^* mindestens $p-(k+1)$ in h_j^δ enthaltene k -Zellen umfaßt. Außerdem müßte man noch die Tatsache, daß jede in h_j^δ enthaltene $(k+1)$ -Zelle in einer Defektachse jeder $(k+1)$ -Zelle c^{k+1} mit $Z_j(c^{k+1}) = \pm Q_j$ regulär sein muß, ausnützen.

Im Falle $k=p-1$, τ^{k+1} ist dann eine p -Kette auf G^* , kann der eben diskutierte Fall gar nicht auftreten, da keine p -Zelle in einem Prinzipal des Gitters G^* enthalten sein kann.

Man sieht jedenfalls sehr leicht ein, daß keine $(k+1)$ -Zelle von G^* , deren j -te Zellenkomponente gleich h_j^δ ist, eine k -Zelle von $*\mathfrak{z}^k$ umfassen kann, da aus $*\mathfrak{z}^k \ni c^k \subseteq c^{k+1} \subseteq h_j^\delta$, wegen 1.22 $Z_j(c^k) \subseteq h_j^\delta = Z_j(c^{k+1})$, somit $Z_j(c^k) = h_j^\delta$, folgt, im Widerspruch zu 3.6(1).

Im Falle, daß τ^{k+1} nur aus zwei $(k+1)$ -Zellen c_1^{k+1}, c_2^{k+1} besteht, ist es mir gelungen, zu zeigen, daß, falls $Z_j(c_1^{k+1}) = h_j^\delta$, auch $Z_j(c_2^{k+1}) = h_j^\delta$ und $\partial(c_1^{k+1} + c_2^{k+1}) = 0^k$ sein muß:

Falls $Z_j(c_1^{k+1}) = h_j^\delta$, besitzen alle in c_1^{k+1} enthaltenen k -Zellen die j -te Zellenkomponente h_j^δ und können gemäß 3.6(1) nicht in $*\mathfrak{z}^k$ liegen. Sie müssen somit auch in c_2^{k+1} liegen, da $*\mathfrak{z}^k = \partial(c_1^{k+1} + c_2^{k+1})$. Angenommen: $Z_j(c_2^{k+1}) = \pm Q_j^\delta$. Dann kann nur eine in c_2^{k+1} enthaltene k -Zelle c^k als j -te Komponente besitzen, nämlich diejenige, die aus c_2^{k+1} bei der Ersetzung von $+Q_j^\delta$ durch h_j^δ entsteht. c_1^{k+1} umfaßt jedoch mindestens $(k+1)$ k -Zellen, die sämtliche h_j^δ als j -te Komponente besitzen. Voraussetzungsgemäß ist $k \geq 1$ und somit $k+1 > 1$. Somit ist der Fall $Z_j(c_2^{k+1}) = \pm Q_j^\delta$ unmöglich. $Z_j(c_2^{k+1})$ muß also ebenfalls h_j^δ sein. Deshalb besitzt jede in c_2^{k+1} enthaltene k -Zelle h_j^δ als j -te Zellenkomponente und muß auch in c_1^{k+1} enthalten sein, da nach 3.6(1) keine k -Zelle aus $*\mathfrak{z}^k$ h_j^δ als Zellenkomponente besitzen darf. Somit ist $*\mathfrak{z}^k = \partial(c_1^{k+1} + c_2^{k+1}) = *0^k = 0^k = \mathfrak{z}^k$. 0^k ist gemäß 3.8(1) auf jedem Gitter und in jeder offenen Teilmenge von $Z^P(\mathbb{R}^P)$ nullhomolog.

Nehmen wir nun an, es ist möglich zu zeigen, daß τ^{k+1} so eingerichtet werden kann, daß keine $(k+1)$ -Zelle aus τ^{k+1} h_j^δ als j -te Komponente besitzt.

Sei nun c^{k+1} aus τ^{k+1} mit $Z_j(c^{k+1}) = +Q_j^\delta$ o.B.d.A.. Wäre $-c^{k+1} :=$

$$:= \bigcap_{i=1}^p Z_i(c^{k+1}) \cap -Q_j^\delta \cap \bigcap_{i=j+1}^p Z_i(c^{k+1}) \text{ nicht in } \tau^{k+1}, \text{ so läge } c^k,$$

die k -Zelle von G^* , die aus c^{k+1} dadurch entsteht, daß $+Q_j^\delta$ durch h_j^δ ersetzt wird, in keiner anderen $(k+1)$ -Zelle von τ^{k+1} , da,

falls etwa $c_1^{k+1} \neq c^{k+1}$, $-c^{k+1}$, für mindestens ein $i \neq j, z_i(c_1^{k+1}) \neq z_i(c^{k+1}) = z_i(-c^{k+1})$ gilt. Falls nun c_1^k diejenige k -Zelle von G^* bezeichnet, die aus c_1^{k+1} dadurch hervorgeht, daß $z_j(c_1^{k+1}) = +Q_j^d$ durch h_j^d ersetzt wird, gilt: $z_i(c^k) = z_i(c^{k+1}) \neq z_i(c_1^{k+1}) = z_i(c^k)$, woraus $c_1^k \neq c^k$ folgt. Da $c_1^{k+1} \neq c^{k+1}$, $-c^{k+1}$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

$+Q_j \cup -Q_j$ ist nun eine Zellenkomponente von G , somit ist $c_1^{k+1} \cup -c^{k+1}$ eine $(k+1)$ -Zelle c_1^{k+1} von G . $\zeta^k + \partial c_1^{k+1}$ ist ein k -Zyklus auf G und $\tau_o^{k+1} := \tau^{k+1} + c^{k+1} + (-c^{k+1})$ ist eine $(n-1)$ -zellige $(k+1)$ -Kette auf G^* , mit $\partial \tau_o^{k+1} = \partial \tau^{k+1} + \partial(c^{k+1} + (-c^{k+1})) = * \zeta^k + * \partial c_1^{k+1} = *(\zeta^k + \partial c_1^{k+1})$. Nach der Induktionsannahme ist $\zeta^k + \partial c_1^{k+1}$ somit nullhomolog in G (auf G) und wegen der Nullhomologizität von ∂c_1^{k+1} in G (auf G) $(c_1^{k+1} = c^{k+1} \cup -c^{k+1} \subseteq \tau^{k+1} \subseteq G)$ ist nach 3.9 auch $\zeta^k = (\zeta^k + \partial c_1^{k+1}) + \partial c_1^{k+1} \sim 0^k$ in G (auf G).

Man sieht aus dem zuletzt Gezeigten leicht, daß das Theorem auch im Fall 2) vollständig bewiesen ist, falls es in τ^{k+1} zwei $(k+1)$ -Zellen gibt, deren Vereinigung gerade die Verfeinerung einer $(k+1)$ -Zelle von G ist.

Falls ζ^k mindestens eine k -Zelle enthält, deren sämtliche Regularisate in einer Defektachse ebenfalls zu G gehören, tritt sicher Fall 1) ein, da aufgrund der Definition des algebraischen Randes mindestens eines dieser Regularisate zu jeder von $*\zeta^k$ auf G^* berandeten $(k+1)$ -Kette gehört.

Der eben beschriebene Fall tritt ganz offenkundig ein, wenn ζ^k mindestens eine k -Zelle c von G besitzt, deren j -te Komponente regulär ist. □

3.9.2 Bemerkungen

(1) Aus 3.8(4) und 3.9.1 folgt:

Ein k -Zyklus ζ^k , $1 \leq k \leq p-1$ ist genau dann nullhomolog in G (auf G), wenn jede Verfeinerung von ζ^k auf G^* , einer Verfeinerung von G , in G (auf G^*) nullhomolog ist.

(2) Es ist interessant, zu bemerken, daß die Aussage von Satz 3.9.1, für 0-Zyklen im Allgemeinen nicht zu stimmen braucht. Sei etwa G in Z^2 , der ALEXANDROFFschen Einpunktkompaktifizierung von R^2 , folgendes Gitter:

$x=0$ und $y=0$, also die x - und die y -Achse seien die einzigen Prinzipale von G . G^* entstehe aus G durch Hinzunahme der

Geraden $y=1$. G sei $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}\}$. Der Ursprung $0 = c^0$ und w sind die einzigen 0-Zellen von G . Offenkundig ist $c^0 + w$ nicht nullhomolog in G (auf G), da weder die x - noch die y -Achse, die ja offenkundig die einzigen Träger von 1-Ketten auf G sein können, ganz in G enthalten sind. $c^0 + w$ ist jedoch nullhomolog in G (auf G^*). Die erste 1-Zelle c_1^1 der von $c^0 + w$ in G auf G^* berandeten 1-Kette τ^1 sei die Verbindungsstrecke des Ursprungs mit dem Punkt $(0,1)$ auf der y -Achse, die zweite 1-Zelle von τ^1 sei, je nach Laune, der positive bzw. negative Halbstrahl der Geraden $y=1$ vereinigt mit dem Punkt $(0,1)$. Offenkundig liegt $c_1^1 + c_2^1$ in G und es gilt: $c^0 + w = \partial(c_1^1 + c_2^1)$.

- (3) Falls es gelänge für 3.9.1 Gegenbeispiele für den Fall $1 \leq k \leq p-2$ anzugeben, wäre das Fundamentallemma 3.12 und alle seine Folgerungen für den Fall $1 \leq k \leq p-2$ nicht auf dem von NEWMAN gezeigten Weg zu beweisen, da NEWMAN ganz offenkundig Satz 3.9.1 voraussetzt. (NEWMAN, Seite 133, Beweis von Theorem 19.1, 3. Zeile.)

3.10 Satz

Ist der Zyklus \mathfrak{Z}^k nicht nullhomolog in G , $0 \leq k \leq p-1$, so gilt dasselbe für mindestens eine Komponente von \mathfrak{Z}^k .

Beweis:

Nach 1.46(3) gilt, daß \mathfrak{Z}^k die Summe modulo 2 seine Komponenten ist. Nach 2.11 ist jede Komponente von \mathfrak{Z}^k ein Zyklus. Also müßte nach 3.9 \mathfrak{Z}^k nullhomolog in G sein, falls alle seine Komponenten in G nullhomolog wären. \square

3.11 Satz

Seien x_1 und x_2 , $x_1 \neq x_2$, aus Z^p (\mathbb{R}^p) und $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) offen.

x_1 und x_2 sind genau dann in G zusammenhängend, wenn ein Gitter G in Z^p (\mathbb{R}^p) existiert, so, daß x_1 und x_2 Gitterpunkte sind,

$(x_{1/2} = c_{1/2}^0)$ und $c_1^0 + c_2^0 \sim 0$ in G (auf G).

Beweis:

(1) Sei $x_1 = w$ und $x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_p^2)$. Falls x_1 und x_2 in G zusammenhängen, müssen sie in derselben Komponente von G liegen. Da nach I 3.16(3) die Komponenten offener Mengen in Z^p selbst wieder offen, also Gebiete sind, können wir o.B.d.A. annehmen, daß G ein Gebiet ist. Da $x_1 = w \in G$ muß $K = \mathbb{R}^p \setminus (G \setminus \{w\})$ aufgrund der Definition der ALEXANDROFFSchen Topologie des Z^p kompakt in \mathbb{R}^p sein. K liegt somit in einer geeigneten abgeschlossenen Kugel $\bar{K}_r(0)$ um den Ursprung, $\bar{K}_r(0)$ in der euklidischen Metrik gebildet. Sei $y = (y_1, \dots, y_p)$ aus $\mathbb{R}^p \setminus \bar{K}_r(0)$, so gilt, falls $M = \{z \in \mathbb{R}^p \mid y_1 \leq z_1 < \infty, z_i = y_i, i = 2, \dots, p\}$ ist, $M \subseteq \mathbb{R}^p \setminus \bar{K}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K \subseteq G \setminus \{w\} \subseteq G$,

da $K \subseteq \bar{K}_r(0)$, haben wir:

$y \in \mathbb{R}^p \setminus \bar{K}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K = G \setminus \{w\}$. Da G ein Gebiet in \mathbb{Z}^p ist, gilt nach I 3.25(2), daß $G' = G \setminus \{w\}$ ein Gebiet in \mathbb{R}^p ist. Somit lassen sich y und x_2 durch einen ganz in G' verlaufenden, achsenparallelen, einfachen Streckenzug S miteinander verbinden (KUHN, Topologie, 2.9, p. 25). Das Gitter G in \mathbb{Z}^p wird so gewählt, daß die Bestimmungszahlen von G_i gleich den i -ten Koordinaten der Eckpunkte von S sind. S ist offenkundig der Träger einer 1-Kette τ_1^1 auf G , die ganz in $\mathbb{R}^p \setminus K = G \setminus \{w\} \subseteq G$ verläuft und deren algebraischer Rand gleich $\{x_2, y\}$ ist. Falls $y_1 = d_{n_1}$ ist M eine unbeschränkte 1-Zelle c^1 von G , falls $y_1 < d_{n_1}$, bilden diejenigen 1-Zellen von G , deren erstes Koordinatenintervall gleich $[d_j, d_{j+1}]$ ist, $y_1 \leq d_j < d_{j+1} \leq d_{n_1}$ und deren übrige

Koordinatenintervalle gleich $[y_i, y_i]$, $i=2, \dots, p$, sind, eine 1-Kette τ_2^1 , deren Träger ganz in $\mathbb{R}^p \setminus \bar{K}_r(0) \subseteq \mathbb{R}^p \setminus K \subseteq G$ verläuft und deren algebraischer Rand gleich $\{w, y\}$ ist. $\tau^1 = \tau_1^1 + \tau_2^1$ ist eine 1-Kette mit $\partial \tau^1 = \partial \tau_1^1 + \partial \tau_2^1 = \{w, x_2\}$, $|\tau^1| \subseteq \subseteq |\tau_1^1| \cup |\tau_2^1| \subseteq G$.

Seien nun x_1, x_2 zwei Punkte aus \mathbb{R}^p . Falls x_1 und x_2 in G zusammenhängen, so liegen sie in derselben Komponente von G und, da die Komponenten jeder offenen Teilmenge von \mathbb{R}^p Gebiete sind, (KUHN, Topologie, 4.3, p. 134, \mathbb{R}^p ist bogenzusammenhängend, da \mathbb{R}^p ein normierter Raum ist (I 2.23)), können wir wiederum o.B.d.A. G als ein Gebiet annehmen. Wiederum sind x_1 und x_2 durch einen ganz in G verlaufenden, achsenparallelen, einfachen Streckenzug S verbindbar und wiederum wird das Gitter G in \mathbb{R}^p so gewählt, daß die Bestimmungszahlen der Prinzipale aus G_i mit den i -ten Koordinaten der Eckpunkte von S übereinstimmen. Genau wie oben ist S der Träger einer 1-Kette τ^1 auf G , deren algebraischer Rand mit $\{x_1, x_2\}$ übereinstimmt, so, daß $x_1 = c_1^0$, $x_2 = c_2^0$, $c_1^0 + c_2^0 \sim 0$ in G gilt.

Die Umkehrung folgt sowohl für den Fall $x_1 = w$, x_2 aus \mathbb{R}^p , als auch für x_1, x_2 aus \mathbb{R}^p , sofort aus 2.14. □

3.11.1 Folgerung

Sei $G \subseteq \mathbb{Z}^p$ (\mathbb{R}^p) ein Gebiet und \mathfrak{z}^0 ein in G gelegener 0-Zyklus, so ist \mathfrak{z}^0 in G nullhomolog.

Beweis:

$\mathfrak{z}^0 = \{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$ läßt sich als Summe modulo 2 der n 0-Zyklen $\mathfrak{z}_i^0 = x_i + y_i$, $i=1, \dots, n$, darstellen. Nach 3.11 sind diese aber nullhomolog in G und somit ist nach 3.9 auch \mathfrak{z}^0 in G nullhomolog. □

3.11.2 Folgerung

Sei $G \subseteq \mathbb{Z}^p$ (\mathbb{R}^p) eine offene Teilmenge und gibt es einen in G gelegenen, aber dort nicht nullhomologen 0-Zyklus \mathfrak{z}^0 , so ist G kein Gebiet und besitzt mindestens zwei, höchstens abzählbar viele Komponenten, die sämtliche Gebiete in \mathbb{Z}^p bzw. \mathbb{R}^p sind.

Beweis:

Wäre G ein Gebiet, so wäre nach 3.11.1 jeder in G gelegene 0-Zyklus in G nullhomolog. Somit muß G mindestens zwei Komponenten besitzen. Nach I 2.23 bzw. I 3.16(3) sind alle Komponenten einer in \mathbb{R}^p bzw. \mathbb{Z}^p gelegenen offenen Menge Gebiete. Wegen der Separabilität von \mathbb{R}^p bzw. \mathbb{Z}^p (I 3.28(1)) kann nach I 1.1 jede offene Teilmenge von \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p) nur abzählbar viele Komponenten besitzen. □

Wir sind nun in der Lage, das Fundamentallema auf Zyklen in \mathbb{Z}^p zu verallgemeinern:

3.12 Theorem (Fundamentallema; es entspricht Theorem 19.1, p. 133 in NEWMAN.)

Sei \mathfrak{z}^k ein k -Zyklus auf einem Gitter G des \mathbb{Z}^p und sei a ein Punkt aus \mathbb{Z}^p , der nicht im Träger von \mathfrak{z}^k liegt. Falls nun $0 \leq k \leq p-1$, ist $\mathfrak{z}^k \sim 0^k$ in $\mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$.

Beweis:

Sei \mathfrak{z}^0 ein Nullzyklus auf dem Gitter G des \mathbb{Z}^p , d.h. $\mathfrak{z}^0 = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}$, a_j bzw. b_j eine 0-Zelle (ein Gitterpunkt) von G , ferner gelte: $a \notin |\mathfrak{z}^0|$, also $a \neq a_j, b_j, j=1, \dots, n$. Nach 3.8(5) ist $\mathfrak{z}_j^0 = a_j + b_j \sim 0^0$ in $\mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$, also gilt nach 3.9 $\mathfrak{z}^0 = \sum_{j=1}^n \mathfrak{z}_j^0 \sim 0^0$ in $\mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$.

Um den Fall, daß $k \geq 1$ ist, zu beweisen, wollen wir zunächst annehmen, daß a selbst ein Gitterpunkt ist. Im Falle $a=w$ ist dies sicherlich der Fall. Falls $a \neq w$, muß G unter Umständen noch zu einem Gitter G^* , welches jeden Prinzipal $h_i^{a_i}$, a_i die i -te Koordinate von a , enthält, verfeinert werden.

Sei nun G_e das Gitter einfachsten Typs, das a als Gitterpunkt enthält, also $G_e = \{w\} \cup \{h_i^{a_i}, i=1, \dots, p\}$. a liegt in jeder Zellenkomponente von G_e und somit in jeder k -Zelle c^k von G_e mit $k \geq 1$. Daher liegt a auch im Träger jedes von 0^k verschiedenen k -Zyklus, $k \geq 1$. Da $0^k = \partial 0^{k+1}$, $|0^{k+1}| \subseteq \mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$, $0^k \sim 0$ in $\mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$, ist 0^k der einzige k -Zyklus \mathfrak{z}^k , für den $|\mathfrak{z}^k| \subseteq \mathbb{Z}^p \setminus \{a\}$ gilt. Deshalb gilt das Theorem in diesem Fall.

Nun sei G ein Gitter mit der Eigenschaft, daß die Entfernung

eines Prinzipals $h=h_i=h_i^j$ von G , ein Gitter $G_0 \supseteq G_e$ liefert, für welches die Aussage bereits bewiesen ist. (G_i ist somit mindestens zweiprinzipalig!) Falls $a \neq w$ und $a \notin h_i^j = h_i^{\Delta_j}$, also $a_i \neq \Delta_j$, sei Z diejenige h_i^j zugeordnete Zellenkomponente, welche in demjenigen h_i^j assoziierten Halbraum $+h_i^j, -h_i^j$ enthalten ist, welcher a nicht enthält. (O.B.d.A., falls etwa $a_i < \Delta_j$ muß $Z=+Q_i^j$ gewählt werden.) Falls $a=w$, oder $a \in h_i^j$, werde Z als eine h_i^j zugeordnete Zellenkomponente gewählt, welche in einem Halbraum enthalten ist, der einem zu h_i^j parallelen Prinzipal h_i^1 aus G , $h_i^1 \neq h_i^j$, assoziiert ist. Da G_i mindestens zwei Prinzipale enthält, gibt es sicher einen zu h_i^j parallelen, aber von h_i^j verschiedenen Prinzipal aus G ; Z ist somit beschränkt. Falls $j=1$, wähle $Z=+h_i^1=-h_i^2$, falls $j=n_i$, wähle $Z=-h_i^{n_i}=+h_i^{n_i-1}$. Falls $1 < j < n$, wähle Z entweder als $+h_i^j$ oder als $-h_i^j$. Sicherlich gilt in diesem Fall für jede k -Zelle c^k einer in $Z^P \setminus \{a\}$ enthaltenen k -Kette τ^k mit $Z_i(c^k) \supseteq h_i^j$: $c^k \cap h_i^j \subseteq Z^P \setminus \{a\}$. Aufgrund von 1.28(6) gibt es zu jeder in \mathfrak{z}^k enthaltenen k -Zelle c^k , welche eine Teilmenge von h_i^j ist, ($Z_i(c^k)=h_i^j$), genau eine $(k+1)$ -Zelle c^{k+1} , für welche $Z_i(c^{k+1})=Z$, da Z genau eine der h_i^j zugeordneten, regulären Zellenkomponenten ist. τ^{k+1} sei die $(k+1)$ -Kette aller dergestaltigen $(k+1)$ -Zellen. $\mathfrak{z}_1^k = \mathfrak{z}^k + \partial\tau^{k+1}$ ist ein k -Zyklus, da τ^{k+1} nach 2.12(2) ein k -Zyklus und die Summe zweier k -Zyklen wiederum ein k -Zyklus ist (3.9). \mathfrak{z}_1^k besitzt keine in h_i^j enthaltene k -Zelle, da jede in τ^{k+1} enthaltene k -Zelle c^k , welche zugleich Teilmenge von h_i^j ist, auch zu \mathfrak{z}^k gehört und daher nicht in $\mathfrak{z}^k + \partial\tau^{k+1}$ liegt. \mathfrak{z}_1^k ist die Verfeinerung auf G eines k -Zyklus \mathfrak{z}_0^k auf G_0 ($\mathfrak{z}_1^k = *\mathfrak{z}_0^k$). (3.6.1(2)).

Wir müssen nun zeigen, daß $|\mathfrak{z}_0^k| = |*\mathfrak{z}_0^k| = |\mathfrak{z}_1^k| \subseteq Z^P \setminus \{a\}$.
 a liegt nicht in $|\tau^{k+1}|$!

Falls $a \neq w$ und $a \notin h_i^j$, so liegt a nicht in Z (aufgrund der Wahl von Z !). Da aber alle $(k+1)$ -Zellen c^{k+1} aus τ^{k+1} Z als i -te Zellenkomponente besitzen, gilt:

$$c^{k+1} = \bigcap_{j=1}^p z_j(c^{k+1}) \subseteq z_i(c^{k+1}) = Z \text{ für alle } c^{k+1} \in \tau^{k+1}. \text{ Somit}$$

$$\text{haben wir: } |\tau^{k+1}| = \bigcup_{c^{k+1} \in \tau^{k+1}} c^{k+1} \subseteq Z \subseteq Z^P \setminus \{a\}.$$

Falls nun aber $a=w$, so sind alle Zellen von τ^{k+1} beschränkt, denn, da $a=w$ nicht in $|\mathfrak{z}^k|$ liegt, sind alle k -Zellen von \mathfrak{z}^k beschränkt; (wäre etwa c^k aus \mathfrak{z}^k unbeschränkt, so hätten wir: $a \in c^k \subseteq |\mathfrak{z}^k|$). Die $(k+1)$ -Zellen von τ^{k+1} entstehen aber aus den

k-Zellen c^k von \mathfrak{z}^k , die in h_i^j liegen, dergestalt, daß $z_i(c^k) = h_i^j$ durch Z ersetzt wird. Im Falle $a=w$ wurde Z aber als beschränkte Zellenkomponente gewählt. Da $z_j(c^{k+1}) = z_j(c^k)$, für $i \neq j$, $z_j(c^k)$ beschränkt und auch Z beschränkt ist, muß auch c^{k+1} beschränkt sein.)

Bleibt noch der Fall: $a \in h_i^j$. In diesem Fall aber gilt:

$$|\tau^{k+1}| \cap h_i^j \subseteq |\mathfrak{z}^k| \subseteq z^p \setminus \{a\}. \quad (|\tau^{k+1}| \cap h_i^j = (\bigcup_{c^{k+1} \in \tau^{k+1}} c^{k+1}) \cap h_i^j = (c^{k+1} \cap h_i^j).)$$

$c^{k+1} \cap h_i^j \subseteq c^k$, $c^k \in \mathfrak{z}^k$, für jede Zelle $c^{k+1} \in \tau^{k+1}$ aufgrund der Definition von τ^{k+1} . (c^{k+1} entsteht aus einer in h_i^j enthaltenen k-Zelle c^k von \mathfrak{z}^k durch Regularisierung nach oben oder nach unten in der i-ten Achse. Somit gilt: $z_j(c^{k+1}) = z_j(c^k)$ für $i \neq j$.)

Also haben wir erneut: $a \notin |\tau^{k+1}|$, da a in $|\tau^{k+1}| \cap h_i^j$ läge, falls es in $|\tau^{k+1}|$ enthalten wäre. $\mathfrak{z}_1^k = \mathfrak{z}^k + \partial\tau^{k+1}$. Daher gilt:

$$|\mathfrak{z}_1^k| = |\mathfrak{z}^k + \partial\tau^{k+1}| \subseteq |\mathfrak{z}^k| \cup |\partial\tau^{k+1}| \subseteq |\mathfrak{z}^k| \cup |\tau^{k+1}| \subseteq z^p \setminus \{a\}.$$

Da nun aber $\mathfrak{z}_1^k = * \mathfrak{z}_0^k$, \mathfrak{z}_0^k ein k-Zyklus auf \mathbb{G}_0 und $|\mathfrak{z}_0^k| = |*\mathfrak{z}_0^k| = |\mathfrak{z}_1^k| \subseteq z^p \setminus \{a\}$ nach der Induktionshypothese, gilt also, daß $\mathfrak{z}_0^k \sim 0^k$ in $z^p \setminus \{a\}$ auf \mathbb{G}_0 . Wir haben: $\mathfrak{z}_0^k = \partial\tau_0^{k+1}$, $|\tau_0^{k+1}| \subseteq z^p \setminus \{a\}$, τ_0^{k+1} eine (k+1)-Kette auf \mathbb{G}_0 . Sei $*\tau_0^{k+1}$ die Verfeinerung von τ_0^{k+1} auf \mathbb{G} , dann ergibt sich: $\partial(\tau^{k+1} + *\tau_0^{k+1}) = \partial\tau^{k+1} + \partial*\tau_0^{k+1} = \partial\tau^{k+1} + *\partial\tau_0^{k+1} = \partial\tau^{k+1} + *\mathfrak{z}_0^k = \partial\tau^{k+1} + \mathfrak{z}_1^k = \partial\tau^{k+1} + \mathfrak{z}^k + \partial\tau^{k+1} = \mathfrak{z}^k$; $|\tau^{k+1} + \tau_0^{k+1}| \subseteq |\tau^{k+1}| \cup |*\tau_0^{k+1}| = |\tau^{k+1}| \cup |\tau_0^{k+1}| \subseteq z^p \setminus \{a\}$.

Summa summarum: $\mathfrak{z}^k \sim 0^k$ in $z^p \setminus \{a\}$ auf \mathbb{G} .

Da sich jedes Gitter, welches den Punkt a als Gitterpunkt enthält, durch schrittweise Hinzunahme eines Prinzipals aus \mathbb{G}_e aufbauen läßt, haben wir bis jetzt bewiesen:

Sei \mathbb{G} ein Gitter in z^p und a ein Gitterpunkt von \mathbb{G} . Ferner sei \mathfrak{z}^k , $0 \leq k \leq p-1$, ein k-Zyklus auf \mathbb{G} , dessen Träger den Punkt a nicht enthält. Dann gilt: $\mathfrak{z}^k \sim 0^k$ in $z^p \setminus \{a\}$ auf \mathbb{G} .

Der allgemeine Fall folgt dann aus 3.9.1, da jedes Gitter \mathbb{G} , welches a nicht als Gitterpunkt enthält, sich so verfeinern läßt, daß a Gitterpunkt der Verfeinerung wird; (siehe oben.)



3.13 Bemerkungen

(1) Da für $0 \leq k \leq p-1$ $|Z^k| \subseteq |G| \subset Z^p$ (1.2(3)), gibt es für jeden k -Zyklus Z^k einen Punkt a aus Z^p , der *nicht* in $|Z^k|$ liegt. Also ist jeder k -Zyklus mit $0 \leq k \leq p-1$ in Z^p nullhomolog.

(2) Sei $Z = Z^k$, $0 \leq k \leq p-1$, ein beschränkter k -Zyklus, (d.h. alle $c^k \in Z^k$ sind beschränkte k -Zellen,) dann gilt: $w \notin |Z^k|$, somit: $Z^k \sim 0^k$ in $Z^p \setminus \{w\} = \mathbb{R}^p$.

Da ein beschränkter k -Zyklus Z^k , $0 \leq k \leq p-1$, nullhomolog in \mathbb{R}^p ist, gibt es eine $(k+1)$ -Kette τ^{k+1} mit $\partial \tau^{k+1} = Z^k$ und $|\tau^{k+1}| \subseteq \mathbb{R}^p$. Dies bedeutet aber, daß w in *keiner* $(k+1)$ -Zelle von τ^{k+1} enthalten, τ^{k+1} daher beschränkt ist.

("Jeder beschränkte k -Zyklus, $0 \leq k \leq p-1$, berandet mindestens eine beschränkte $(k+1)$ -Kette.")

(3) Sei $Z = Z^{p-1}$ ein $(p-1)$ -Zyklus. Aufgrund des verallgemeinerten Fundamentallemmas 3.12 gibt es eine p -Kette τ^p mit $Z^{p-1} = \partial \tau^p$. τ^p und $[\tau^p$ sind die beiden einzigen p -Ketten, die Z^{p-1} als algebraischen Rand besitzen. Seien τ_1^p, τ_2^p

zwei verschiedene p -Ketten, die Z^{p-1} als ihren algebraischen Rand besitzen. Wegen $\partial(\tau_1^p + \tau_2^p) = \partial \tau_1^p + \partial \tau_2^p = Z^{p-1} + Z^{p-1} = 0^{p-1}$, ist $\tau_1^p + \tau_2^p$ ein p -Zyklus. Somit gilt: entweder ist $\tau_1^p + \tau_2^p = 0^p$ oder $\tau_1^p + \tau_2^p = \Omega^p$ (2.15). Da aber aus $\tau_1^p + \tau_2^p = 0^p$, $\tau_1^p = (\tau_1^p + \tau_2^p) + \tau_2^p = 0^p + \tau_2^p = \tau_2^p$ folgte, im Widerspruch zu $\tau_1^p \neq \tau_2^p$, muß $\tau_1^p + \tau_2^p = \Omega^p$ und somit $\tau_1^p = \Omega^p + \tau_2^p = [\tau_2^p$ gelten.

(4) Aufgrund des Fundamentallemmas können wir den Sachverhalt: "Der k -Zyklus Z^k , $0 \leq k \leq p-1$, ist *nicht* nullhomolog in der offenen Menge $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p)", auch, wie folgt, formulieren: Der Träger *jeder* von Z^k berandeten $(k+1)$ -Kette τ^{k+1} (wegen des Fundamentallemmas gibt es mindestens eine solche) hat nichtleeren Durchschnitt mit dem Komplement von G .

3.14 Satz

Ist das Komplement $[G$ der offenen Menge $G \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) zusammenhängend und ist Z^{p-1} ein $(p-1)$ -Zyklus, mit $|Z^{p-1}| \subseteq G$, so gilt: $Z^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in G .

Beweis:

Nach 3.12 und 3.13(3) gibt es zwei komplementäre p -Ketten $\tau_{1/2}^p$ mit $\partial \tau_{1/2}^p = Z^{p-1}$. Als zusammenhängende Menge, die $|Z^{p-1}|$ nicht trifft, ist G entweder in $|\tau_1^p|^\circ$, oder in $|\tau_2^p|^\circ$ enthalten (2.16(4)).

Etwa aus $[G \subseteq |\tau_2^p|^\circ$ folgt: $G \supseteq [|\tau_2^p|^\circ = |\tau_1^p|$ (2.16(2)); d.h.: $\mathfrak{z}_1^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in G . □

3.15 Satz
 $\mathfrak{z}_1^{p-1}, \mathfrak{z}_2^{p-1}$ seien zwei $(p-1)$ -Zyklen und A, B seien zwei abgeschlossene, zusammenhängende Teilmengen von Z^p (\mathbb{R}^p), die weder $|\mathfrak{z}_1^{p-1}|$ noch $|\mathfrak{z}_2^{p-1}|$ treffen.

Dann ist mindestens einer der drei Zyklen $\mathfrak{z}_1^{p-1}, \mathfrak{z}_2^{p-1}, \mathfrak{z}_1^{p-1} + \mathfrak{z}_2^{p-1}$ nullhomolog in $[(A \cup B)]$.

Beweis:

Nach 3.12 und 3.13(3) ist \mathfrak{z}_1^{p-1} Rand von zwei komplementären p -Ketten. Eine davon muß nach 2.16(4) die Menge A im Innern ihres Trägers enthalten. Wir bezeichnen diese p -Kette mit τ_1^p und haben somit: $\partial\tau_1^p = \mathfrak{z}_1^{p-1}, A \subseteq |\tau_1^p|^\circ$.

Entsprechend existiert eine p -Kette τ_2^p mit $\partial\tau_2^p = \mathfrak{z}_2^{p-1}, B \subseteq |\tau_2^p|^\circ$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(1) $B \subseteq |\tau_1^p|^\circ$.

Hier ist $A \cup B \subseteq |\tau_1^p|^\circ$, also $[[\tau_1^p]] = [(|\tau_1^p|^\circ)] \subseteq [(A \cup B)]$. Wegen $\partial[\tau_1^p] = \partial\tau_1^p = \mathfrak{z}_1^{p-1}$ gilt damit: $\mathfrak{z}_1^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(A \cup B)]$.

(2) $A \subseteq |\tau_2^p|^\circ$.

Wie bei (1) findet man $\mathfrak{z}_1^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(A \cup B)]$.

(3) Es gilt weder (1) noch (2).

Nach 2.16(4) ist dann $B \subseteq [|\tau_1^p|^\circ], A \subseteq [|\tau_2^p|^\circ]$.

Sei τ^p die Kette der gemeinsamen p -Zellen von τ_1^p und τ_2^p . Wegen $\tau^p \subseteq \tau_1^p + \tau_2^p$, folgt mit 1.42(4): $A \subseteq |\tau_1^p|^\circ \cap [|\tau_2^p|^\circ] = |\tau^p|^\circ \subseteq [|\tau_1^p + \tau_2^p|^\circ]$.

Entsprechend findet man: $B \subseteq [|\tau_1^p + \tau_2^p|^\circ]$.

Dies ergibt: $A \cup B \subseteq [|\tau_1^p + \tau_2^p|^\circ], [(\tau_1^p + \tau_2^p)] = [(|\tau_1^p + \tau_2^p|^\circ)] \subseteq [(A \cup B)]$.

Wegen $\partial[(\tau_1^p + \tau_2^p)] = \partial(\tau_1^p + \tau_2^p) = \partial\tau_1^p + \partial\tau_2^p = \mathfrak{z}_1^{p-1} + \mathfrak{z}_2^{p-1}$ ist somit $\mathfrak{z}_1^{p-1} + \mathfrak{z}_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(A \cup B)]$. □

4. Trennungssätze

4.1 Definition

Zwei Punkte x, y eines topologischen Raumes X werden durch die Menge $A \subseteq X$ getrennt, wenn sie in verschiedenen Komponenten von $[A$ liegen. Sie werden durch A nicht getrennt, wenn sie in derselben Komponente von $[A$ liegen.

4.2 Lemma (J. W. ALEXANDER, 1922; entspricht Theorem 20.1, p. 134, NEWMAN)

Seien F_1 und F_2 abgeschlossene Teilmengen von Z^p , $p \geq 2$, und τ^k ein k -Zyklus des Gitters G , $0 \leq k \leq p-2$, der in den offenen Mengen $Z^p \setminus F_i$, $i=1,2$, eine $(k+1)$ -Kette τ_i^{k+1} berandet.

Falls $\tau_1^{k+1} + \tau_2^{k+1} \sim 0^{k+1}$ in $[(F_1 \cap F_2)]$ ist, gilt:

$\tau^k \sim 0^k$ in $[(F_1 \cup F_2)]$ (auf einer Verfeinerung G^* von G).

Beweis:

Da $\tau^{k+1} := \tau_1^{k+1} + \tau_2^{k+1} \sim 0$ in $[(F_1 \cap F_2)]$ ist, gibt eine $(k+2)$ -Kette τ^{k+2} auf G , deren Träger $|\tau^{k+2}|$ in $[(F_1 \cap F_2)]$ enthalten und deren algebraischer Rand τ^{k+1} ist: $|\tau^{k+2}| \subseteq [(F_1 \cap F_2)] = [F_1] \cap [F_2]$.

Hieraus folgt: $\emptyset \subseteq A_i := F_i \cap |\tau^{k+2}| \subseteq F_i \cap ([F_1] \cup [F_2]) = (F_i \cap [F_1]) \cup (F_i \cap [F_2]) = F_i \cap [F_j]$ für $i \neq j$, $i, j=1,2$. Es gilt also: $A_1 \cap A_2 \subseteq (F_1 \cap [F_2]) \cap (F_2 \cap [F_1]) = (F_1 \cap [F_1]) \cap (F_2 \cap [F_2]) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

Nach dem Gittertrennungssatz 1.36 gibt es ein Gitter G' in Z^p dergestalt, daß keine Zelle von G' beide der abgeschlossenen Mengen A_i (F_i ist nach Voraussetzung abgeschlossen, $|\tau^{k+2}|$ ist nach 1.41.(1) abgeschlossen) trifft. $G^* = G' \cup G$ ist eine Verfeinerung von G , deren jede Zelle in einer Zelle von G' enthalten ist, somit ebenfalls höchstens eine der beiden Mengen A_i treffen kann.

τ_o^{k+2} sei die Menge der $(k+2)$ -Zellen von G^* , die in einer $(k+2)$ -Zelle von τ^{k+2} enthalten sind und F_1 treffen.

$\tau_o^{k+1} := \tau_2^{k+1} + \tau_o^{k+2}$ ist eine $(k+1)$ -Kette auf G^* . Da τ_o^{k+2}

ein $(k+1)$ -Zyklus ist, haben wir: $\partial \tau_o^{k+1} = \partial(\tau_2^{k+1} + \tau_o^{k+2}) =$

$\partial \tau_2^{k+1} + 0^{k+1} = \partial \tau_2^{k+1} = \tau^k$, die Verfeinerung von τ^k bzgl. G .

Ferner gilt:

$\tau_o^{k+1} \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$. Dies sieht man, wie folgt, ein:

$\tau_0^{k+1} = \tau_2^{k+1} + \tau_0^{k+2} \cup \tau_2^{k+1} \cup \tau_0^{k+2} \cup \tau_2^{k+1} \cup \tau_0^{k+2} \cup \tau_2^{k+1} \cup \tau_0^{k+2}$
 Da $\tau_2^{k+1} = \tau_2^{k+1} \subseteq \mathbb{Z}^p \setminus F_2$ nach Voraussetzung, gilt: $\tau_2^{k+1} \subseteq F_2$.
 τ_0^{k+2} ist diejenige Teilkette von τ_0^{k+2} , der Verfeinerung von τ_0^{k+2} bzgl. G' , deren Zellen F_1 treffen. Es gilt somit für jede $(k+2)$ -Zelle τ_c^{k+2} von τ_0^{k+2} : $\tau_c^{k+2} \cap (F_2 \cap \tau_0^{k+2}) = \emptyset$ aufgrund der Wahl von G' und somit: $(\tau_c^{k+2} \cap \tau_0^{k+2}) \cap (F_2 \cap \tau_0^{k+2}) = \emptyset$.

Da $\tau_0^{k+2} \subseteq \tau_0^{k+2}$ haben wir: $\tau_0^{k+2} \cap \tau_0^{k+2} = \tau_0^{k+2}$ und somit: $\tau_0^{k+2} \cap F_2 = (\tau_0^{k+2} \cap \tau_0^{k+2}) \cap F_2 = \tau_0^{k+2} \cap (\tau_0^{k+2} \cap F_2) = \emptyset$.

Zwischenresultat: $\tau_0^{k+1} \subseteq \tau_2^{k+1} \cup \tau_0^{k+2} \subseteq F_2$. Ferner gilt nach der Voraussetzung: $\tau_1^{k+1} = \tau_1^{k+1} \subseteq \mathbb{Z}^p \setminus F_1 = F_1$. Außerdem haben wir: $\tau_0^{k+1} = \tau_2^{k+1} + \tau_0^{k+2} = \tau_1^{k+1} + (\tau_1^{k+1} + \tau_2^{k+1} + \tau_0^{k+2}) \subseteq \tau_1^{k+1} \cup \tau_2^{k+1} + \tau_0^{k+2} = \tau_1^{k+1} + \tau_0^{k+2}$.

Da $\tau_1^{k+1} = \tau_2^{k+2}$, haben wir: $\tau_1^{k+1} = B$.
 $\tau_0^{k+1} = \tau_2^{k+2} = \tau_0^{k+2}$. Somit ist jede $(k+1)$ -Zelle τ_c^{k+1} aus τ_0^{k+1} in einer ungeraden Anzahl von $(k+2)$ -Zellen aus τ_0^{k+2} enthalten. A fortiori ist jede $(k+1)$ -Zelle aus τ_1^{k+1} , die F_1 trifft, in einer ungeraden Anzahl von $(k+2)$ -Zellen aus τ_0^{k+2} enthalten. Diese $(k+2)$ -Zellen haben somit ebenfalls nichtleeren Durchschnitt mit F_1 und gehören deshalb zur Teilkette τ_0^{k+2} . τ_c^{k+1} ist demnach in einer ungeraden Anzahl von $(k+2)$ -Zellen aus τ_0^{k+2} enthalten und gehört daher ebenfalls zu τ_0^{k+2} . Somit kann keine $(k+1)$ -Zelle aus τ_1^{k+1} , die F_1 trifft, in $\tau_1^{k+1} + \tau_0^{k+2}$ liegen. Alle Zellen aus $\tau_1^{k+1} + \tau_0^{k+2}$ haben somit leeren Durchschnitt mit F_1 und daher gilt: $B \cap F_1 = \emptyset$, somit: $B \subseteq F_1$. Wir haben: $\tau_0^{k+1} \subseteq \tau_1^{k+1} \cup B \subseteq F_1$. Summa summarum: $\tau_0^{k+1} \subseteq F_1 \cap F_2 = (F_1 \cap F_2)$, $\tau_0^k = \tau_0^{k+1}$. Somit ist $\tau_0^k \cap O^k$ in $(F_1 \cup F_2)$.

4.3 Bemerkungen

- (1) Falls F_1 und F_2 abgeschlossene Teilmengen von \mathbb{R}^p sind, von denen mindestens eine beschränkt, somit kompakt, ist und τ^k ein k -Zyklus des Gitters G im \mathbb{R}^p , $0 \leq k \leq p-2$, der in $\mathbb{R}^p \setminus F_1$ eine $(k+1)$ -Kette τ_i^{k+1} berandet, $i=1,2$, dergestalt, daß $\tau_1^{k+1} + \tau_2^{k+1} \sim O^{k+1}$ in $(F_1 \cap F_2)$, so gilt, daß $\tau_0^k \cap O^k$ in $(F_1 \cup F_2)$ (auf einer Verfeinerung G' von G).

Der Beweis verläuft wörtlich so, wie derjenige von Lemma 4.2. Die Kompaktheitsbedingung wird erforderlich, um den Gittertrennungssatz 1.36 anwenden zu können.

Falls $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ abgeschlossene und *disjunkte* Teilmengen von \mathbb{R}^p sind, gilt das ALEXANDERSche Lemma auf jeden Fall, da der Träger jeder in \mathbb{R}^p enthaltenen k -Kette τ^k , $0 \leq k \leq p$, beschränkt und abgeschlossen, somit kompakt, ist. Der Gittertrennungssatz wird auf die Mengen $A_i = F_i \cap \tau^{k+2}$, $i=1,2$, angewandt; somit gilt: $A_1 \cap A_2 \subseteq F_1 \cap F_2 = \emptyset$; A_i ist für $i=1,2$ kompakt, da A_i eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge τ^{k+2} ist.

- (2) Aufgrund der Dualität von Offenheit und Abgeschlossenheit und der DE MORGANSchen Regeln, kann das ALEXANDERSche Lemma auch, wie folgt, formuliert werden:

Seien G_1, G_2 zwei offene Teilmengen von Z^p und τ^k , $0 \leq k \leq p-2$, ein k -Zyklus, der in G_i , $i=1,2$, eine $(k+1)$ -Kette τ_i^{k+1} berandet.

Falls nun $\tau_1^{k+1} + \tau_2^{k+1} \sim 0^{k+1}$ in $G_1 \cup G_2$ ist, so gilt, daß $\tau^k \sim 0^k$ in $G_1 \cap G_2$.

Diese Formulierung ist äquivalent zu derjenigen des Lemmas 4.2.

Dies sieht man sofort, wenn man $G_1 = Z^p \setminus F_1$, $G_2 = Z^p \setminus F_2$ setzt

und $[(F_1 \cap F_2) = [F_1 \cup F_2 = G_1 \cup G_2$, $[(F_1 \cup F_2) = [F_1 \cap F_2 = G_1 \cap G_2$, beachtet.

- (3) Aus 3.11 und (2) ergibt sich:

Seien x_1, x_2 zwei Punkte von Z^p (\mathbb{R}^p) und G_1, G_2 zwei offene Teilmengen von Z^p (\mathbb{R}^p), die, falls die Betrachtung in \mathbb{R}^p geschieht, die Voraussetzungen von (1) erfüllen. Hängen x_1 und x_2 sowohl in G_1 , als auch in G_2 zusammen, d.h. gibt es ein Gitter G_1 , so daß x_1, x_2 Gitterpunkte c_1^0, c_2^0 von G_1 sind und, daß $c_1^0 + c_2^0 \sim 0^0$ in

G_1 (auf G_1) bzw. ein Gitter G_2 , so daß x_1 und x_2 Gitterpunkte

c_1^0, c_2^0 von G_2 und $c_1^0 + c_2^0 \sim 0^0$ in G_2 (auf G_2) sind und seien

τ_1^1 bzw. τ_2^1 1-Ketten auf G_1 bzw. G_2 , die von $c_1^0 + c_2^0$ berandet werden

und deren Träger in G_1 bzw. G_2 enthalten ist. Falls $G^* = G_1 \cup G_2$

eine gemeinsame Verfeinerung von G_1 und G_2 ist und τ_1^1, τ_2^1 die

Verfeinerungen von τ_1^1, τ_2^1 auf G^* sind, mit: $\tau_1^1 + \tau_2^1 \sim 0^1$ in

$G_1 \cup G_2$, so folgt: $c_1^0 + c_2^0 \sim 0^0$ in $G_1 \cap G_2$ auf G^* . Somit hängen

x_1 und x_2 auch in $G_1 \cap G_2$ zusammen.

- (4) Das ALEXANDERSche Lemma ist somit in gewisser Hinsicht ein "Nicht-trennungssatz": sind F_1, F_2 zwei abgeschlossene Teilmengen von Z^p (\mathbb{R}^p), die, falls unsere Betrachtung in \mathbb{R}^p geschieht, die Voraus-

setzungen von (1) erfüllen, kann das Ergebnis von (3) auch, wie folgt, formuliert werden:

Werden x_1 und x_2 weder durch F_1 noch durch F_2 getrennt und gibt es ein Gitter \mathbb{G} , das x_1 und x_2 als Gitterpunkte besitzt und gibt es auf diesem Gitter zwei 1-Ketten τ_1^1, τ_2^1 , deren algebraischer Rand gerade $x_1 + x_2$ und deren Träger im Komplement von F_1 bzw. F_2 enthalten ist, und berandet ihre Summe modulo 2 eine 2-Kette τ^2 , deren Träger im Komplement des Durchschnitts von F_1 und F_2 enthalten ist, so werden x_1 und x_2 auch durch die Vereinigung von F_1 und F_2 nicht getrennt.

- (5) Falls die beiden abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p)$, $p \geq 2$, disjunkt sind, folgt, daß, falls x_1, x_2 aus $\mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p)$ weder durch F_1 , noch durch F_2 getrennt werden, sie auch nicht durch $F_1 \cup F_2$ getrennt werden. Denn jede 1-Kette ist in $\mathbb{Z}^p \setminus (F_1 \cap F_2) = \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p \setminus (F_1 \cap F_2) = \mathbb{R}^p)$ nullhomolog aufgrund des Fundamentallemmas. (Falls wir unsere Betrachtungen in \mathbb{R}^p anstellen, können die x_1 und x_2 verbindenden in in $\mathbb{R}^p \setminus F_i$ gelegenen 1-Ketten τ_i^1 , $i=1,2$, beschränkt gewählt werden.)
- (6) Falls $p > 2$, gilt Theorem V. 9.2 in NEWMAN (Satz II 1.4 in KUHN [2]) im Allgemeinen nicht mehr, falls der Durchschnitt der beiden Mengen F_1, F_2 zusammenhängend und *nicht leer* ist. S^{p-1} sei die Oberfläche der Einheitskugel des \mathbb{R}^p , $p > 2$. F_1 sei die "untere Hälfte" von S^{p-1} , nämlich $S^{p-1} \cap -h_1^0$, F_2 die "obere Hälfte" von S^{p-1} , nämlich $S^{p-1} \cap +h_1^0$. F_1 und F_2 sind in \mathbb{R}^p kompakt und somit auch in \mathbb{Z}^p abgeschlossen. $F_1 \cap F_2 = S^{p-1} \cap h_1^0$. Dies ist jedoch gerade die Oberfläche der Einheitskugel des \mathbb{R}^{p-1} , die, da $p \geq 3$ und somit $p-1 \geq 2$ ist, zusammenhängt. F_2 ist nach I 3.21(1)(2) ein $(p-1)$ -Element des \mathbb{R}^p und, da $F_1 = -id(F_2)$, ist auch F_1 ein $(p-1)$ -Element. Somit gilt nach 4.7(1), daß sowohl das Komplement von F_1 , als auch dasjenige von F_2 bzgl. \mathbb{Z}^p , wie auch \mathbb{R}^p , ein Gebiet ist. $F_1 \cup F_2$ ist aber gerade S^{p-1} . Nach dem JORDANSchen Kurvensatz besitzt aber S^{p-1} zwei Komplementärgebiete sowohl in \mathbb{Z}^p , als auch in \mathbb{R}^p (4.9.1). Beispielsweise werden der 0-Punkt und $x = (2, 0, \dots, 0)$ durch $F_1 \cup F_2$ getrennt. Auch gegen das Korollar des Theorems V. 16.2 in NEWMAN gibt es ein ganz einfaches Gegenbeispiel:

Das Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, sei das Innere der Einheitskugel:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} < 1 \right\}; F = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid x_1 = 0, \|x\| \leq 1 \right\}.$$

F ist somit die "Äquatorialebene" der abgeschlossenen Einheits-

kugel, die in der Hyperebene $x_1=0$ liegt. F ist abgeschlossen in \mathbb{R}^p und Z^p , da es kompakt ist. Dann gilt: $F \cap \text{Rd } D = F \cap S^{p-1} = S^{p-2}$. S^{p-2} hängt zusammen, da $p-1 \geq 2$. Als echte Teilmenge der Hyperebene $x_1=0$ des \mathbb{R}^p kann F den \mathbb{R}^p nicht zerlegen. Somit hängen je zwei Punkte aus $D \setminus F$ in $\mathbb{R}^p \setminus F \subseteq Z^p \setminus F$ zusammen (I 2.20(1)). $D' = D \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| < 1, x_1 \neq 0\}$ besitzt jedoch die Partition $D' \cap \{x_1 < 0\} \mid D' \cap \{x_1 > 0\}$. Somit können die beiden Punkte $(-\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ aus D' in D' nicht zusammenhängen, da sie nicht in derselben Menge der Partition enthalten sind.

- (7) Der Beweis des Theorems 16.1, Newman, p. 125, ist deshalb nur für den Fall, daß wir $(p-2)$ -Zyklen verwenden, durchführbar, da die Summe der von den $(p-2)$ -Zyklen berandeten $(p-1)$ -Ketten, selbst eine $(p-1)$ -Kette ist und nur für solche gemäß 3.13(3) garantiert ist, daß sie, falls sie $(p-1)$ -Zyklen sind, *genau* zwei p -Ketten beranden. Von dieser Tatsache wird aber gleich zu Beginn des Beweises Gebrauch gemacht.

Wir wollen das Analogon zu Theorem 16.1 in NEWMAN nun formulieren und beweisen:

Seien F_1, F_2 abgeschlossene Teilmengen von Z^p , $p \geq 2$, und \mathfrak{z}^{p-2} ein $(p-2)$ -Zyklus, der in den offenen Mengen $Z^p \setminus F_i$, $i=1,2$, eine $(p-1)$ -Kette τ_i^{p-1} , $i=1,2$, berandet.

Falls nun $\mathfrak{z}^{p-1} = \tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ für jede Komponente P von F_2 , dann gilt:

$$\mathfrak{z}^{p-2} \sim 0^{p-2} \text{ in } Z^p \setminus (F_1 \cup F_2).$$

Beweis:

\mathfrak{z}^{p-1} ist ein Zyklus, da $\mathfrak{z} \tau_i^{p-1} = \mathfrak{z}^{p-2}$, $i=1,2$, ist. $Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ ist offen, da P als Komponente von F_2 in F_2 abgeschlossen ist. Somit ist P , wegen der Abgeschlossenheit von F_2 in Z^p , selbst in Z^p abgeschlossen und somit auch $F_1 \cap P$. Da gemäß 3.13(3) genau zwei p -Ketten von \mathfrak{z}^{p-1} berandet werden, wollen wir die eine die "schwarze" (K_s), die andere die "weiße" (K_w) nennen.

Da $\mathfrak{z}^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ für jede Komponente P von F_2 , gilt: $|\mathfrak{z}^{p-1}| \subseteq Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ und $|K_w|$ oder $|K_s|$ ist in $Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ für jede Komponente P von F_2 enthalten. Denn, falls es eine Komponente P' von F_2 gäbe, mit $|K_w| \cap [Z^p \setminus (F_1 \cap P')] \neq \emptyset \neq |K_s| \cap [Z^p \setminus (F_1 \cap P')]$, wäre \mathfrak{z}^{p-1} in $Z^p \setminus (F_1 \cap P')$ nicht nullhomolog, da K_w und K_s die beiden einzigen von \mathfrak{z}^{p-1} berandeten p -Ketten sind (3.13(4)). Etwa aus $|K_s| \subseteq Z^p \setminus (F_1 \cap P)$ folgt: $F_1 \cap P \subseteq Z^p \setminus |K_s| \subseteq |K_w|$, wegen 2.16(2) und $K_w = [K_s]$ (3.13(3)).

Wir haben, daß, falls $F_1 \cap P \neq \emptyset$, entweder $(F_1 \cap P) \subseteq K_w$ oder $(F_1 \cap P) \subseteq K_s$. Wir können somit diejenigen Komponenten von F_2 , die F_1 treffen, "weiße" oder "schwarze" nennen, je nachdem, ob $F_1 \cap P \subseteq K_w$ oder $F_1 \cap P \subseteq K_s$. Diese Klasseneinteilung ist offenkundig disjunkt.

X , die Vereinigung aller "schwarzen" Komponenten von F_2 ist abgeschlossen. Dies sieht man, wie folgt, ein:

Sei a ein Punkt aus \bar{X} . x_1, x_2, \dots sei eine Folge von Punkten aus X , die gegen a konvergiert. Diejenige Komponente, in der x_n liegt, nennen wir X_n . X_n ist offenkundig eine "schwarze" Komponente. Aufgrund der Definition der "schwarzen" Komponenten liegt $X_n \cap F_1$ in $|K_s|$. Es gilt also: $\emptyset \neq X_n \cap (F_1 \cap |K_s|) := B_n$. Sei nun y_n aus B_n . Da $F_1 \cap |K_s|$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes Z^P , selbst kompakt, und somit nach I 3.28(2) folgenkompakt ist, muß die Folge (y_n) eine Teilfolge $(y_{n_r})_{r \in \mathbb{N}'}$ die gegen einen Punkt b aus $|K_s| \cap F_1$ konvergiert, enthalten. Da auch die Teilfolge $(x_{n_r})_{r \in \mathbb{N}'}$ von (x_n) gegen a konvergiert und x_{n_r}, y_{n_r} in derselben Komponente X_{n_r} von F_2 liegen, somit in F_2 zusammenhängen, müssen nach NEWMAN, Theorem IV. 5.7, p. 83, a und b in F_2 , F_2 ist als abgeschlossene Teilmenge des (kompakten!) Raumes Z^P ebenfalls kompakt, zusammenhängen. Da b aus $F_1 \cap |K_s|$, trifft die von b bestimmte Komponente P_b von F_2 sowohl $|K_s|$, als auch F_1 , und muß somit wegen der Disjunktheit der Klasseneinteilung in "weiß" und "schwarz", selbst "schwarz" sein. Deshalb liegt a in der "schwarzen" Komponente P_b . Somit, da a aus \bar{X} beliebig: $\bar{X} \subseteq X \subseteq \bar{X}$, $X = \bar{X}$.

Genauso zeigt man, daß Y , die Vereinigung der "weißen" Komponenten, abgeschlossen ist. Da keine Komponente von F_2 zugleich X und Y treffen kann, existiert eine Partition $H_s | H_w$ von F_2 , dergestalt, daß $X \subseteq H_s$, $Y \subseteq H_w$. (NEWMAN, IV. 5.6, p. 82).

Nun wird die Methode, das ALEXANDERSche Lemma zu beweisen, sowohl auf H_s , als auch auf H_w angewandt.

Trivialerweise gilt, daß $H_s \cap H_w = \emptyset$. $F_1 \cap (H_s \cap |K_w|) = (F_1 \cap H_s) \cap |K_w| = (F_1 \cap H_s) \cap |K_w| \subseteq (F_1 \cap X) \cap |K_w| = \emptyset$, da alle "schwarzen" Komponenten $|K_w|$ nicht treffen. Ähnlich zeigt man: $F_1 \cap (H_w \cap |K_s|) = \emptyset$.

Nach dem Gittertrennungssatz 1.36 wählen wir zunächst ein Gitter G_1 so, daß keine Zelle von G_1 zugleich H_s und H_w trifft. Dann ein Gitter G_2 , das F_1 und $H_s \cap |K_w|$, schließlich ein Gitter G_3 , das F_1 und $H_w \cap |K_s|$ trennt. G' , ihre gemeinsame Verfeinerung ($G' = G_1 \cup G_2 \cup G_3$) trennt dann sicherlich sowohl H_w von H_s , als auch F_1 von $H_w \cap |K_s|$, als auch F_1 von $H_s \cap |K_w|$, da jede Zelle

von G' in einer Zelle von G_1, G_2 und G_3 enthalten ist (3.2(4)). K_1 sei die Kette der p -Zellen von $'K_W$ (der Verfeinerung von K_W auf G'), welche H_S treffen, und K_2 die Kette der p -Zellen von $'K_S$, die H_W treffen. Dann gilt, daß $K = 'K_W + K_1 + K_2$, $'K_W$ die Verfeinerung von K_W auf G' , keine p -Zelle enthält, die H_S trifft, da ja K_1 die Teilkette von $'K_W$ ist, deren Zellen H_S treffen. Ferner enthält K alle p -Zellen von G' , die H_W treffen, da keine Zelle von G' zugleich H_W und H_S treffen kann, somit alle Zellen von $'K_W$, die H_W treffen, auch in $'K_W + K_1$ enthalten sind, $'K_W$ und $'K_S$ keine gemeinsamen p -Zellen enthalten, da aus $'K_W \cap 'K_S \neq \emptyset$ nach 3.2(5) auch $K_W \cap K_S \neq \emptyset$ folgen würde, im Widerspruch zu $K_W = K_S$ und alle p -Zellen aus $'K_S$, die H_W treffen, gerade K_2 bilden. Somit gilt: $|K \cap F_2 = |K| \cap (H_S \cup H_W) = |K| \cap H_W$. Da aber die Gesamtheit der p -Zellen von G' eine Überdeckung von Z^P bildet (1.41.1), K jedoch alle Zellen von G' , die H_W treffen, umfaßt, gilt: $H_W \subseteq K$ und, da $|K \cap F_2 = H_W$, gilt somit nach 1.42(5): $|K \cap F_2 \subseteq H_W \subseteq |K|^0$. Da nach 2.16 $\partial K = \text{Rd } |K| = |K| \setminus (|K|^0)$, trifft der $(p-1)$ -Zyklus $\partial K \cap F_2$ nicht.

Wir haben somit: $\partial K = \partial K_W + \partial K_1 + \partial K_2 = \mathbb{Z}^{p-1} + \partial K_1 + \partial K_2 = \mathbb{Z}_1^{p-1} + \mathbb{Z}_2^{p-1} + \partial K_1 + \partial K_2$.

Sei $\mathbb{Z}^{p-1} = \mathbb{Z}_1^{p-1} + \partial K_1 + \partial K_2$. Dann gilt: $\mathbb{Z}^{p-1} = \mathbb{Z}_1^{p-1} + \underbrace{\mathbb{Z}_2^{p-1} + \partial K_1 + \partial K_2}_{= 0^{p-1}}$, somit:

(a) $\mathbb{Z}^{p-1} \subseteq \mathbb{Z}_2^{p-1} \cup \partial K \subseteq Z^P \setminus F_2$.

Andererseits: $|\mathbb{Z}^{p-1}| \subseteq |\mathbb{Z}_1^{p-1}| \cup |\partial K_1 + \partial K_2| \subseteq (Z^P \setminus F_1) \cup \partial K_1 + \partial K_2$.

$|\partial K_1 + \partial K_2| \subseteq |\partial K_1| \cup |\partial K_2| \subseteq |K_1 \cup K_2|$.

Nach der Wahl von G' und der Definition von K_1, K_2 gilt: Jede Zelle aus K_1 hat mit $H_S \cap 'K_W$ nichtleeren Durchschnitt und somit mit F_1 leeren Durchschnitt. Jede Zelle aus K_2 hat mit $H_W \cap 'K_S$ nichtleeren Durchschnitt; folglich hat jede dieser Zellen mit F_1 wiederum leeren Durchschnitt. Somit gilt: $|K_1| \cap F_1 = \emptyset = |K_2| \cap F_1$. Aufgrund der Definition des Trägers gilt somit: $|\partial K_1 + \partial K_2| \subseteq |K_1 \cup K_2| \subseteq Z^P \setminus F_1$ und, da $|\mathbb{Z}_1^{p-1}| \subseteq Z^P \setminus F_1$ (nach Voraussetzung) und $|\mathbb{Z}^{p-1}| \subseteq |\mathbb{Z}_1^{p-1}| + |\partial K_1 + \partial K_2|$, gilt: $|\mathbb{Z}^{p-1}| \subseteq Z^P \setminus F_1$ und somit nach (a): $|\mathbb{Z}^{p-1}| \subseteq (Z^P \setminus F_1) \cap (Z^P \setminus F_2) = Z^P \setminus (F_1 \cup F_2)$.

$\partial \mathbb{Z}^{p-1} = \partial \mathbb{Z}_1^{p-1} + \partial(\partial K_1) + \partial(\partial K_2) = \mathbb{Z}^{p-2} + 0^{p-2} + 0^{p-2} = \mathbb{Z}^{p-2}$. Daher ist \mathbb{Z}^{p-2} in $Z^P \setminus (F_1 \cup F_2)$ nullhomolog. □

Falls die Untersuchungen in \mathbb{R}^P angestellt werden, müssen F_1 und F_2 als beschränkt, somit kompakt, angenommen werden, da der Beweis, daß X bzw. Y , die Vereinigungen der "schwarzen" bzw. "weißen" Komponenten abgeschlossen sind, auf der Kompaktheit von F_1 und F_2 beruht.

Aus 4.3(5) ergibt sich:

4.3.1 Satz

Falls F_1, F_2 zwei disjunkte, nicht leere, abgeschlossene Teilmengen von $Z^P (R^P)$, $p \geq 2$, sind und ihre Komplemente bzgl. $Z^P (R^P)$ Gebiete in $Z^P (R^P)$ sind, ist auch der Durchschnitt dieser Komplemente ein Gebiet und nicht leer.

Beweis:

Je zwei Punkte aus dem Durchschnitt der beiden Komplemente - dieser ist nach den DE MORGANSchen Regeln das Komplement der Vereinigung von F_1 und F_2 - hängen nach 4.3(5) in diesem Durchschnitt zusammen und, da beide Komplemente offen sind, ist es auch ihr Durchschnitt. Wäre dieser Durchschnitt leer, so hätten wir, daß die Vereinigung von F_1 und F_2 $Z^P (R^P)$ wäre. $F_1 \cap F_2$ wäre dann aber eine Partition der (zusammenhängenden!) Menge $Z^P (R^P)$.

4.3.2 Folgerung

Sind G_1, G_2 zwei nichtleere Gebiete in $Z^P (R^P)$, $p \geq 2$, und ist $Z^P (R^P)$ die Vereinigung von G_1 und G_2 , so ist der Durchschnitt von G_1 und G_2 ein nicht leeres Gebiet.

Beweis:

Falls $X = Z^P (R^P)$, folgt aus $G_1 \cup G_2 = X$, daß $(X \setminus G_1) \cap (X \setminus G_2) = X \setminus (G_1 \cup G_2) = \emptyset$, $X \setminus G_i$, $i=1,2$, abgeschlossen und somit aus 4.3.1, daß $(X \setminus (X \setminus G_1)) \cap (X \setminus (X \setminus G_2)) = G_1 \cap G_2$ zusammenhängt. Wäre $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, wäre $G_1 \mid G_2$ eine Partition der zusammenhängenden Menge X . □

4.3.3 Satz

$F \neq Z^P (R^P)$, $p \geq 2$, sei eine abgeschlossene Teilmenge eines Gebietes $D \subseteq Z^P (R^P)$.

Sind D_1, D_2, \dots die Komponenten von $Z^P \setminus F (R^P \setminus F)$, so sind $D \cap D_1, D \cap D_2, \dots$ die Komponenten von $D \setminus F$.

Beweis:

Da $Z^P (R^P)$ lokal zusammenhängt und das Komplement $[F$ der abgeschlossenen Menge F offen ist, sind die D_j disjunkte, nicht leere Gebiete und es gilt: $[F = \bigcup D_j$. Jede Menge $[F \setminus D_n = \bigcup_{j \neq n} D_j$ ist

offen. Wäre $D \cap D_n = \emptyset$, so wäre $D_n \mid ((F \setminus D_n) \cup D$ eine Partition des zusammenhängenden Raumes $Z^P (R^P)$, da $D_n, D \neq \emptyset$ und

$$D_n \cap \left((F \setminus D_n) \cup D \right) = (D_n \cap D) \cup \left(D_n \cap \bigcup_{j \neq n} D_j \right) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset. \text{ Wir haben also:}$$

(a) $D_n \cap D \neq \emptyset, n = 1, 2, \dots$

Wir zeigen jetzt, daß $D \cap D_n$ zusammenhängend ist:

Zwei beliebige Punkte x, y aus $D \cap D_n$ sind zusammenhängend in D und F , werden somit weder durch $F_1 := D$, noch durch $F_2 := F$ getrennt.

Wegen $F_1 \cap F_2 = D \cap F = \emptyset$, werden sie nach 4.3.1 auch durch $F_1 \cup F_2$ nicht getrennt, sind somit zusammenhängend in $(F_1 \cup F_2) = F_1 \cup F_2 = D \cup F$. Somit existiert eine zusammenhängende Menge A , mit: $x, y \in A \subseteq D \cap F$. Da $A \subseteq F$ die Komponente D_n von F trifft, muß A in D_n enthalten sein, somit: $A \subseteq D_n$. Es folgt: $A \subseteq D \cap D_n$. D.h. x und y sind zusammenhängend in $D \cap D_n$ und wir haben: (KUHN, 1.10, p. 120)

(b) $D \cap D_n$ ist zusammenhängend, somit als Schnitt der beiden offenen Mengen D, D_n selbst offen, also ein Gebiet für $n=1,2,\dots$.

Sei nun C eine Komponente von $D \setminus F = D \cap F$. Wegen $C \subseteq F$ muß C in einer Komponente D_n von F enthalten sein. Es folgt: $C \subseteq D \cap D_n \subseteq D \cap F$ und, wegen (b) muß aufgrund der Maximalität von C $C = D \cap D_n$ gelten.

Umgekehrt ist auch jede Menge $D \cap D_n$ eine Komponente von $D \setminus F$; ist nämlich $D \cap D_n \subseteq B \subseteq D \setminus F$, B zusammenhängend, so muß B in einer gewissen Komponente $D \cap D_m$ von $D \setminus F$ enthalten sein und es folgt nacheinander: $D \cap D_n \subseteq D \cap D_m$, $m=n$ (nach (a)), somit $B = D \cap D_n$. □

4.3.4 Folgerungen, Bemerkungen

(1) F und $D \setminus F$ haben dieselbe "Anzahl" von Komponenten. Denn, falls der Komponente D_n von F die Komponente $D \cap D_n$ von $D \setminus F$ zugeordnet wird, impliziert diese Zuordnung eine bijektive Abbildung der Komponenten von F auf die Komponenten von $D \setminus F$.

Falls also F zusammenhängend ist, daher nur eine einzige Komponente besitzt, gilt, daß $D \setminus F$ ebenfalls nur eine Komponente besitzt, somit wiederum ein Gebiet ist. Falls insbesondere F ein in D gelegenes k -Element ist (4.4(1)), so ist nach 4.7(1) F ein Gebiet und daher ist auch $D \setminus F$ ein Gebiet.

(2) Auch $Z^p \setminus F$ hat nur abzählbar viele Komponenten, da Z^p , $p \geq 1$, separabel ist (I 3.28(1), I 1.1, I 3.16(1)).

Das ALEXANDERSche Lemma läßt sich teilweise umkehren:

4.3.5 Satz

F_1 und F_2 seien zwei abgeschlossene, zusammenhängende Teilmengen des Z^p (\mathbb{R}^p), $p \geq 2$, \mathcal{G} ein Gitter und $\tau_1^{p-1}, \tau_2^{p-1}$ seien zwei

$(p-1)$ -Ketten mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\partial \tau_1^{p-1} = \partial \tau_2^{p-1} = \partial^{p-2}$; (2) $\tau_1^{p-1} \cap \tau_2^{p-1} = \emptyset$; (3) $\partial^{p-2} \subset \partial^{p-2}$

in $(F_1 \cup F_2)$. Dann ist $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \subset \partial^{p-1}$ in $(F_1 \cap F_2)$.

Beweis:

Nach (3) ist $\tau^{p-2} = \tau_1^{p-1}$ mit $\tau^{p-1} \subseteq (F_1 \cup F_2) = [F_1 \cup F_2] \subseteq [F_1]$.

Für den Zyklus $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1}$ hat man: $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \subseteq \tau_1^{p-1} \cup \tau_2^{p-1} \subseteq [F_1]$. Nach 3.14 folgt: $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[F_1]$, da F_1 zusammenhängt. Wegen $[F_1] \subseteq [F_1 \cup F_2] = [(F_1 \cup F_2)]$ ist nach 3.8(3) auch $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(F_1 \cup F_2)]$. Entsprechend ist $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(F_1 \cap F_2)]$.

Nach 3.9 ergibt sich daraus: $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} = (\tau_1^{p-1} + \tau_1^{p-1}) + (\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1}) \sim 0^{p-1}$ in $[(F_1 \cup F_2)]$.

4.3.6 Folgerung

F_1, F_2 seien abgeschlossene, zusammenhängende Teilmengen des \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p), $p \geq 2$, G ein Gitter und $\tau_1^{p-1}, \tau_2^{p-1}$ seien $(p-1)$ -Ketten auf G mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\tau_1^{p-1} = \tau_2^{p-1} = \tau^{p-2}$;
- (2) $[\tau_1^{p-1} \cap F_{1/2}] = \emptyset$;
- (3) $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \not\sim 0^{p-1}$ in $[(F_1 \cap F_2)]$.

Dann gilt: $\tau^{p-2} \neq 0^{p-2}$.

Beweis:

Wäre $\tau^{p-2} = 0^{p-2}$, so wäre τ^{p-2} in $[(F_1 \cap F_2)]$ nullhomolog, da der Nullzyklus in jeder offenen Menge nullhomolog ist. Somit wären alle Voraussetzungen des Satzes 4.3.5 erfüllt und wir hätten: $\tau_1^{p-1} + \tau_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $[(F_1 \cap F_2)]$, im Widerspruch zu Voraussetzung (3). □

Aus dem ALEXANDERSchen Lemma können noch einige interessante Folgerungen gezogen werden:

4.3.7 Theorem

Sei $X = \mathbb{Z}^p$ (\mathbb{R}^p), $p \geq 2$ und G_1, G_2 zwei nichtleere Gebiete in X . Ferner gelte: $\text{Rd } G_1 \subseteq \text{Rd } G_2$. Dann ist $\text{Rd } G_1$ zusammenhängend.

Beweis:

Da $\text{Rd } G_1$ als Rand der offenen Menge G_1 nirgendsdicht und somit eine echte Teilmenge von \mathbb{Z}^p ist, können wir nach I 3.24 annehmen, daß $\text{Rd } G_1 \subseteq \mathbb{R}^p$.

Sei $F \subset \partial G_1$ abgeschlossen. Dann gibt es ein x aus $(\text{Rd } G_1 \setminus F)$ und eine geeignete offene Kugel $K_{\varepsilon_0}(x)$ um x liegt noch ganz in $\mathbb{R}^p \setminus F$, da F abgeschlossen, $(\mathbb{R}^p \setminus F)$ somit offen ist. Wegen $\text{Rd } G_1 \subseteq \text{Rd } G_2$ liegt x im Rand von G_2 . Deshalb gilt: $G_2 \cap K_{\varepsilon_0}(x) \neq \emptyset \neq$

$\neq K_o(x) \cap G_1$. Sei also x_1 aus $G_1 \cap K_o(x)$, x_2 aus $G_2 \cap K_o(x)$, dann liegt auch die Verbindungsstrecke $\overline{x_1 x_2}$ wegen der Konvexität von $K_o(x) \subseteq X \setminus F$, ganz in $K_o(x)$ und somit in $X \setminus F$. Jeder Punkt y_2 aus G_2 läßt sich aber mit x_2 durch einen in G_2 verlaufenden Bogen B_2 verbinden (X ist lokalbogenzusammenhängend! G_2 offen und zusammenhängend!). Dasselbe gilt auch für jeden Punkt y_1 aus G_1 , der sich durch den ganz in G_1 verlaufenden Bogen B_1 mit x_1 verbinden läßt. $B_1 \cup \overline{x_1 x_2} \cup B_2$ ist dann aber ein y_1 mit y_2 verbindender Bogen. G_1 und G_2 liegen somit in derselben Bogenzusammenhangskomponente von $X \setminus F$, werden somit durch F nicht getrennt.

Falls A_1, A_2 eine Partition von $\text{Rd } G_1$ wäre, so müßten beide Mengen A_1, A_2 nicht leere, echte, in der abgeschlossenen Menge $\text{Rd } G_1$ abgeschlossene und somit in X abgeschlossene Teilmengen von $\text{Rd } G_1$ sein. Nach Obigem würden somit G_1 und G_2 weder durch A_1 noch durch A_2 getrennt und somit würden sie nach 4.3(5), da A_1 und A_2 disjunkt sind, auch nicht durch deren Vereinigung, nämlich $\text{Rd } G_1$, getrennt. G_1 ist aber eine Komponente von $\text{Rd } G_1$ und wir hätten somit, daß G_2 in G_1 enthalten sein müßte. Da aber G_1 und G_2 disjunkt sind, muß G_2 leer sein. Hieraus folgt aber, daß der Rand von G_2 leer ist, woraus sich, wegen der Voraussetzung $\text{Rd } G_1 \subseteq \text{Rd } G_2$, ergäbe, daß der Rand von G_1 leer ist. Hieraus folgt jedoch wegen des Zusammenhangs von X , entweder $G_1 = \emptyset$ oder $G_1 = X$. Beide Folgerungen widersprechen jedoch der vorausgesetzten Nichtleerheit beider Gebiete. Somit kann es keine Partition des Randes von G_1 geben, woraus die Behauptung folgt. □

4.3.8 Theorem

Sei $X = \mathbb{Z}^p$ (\mathbb{R}^p).

Falls G ein nichtleeres Gebiet in X ist, haben alle Komponenten der offenen Menge $X \setminus \overline{G}$ zusammenhängende Ränder.

Beweis:

Falls G_o eine Komponente von $X \setminus \overline{G}$ ist, so gilt nach KUHN, 3.6, p. 130, daß $\text{Rd } G_o \subseteq \text{Rd}(X \setminus \overline{G}) = \text{Rd } \overline{G} \subseteq \text{Rd } G$, da in dem lokal bogenzusammenhängenden Raum X die Komponenten der offenen Menge $X \setminus \overline{G}$ offen sind. Somit sind die Voraussetzungen des vorigen Theorems erfüllt. □

4.3.9 Theorem

Sei X ein lokalzusammenhängender Raum, in welchem die Aussage des vorigen Theorems 4.3.8 gilt. Dann haben wir:

Falls x und y durch die abgeschlossene Menge F , $F \subseteq X$, getrennt werden, so werden sie bereits durch eine Komponente von F getrennt.

Beweis:

" x und y werden durch F getrennt" bedeutet: Es gibt zwei voneinander verschiedene Komponenten D_x, D_y von $X \setminus F$ mit $x \in D_x, y \in D_y$. Diese sind, als Komponenten der offenen Menge $X \setminus F$ in dem lokalbogenzusammenhängenden topologischen Raum X , offen. Wäre y aus $\text{Rd } D_x$, so hätten wir: $D_x \cap D_y \neq \emptyset$, denn in jedem topologischen Raum Y gilt für alle offenen Mengen O_1, O_2 : Falls $(\text{Rd } O_1) \cap O_2 \neq \emptyset$ ist, ist auch $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ (I 1.17).

Also liegt y in $X \setminus \overline{D_x}$ und somit in einer Komponente von $X \setminus \overline{D_x}$, die wir D'_y nennen wollen. Voraussetzungsgemäß ist $\text{Rd } D'_y$ zusammenhängend. D'_y ist als Komponente der offenen Menge $X \setminus \overline{D_x}$ offen und somit gilt: $\text{Rd } D'_y \cap D'_y = \emptyset$.

Da für alle von D'_y verschiedenen Komponenten $D_i, i \in I$, von $X \setminus \overline{D_x}$ $D_i \cap D'_y = \emptyset$, muß, wie oben, $D_i \cap \text{Rd } D'_y = \emptyset = D'_y \cap \text{Rd } D_i$ für alle $i \in I$ gelten.

$$X \setminus \overline{D_x} = D'_y \cup \bigcup_{i \in I} D_i, (X \setminus \overline{D_x}) \cap \text{Rd } D'_y = (D'_y \cup \bigcup_{i \in I} D_i) \cap \text{Rd } D'_y = \emptyset \quad (\text{siehe}$$

oben!), somit gilt: $\text{Rd } D'_y \subseteq \overline{D_x} = D_x \cup \text{Rd } D_x$. Wäre $D_x \cap \text{Rd } D'_y \neq \emptyset$, würde wieder $D_x \cap D'_y \neq \emptyset$ folgen (I 1.17), im Widerspruch zu

$$D'_y \subseteq X \setminus \overline{D_x} \subseteq X \setminus D_x. \text{ Daher also: } \text{Rd } D'_y \subseteq \text{Rd } D_x.$$

Da D_x eine offene Komponente von $X \setminus F$ ist, folgt: $\text{Rd } D'_y \subseteq \text{Rd } D_x \subseteq \text{Rd}(X \setminus F) = \text{Rd } F \subseteq F$, da F abgeschlossen ist. Somit ist $X \setminus F$ in $X \setminus \text{Rd } D'_y$ enthalten.

D'_y ist eine Komponente von $\text{Rd } D'_y$ und, da $X \setminus F \subseteq X \setminus \text{Rd } D'_y$, muß $D'_y \subseteq X \setminus F$ in einer von D'_y verschiedenen Komponente C' von $X \setminus \text{Rd } D'_y$ enthalten sein. ($C' \cap D'_y \neq \emptyset$ würde $C' = D'_y$ und somit $\emptyset \neq D_x \subseteq D'_y \subseteq X \setminus \overline{D_x} \subseteq X \setminus D_x$ implizieren. Dies ist jedoch offenkundig ein Widerspruch!).

Somit werden y und x durch $\text{Rd } D'_y \subseteq F$ getrennt. Da $\text{Rd } D'_y$ zusammenhängt, bestimmt $\text{Rd } D'_y$ die Komponente C von F . Da $\text{Rd } D'_y \subseteq C \subseteq F$, gilt: $X \setminus F \subseteq X \setminus C \subseteq X \setminus \text{Rd } D'_y$. Somit ist jede Komponente von $X \setminus C$ in einer Komponente von $X \setminus \text{Rd } D'_y$ enthalten. K sei diejenige Komponente von $X \setminus C$, die in D'_y , das ja eine Komponente von $X \setminus \text{Rd } D'_y$ ist, enthalten ist.

Da $x \in X \setminus F \subseteq X \setminus C$, muß D_x , als Komponente von $X \setminus F$ in einer

Komponente D von $X \setminus C$ enthalten sein.

Gälte $D \cap K \neq \emptyset$, so wäre $D = K$ und somit $D_x \subseteq D = K \subseteq D'_y$. Andererseits ist aber D'_y eine Komponente von $X \setminus D_x$, $D_x \subseteq X \setminus D_x$. Somit wäre $\emptyset \neq D_x \subseteq X \setminus D_x$, Widerspruch! Somit haben wir: $D \cap K = \emptyset$. x und y liegen somit in verschiedenen Komponenten von $X \setminus C$. $X \setminus C$ ist jedoch eine Komponente von F . Daher werden x und y durch eine Komponente von F getrennt.

4.3.10 Theorem

Sei X ein lokalbogenzusammenhängender Raum, in welchem Theorem 4.3.8 gilt und F eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge von X . Dann haben wir:

Jedes Komplementärgebiet von F hat einen zusammenhängenden Rand.

Beweis:

Sei D ein Komplementärgebiet von F und sei $H_1 | H_2$ eine Partition von $\text{Rd } D$. Wenn wir die offene Menge $X \setminus \bar{D}$ betrachten, gibt es keine Komponente K von $X \setminus \bar{D}$, deren Rand sowohl H_1 , als auch H_2 trifft, da diese Ränder voraussetzungsgemäß zusammenhängend sind und $\text{Rd } K \subseteq \text{Rd}(X \setminus \bar{D}) = \text{Rd } \bar{D} \subseteq \text{Rd } D$ gilt, weil K eine offene Komponente der offenen Menge $X \setminus \bar{D}$ aufgrund des lokalen Zusammenhangs von X ist.

Wir können somit die Komponenten von $X \setminus \bar{D}$ in zwei disjunkte Klassen einteilen: diejenigen, deren Rand in H_1 und diejenigen, deren Rand in H_2 enthalten ist. Falls nun die Vereinigung aller Komponenten der ersten Klasse die offene Menge G_1 ergibt, so ergibt die Vereinigung derjenigen der zweiten Klasse die offene Menge G_2 . Offenkundig gilt: $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

$G_1 \cup H_1$ ist abgeschlossen. Denn, falls x ein Punkt aus $\text{Rd } G_1$ ist, enthält jede Umgebung von x einen Punkt einer Komponente D_1 der ersten Klasse, und somit, da x nicht in G_1 und deshalb auch nicht in D_1 enthalten ist, einen Punkt aus $X \setminus D_1$. x ist deswegen ein Berührungspunkt sowohl von D_1 , als auch von $X \setminus D_1$ und somit ein Randpunkt von D_1 und gehört deshalb auch zu H_1 . H_1 ist aber in der in X abgeschlossenen Menge F abgeschlossen und somit auch in X abgeschlossen. Es gilt daher: $\overline{G_1} = G_1 \cup \text{Rd } G_1 \subseteq G_1 \cup H_1$ und, da $G_1 \cup H_1 \subseteq \overline{G_1} \cup H_1$ trivialerweise, ist $G_1 \cup H_1$ als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Genauso zeigt man, daß $G_2 \cup H_2$ abgeschlossen ist.

Somit sind $G_1 \cup H_1$ und $G_2 \cup H_2$ disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen, deren Vereinigung $(X \setminus \bar{D}) \cup \text{Rd } D = (X \setminus D)^\circ \cup \text{Rd}(X \setminus D) = X \setminus D$ ergibt und die, wegen $D \subseteq X \setminus F$, $F \subseteq X \setminus D$, F enthält.

Und, da $H_1, H_2 \subseteq \text{Rd } F \subseteq F$, gilt: $P_1 = F \cap (H_1 \cup G_1) \neq \emptyset$,
 $P_2 = F \cap (H_2 \cup G_2) \neq \emptyset$. P_1 und P_2 sind somit nicht leer und abge-
 schlossen in F . $P_1 \cup P_2 = \{F \cap (H_1 \cup G_1)\} \cup \{F \cap (H_2 \cup G_2)\} =$
 $= F \cap \{H_1 \cup G_1 \cup H_2 \cup G_2\} = F$, da $F \subseteq (H_1 \cup G_1) \cup (H_2 \cup G_2)$. Somit
 bildet $P_1 | P_2$ eine Partition der *zusammenhängenden* Menge F . □

4.3.11 Korollar

Falls X ein topologischer Raum ist, der den Voraussetzungen
 des vorigen Theorems 4.3.10 genügt und D ein Gebiet in X ist,
 gilt:

Alle Komplementärgebiete von $\text{Rd } D$, die von D verschieden sind,
 haben zusammenhängende Ränder.

Beweis:

Diese von D verschiedenen Komplementärgebiete von $\text{Rd } D$ sind
 genau die Komplementärgebiete der zusammenhängenden Menge \bar{D} ,
 da $(X \setminus \text{Rd } D) = X \setminus (\bar{D} \setminus D) = D \cup (X \setminus \bar{D})$, $X \setminus \bar{D}$ offen. Somit ist
 jede Komponente von $X \setminus \bar{D}$ ein Gebiet wegen des lokalen Zusam-
 menhangs von X . □

4.3.12 Theorem

Sei X ein zusammenhängender und lokalzusammenhängender topolo-
 gischer Raum, in welchem die Aussage des Theorems 4.3.10 gilt.
 Für jedes Gebiet $D \subseteq X$ gilt dann:

Jede Komponente von $X \setminus D$ enthält genau eine Komponente von $\text{Rd } D$.

Beweis:

Da $\text{Rd } D \subseteq X \setminus D$ ist jede Komponente von $\text{Rd } D$ in einer Komponente
 von $X \setminus D$ enthalten. Es genügt daher zu zeigen, daß, falls C
 eine Komponente von $X \setminus D$ ist, $\text{Rd } D \cap C \neq \emptyset$ und zusammenhängend
 ist. Wäre $\text{Rd } D \cap C$ keine Komponente von $X \setminus D$, so gäbe es eine
 Komponente C_1 von $\text{Rd } D$, die $\text{Rd } D \cap C$ umfaßt und mit C' , einer
 anderen Komponente von $X \setminus D$, nicht leeren Durchschnitt besäße.
 Somit wäre aber nach KUHN, 1.12, p. 120, $S = C_1 \cup C \cup C'$ eine
 zusammenhängende Teilmenge von $X \setminus D$, die *echte* Obermenge sowohl
 von C , als auch von C' wäre, im Widerspruch zur Maximalität
 von C, C' .

Nach NEWMAN, 6.5, p. 86, gilt, daß $\text{Rd } C = C \cap \text{Rd}(X \setminus D) = C \cap \text{Rd } D$,
 da $\text{Rd } D$ abgeschlossen und X lokalzusammenhängend ist. Falls
 $D=X$, stimmt die Behauptung trivialerweise, da $\text{Rd } D = \text{Rd } X = \emptyset$
 und $X \setminus D = X \setminus X = \emptyset$. Sei also $D \subset X$, somit: $\emptyset \neq X \setminus D$. Da X
 zusammenhängt, muß $\text{Rd } C \neq \emptyset$ sein, da für jede Komponente C
 von $X \setminus D$ $\emptyset \subset C \subset X$ gilt (I 1.16). Nach NEWMAN, 3.3, p. 78 ist

$X \setminus C$ ein Gebiet, da C als Komponente der abgeschlossenen Menge $X \setminus D$ in $X \setminus D$ abgeschlossen und somit in X abgeschlossen ist. $X \setminus C$ ist also in X offen und hängt als Komplement der Komponente C von $X \setminus D$ auch zusammen, da D zusammenhängt. Voraussetzungs- gemäß hängt dann auch $Rd(X \setminus C) = Rd C$ als Rand des Komplement- gebiets der zusammenhängenden und abgeschlossenen Menge C zusammen. Hieraus ergibt sich nach den obigen Ausführungen die Behauptung. □

4.3.13 Folgerungen

Sei X ein topologischer Raum, in dem die Aussage des obigen Theorems 4.3.12 gilt.

- (1) Falls Z eine Teilmenge von X , D ein Gebiet von X ist und C_1, C_2 zwei voneinander verschiedene Komponenten von $Rd D$, die Z treffen, sind, dann trifft Z auch D .

Beweis:

Angenommen: $Z \subseteq X \setminus D$. Da $Z \cap C_1 \neq \emptyset \neq Z \cap C_2$, C_1, C_2 zwei Komponenten von $Rd D$, gilt nach dem obigen Satz: $C_1 \subseteq C_1', C_2 \subseteq C_2', C_1', C_2'$ zwei voneinander verschiedene Komponenten von $X \setminus D$. Hieraus folgt, wie im Beweis des obigen Satzes, daß $C_1' \cup Z \cup C_2'$ zusammenhängt, im Widerspruch zur Maximalität von C_1', C_2' .

- (2) Offenkundig ist in solchen Räumen die Aussage: "Das Gebiet D hat ein zusammenhängendes Komplement" zu: "Das Gebiet D hat einen zusammenhängenden Rand" gleichwertig, da in beiden Fällen sowohl das Komplement, als auch der Rand nur eine Komponente besitzen und somit aufgrund des obigen Satzes aus der Einkomponentigkeit, also dem Zusammenhang, der einen Menge, die Einkomponentigkeit, somit wiederum der Zusammenhang der anderen folgt.

- (3) Sei $D \subseteq Z^p, p \geq 2$, ein Gebiet und y sei ein Zerlegungspunkt einer Komponente C von $Rd D$. Dann muß y auch ein Zerlegungspunkt einer Komponente von $Z^p \setminus D$ sein.

Beweis:

Nach I 3.23, I 3.24 können wir o.B.d.A. annehmen, daß $y=w$ ein Zerlegungspunkt von C ist. $(Z^p \setminus \{w\})$ ist immer noch ein topologischer Raum, in dem Theorem 4.3.12 gültig ist und, da $Rd D \cap D = \emptyset$, weil D offen ist, muß D ganz in $Z^p \setminus Rd D \subseteq Z^p \setminus \{w\} = R^p$ enthalten sein. Da w ein Zerlegungspunkt von C ist, muß $C \setminus \{w\}$ mindestens zwei Komponenten C_1, C_2 besitzen.

$C' \subseteq Z^P$ sei diejenige Komponente von $Z^P \setminus D$, die w enthält. Wäre $C' \setminus \{w\} \subseteq \mathbb{R}^P$ zusammenhängend, so gälte, daß $C' \setminus \{w\}$ eine Komponente S von $\mathbb{R}^P \setminus D$ bestimmt. ($\mathbb{R}^P \setminus D \neq \emptyset$. Wäre $D = \mathbb{R}^P$, so gälte: $\bar{D} = Z^P$, $Z^P \setminus D = \{w\}$. Somit wäre $\text{Rd } D = \{w\}$, $\text{Rd } D \setminus \{w\} = \{w\} \setminus \{w\} = \emptyset$, \emptyset hängt jedoch zusammen! Somit wäre w kein Zerlegungspunkt von $\text{Rd } D$, im Widerspruch zur Voraussetzung.) Diese Komponente kann aber gemäß 4.3.12 nur eine Komponente von $\text{Rd}'D$ (Rand von D bzgl. \mathbb{R}^P) enthalten. Nun gilt aber: $C \setminus \{w\} \subseteq \text{Rd}'D$, da jeder Punkt x aus $C \setminus \{w\}$ in \mathbb{R}^P enthalten ist und somit jede ξ -Kugel $K \subseteq \mathbb{R}^P$ um x sowohl Punkte aus $D \subseteq \mathbb{R}^P$, als auch Punkte aus $\mathbb{R}^P \setminus D$ enthalten muß; (wäre $K \cap (\mathbb{R}^P \setminus D) = \emptyset$, so gälte: $K \subseteq D$. Somit wäre x jedoch innerer Punkt von D .) $C \setminus \{w\}$ besitzt jedoch mindestens zwei Komponenten, somit enthielte S mindestens zwei Komponenten von $\text{Rd}'D$, im Widerspruch zu 4.3.12. Somit muß $C \setminus \{w\}$ unzusammenhängend sein!

4.3.14 Bemerkungen

- (1) Die Aussagen der **Theoreme**, Korollare und Folgerungen sind invariant unter topologischen Abbildungen, da nur topologisch invariante Begriffe wie "Gebiet", "Komponente", "Zusammenhang" usw. in diesen Aussagen auftreten. Da \mathbb{R}^P , Z^P sicherlich Räume sind, in denen diese Aussagen gelten, sind sie somit auch in allen zu \mathbb{R}^P , $p \geq 2$, kanonisch homöomorphismen NLRen E , sowie deren AEPen E_w , gültig.
- (2) Falls $p \geq 3$, folgt aus der Tatsache, daß das Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^P$, Z^P ein zusammenhängendes Komplement besitzt, keineswegs der einfache Zusammenhang von G . Beispielsweise ist $G = \mathbb{R}^P \setminus \{x_j\text{-Achse}\}$ zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, da keine die x_j -Achse "umschließende" einfach geschlossene Kurve K innerhalb G stetig in einen Punkt deformiert werden kann.
- (3) Theorem 4.3.8 gilt in Z^1 , der AEP von \mathbb{R}^1 nicht, da $(-1,0)$, $(1,0) \in S^1$, die Einheitskreislinie des \mathbb{R}^2 , die zu Z^1 homöomorph ist, in zwei offene, disjunkte Kreisbögen B_1 , B_2 zerlegen. Es gilt sicherlich: Der Rand bzgl. S^1 von B_1 , als auch von B_2 , ist $\{(-1,0) \cup (1,0)\} := R$. R hängt jedoch in S^1 nicht zusammen!

4.4 Definitionen

- (1) Sei G ein Gitter in Z^p , das mindestens eine beschränkte k -Zelle besitzt und c^k , $0 \leq k \leq p$, eine beschränkte k -Zelle von G . Ferner sei $A \subseteq Z^p$.

Wir sagen: " A ist ein k -Element" (bezeichnet mit E^k), falls A zu c^k bzgl. Z^p relativ homöomorph ist; (siehe Definition I 1.3(2)). Ein Relativhomöomorphismus zwischen A und c^k werde auch als Elementabbildung bezeichnet.

- (2) $'S^k := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i = 0 \text{ für } i > k + 1, \sum_{i=1}^p x_i^2 = \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2 = 1\} \subseteq$

$\subseteq Z^p$, $0 \leq k \leq p$, ist isomorph zur Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^{k+1} und wird als k -Sphäre bezeichnet.

Jede zu $'S^k$ bezüglich Z^p relativ homöomorphe Teilmenge A von Z^p wollen wir eine topologische k -Sphäre nennen (bezeichnet mit S^k). Jeden Relativhomöomorphismus zwischen $'S^k$ und S^k wollen wir eine Sphärenabbildung nennen.

4.5 Bemerkungen

- (1) Da nach I 1.30(1) zwei beschränkte k -Zellen verschiedener Gitter des Z^p zueinander homöomorph sind, sind auch alle k -Elemente des Z^p zueinander relativ homöomorph (I 1.4(5)).
- (2) Falls $w \in A$ stimmt die Spurtopologie von Z^p auf A mit der Spurtopologie von \mathbb{R}^p auf A überein und wir können in den Definitionen 4.4 statt " A ist relativ homöomorph bzgl. Z^p zu c^k bzw. $'S^k$ " " A ist relativ homöomorph bzgl. \mathbb{R}^p zu c^k bzw. S^k " sagen, da die Spurtopologie von Z^p auf der beschränkten Zelle $c^k \subseteq \mathbb{R}^p$ mit derjenigen von \mathbb{R}^p auf c^k übereinstimmt.
- (3) Da jede k -Zelle als abgeschlossene Teilmenge von Z^p kompakt ist (I 3.8.1), muß jedes in Z^p enthaltene k -Element E^k als stetiges Bild unter der zu E^k gehörigen Elementabbildung selbst kompakt und somit als kompakte Teilmenge des HAUSDORFFraumes Z^p abgeschlossen sein. $Z^p \setminus E^k$ ist somit als Komplement der abgeschlossenen Teilmenge E^k offen in Z^p .

Ist $E^k \subseteq \mathbb{R}^p$, so muß wegen der Absolutheit der Kompaktheit E^k auch als Teilmenge von \mathbb{R}^p kompakt und deshalb beschränkt und abgeschlossen sein. $\mathbb{R}^p \setminus E^k$ ist somit eine nichtleere punktierte Umgebung von w . Somit enthält die Abschließung von $\mathbb{R}^p \setminus E^k$ bzgl. Z^p den Punkt w , während die Abschließung von E^k bzgl. Z^p wegen der Kompaktheit von E^k mit E^k übereinstimmt (I 3.8.2). E^k enthält jedoch als Teilmenge von \mathbb{R}^p den Punkt w nicht. Nach I 3.18.2 stimmt somit der Rand von E^k bzgl. \mathbb{R}^p mit dem Rand von E^k bzgl. Z^p überein.

Da auch S^k als Teilmenge von \mathbb{R}^p kompakt ist (S^k ist beschränkt und abgeschlossen), muß auch jede topologische k -Sphäre S^k als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt und somit als kompakte Teilmenge des topologischen HAUSDORFFraums Z^p abgeschlossen sein. Wiederum gilt, daß der Rand von S^k bzgl. \mathbb{R}^p mit dem Rand von S^k bzgl. Z^p übereinstimmt, falls S^k eine Teilmenge von \mathbb{R}^p ist und S^k nicht mit ganz \mathbb{R}^p übereinstimmen kann, da S^k kompakt, \mathbb{R}^p nicht kompakt ist.

- (4) Jedes k -Element und jede topologische k -Sphäre sind als stetige Bilder der zusammenhängenden k -Zellen bzw. der zusammenhängenden k -Sphären selbst zusammenhängend.
- (5) Jedes relativ homöomorphe Bild einer topologischen k -Sphäre S^k ist wiederum eine topologische k -Sphäre, da die Hintereinanderausführung zweier Relativhomöomorphismen wiederum einen solchen ergibt.
- (6) Der topologische Rand jeder beschränkten p -Zelle c^p ist eine topologische $(p-1)$ -Sphäre. Denn nach I 1.30(1) ist jede beschränkte p -Zelle c^p das Bild von $K = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\|_{\max} \leq 1\} = [-1, 1]^p$ unter einer topologischen Selbstabbildung f des \mathbb{R}^p . Somit geht der topologische Rand $R = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\|_{\max} = 1\}$ von K in den topologischen Rand von c^p über. R ist aber nach I. 2.9 relativ homöomorph zu S^{p-1} und somit ist auch $Rd\ c^p$ nach (5) eine topologische $(p-1)$ -Sphäre.

4.6 Theorem (Entspricht Theorem 21.1, p. 134 in NEWMAN)

Sei E^k , $0 \leq k \leq p$ ein k -Element in Z^p , $p \geq 2$. Dann ist jeder j -Zyklus γ^j , $0 \leq j \leq p$, dessen Träger in $Z^p \setminus E^k$ liegt, auch in $Z^p \setminus E^k$ nullhomolog.

Beweis:

Da jede k -Zelle c^k , $0 \leq k \leq p$, mindestens einen Punkt enthält, ist jedes k -Element als bijektives Bild einer nichtleeren Menge selbst nichtleer, $Z^p \setminus E^k$ ist also jedenfalls eine echte Teilmenge von Z^p . Es gibt in Z^p nur zwei p -Zyklen, nämlich O^p und Ω^p (2.15). Da $|\Omega^p| = Z^p$, kann $Z^p = |\Omega^p| \subseteq Z^p \setminus E^k \subset Z^p$ für kein k -Element gelten. $\emptyset = O^p \subseteq Z^p \setminus E^k$ für jedes k -Element und, da nach 4.5(3) $Z^p \setminus E^k$ offen in Z^p ist, ist O^p nach 3.7 in $Z^p \setminus E^k$ nullhomolog.

Nun beweisen wir für $k=0, \dots, p-1$ die Aussage durch Induktion: Falls $k=0$, ist jedes 0 -Element E^0 ein Punkt a aus Z^p . Aufgrund des Fundamentallemmas 3.12 ist jedoch jeder j -Zyklus γ^j , $0 \leq j \leq p-1$, dessen Träger a nicht enthält, also jeder j -Zyklus, dessen Träger

in $Z^p \setminus \{a\}$ enthalten ist, in $Z^p \setminus \{a\}$ nullhomolog.

Nun sei $0 < k \leq p-1$. Wir wollen nun die Annahme, daß die Aussage des Theorems für $r < k$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, bereits bewiesen ist, es aber ein k -Element E^k und einen in $Z^p \setminus E^k$ gelegenen j -Zyklus \mathfrak{z}^j , der in $Z^p \setminus E^k$ nicht nullhomolog ist, gibt, ad absurdum führen.

Sei nun E^k ein k -Element und \mathfrak{z}^j ein in $Z^p \setminus E^k$ gelegener j -Zyklus, der in $Z^p \setminus E^k$ nicht nullhomolog ist. Zunächst zeigen wir, daß jeder $(p-1)$ -Zyklus in $Z^p \setminus E^k$ nullhomolog ist.

Gäbe es einen in $Z^p \setminus E^k$ gelegenen, aber dort nicht nullhomologen $(p-1)$ -Zyklus \mathfrak{z}^{p-1} , so müßten beide von \mathfrak{z}^{p-1} berandeten p -Ketten τ^p und τ_1^p (3.13(3)) mit E^k nichtleeren Durchschnitt besitzen (3.13(4)). Da $\mathfrak{z}^{p-1} \subseteq Z^p \setminus E^k$, gilt: $\mathfrak{z}^{p-1} \cap E^k = \emptyset$. Andererseits gilt nach 2.16(1): $|\mathfrak{z}^{p-1}| = |\mathfrak{z}^p| = |\tau^p \cap \tau_1^p| = \text{Rd } |\tau^p| = \text{Rd } |\tau_1^p|$. Außerdem muß, da $\mathfrak{z}^{p-1} \cap E^k = \emptyset$, $E^k \cap |\tau^p| \neq \emptyset$ und $|\tau^p| = (Z^p \setminus \mathfrak{z}^{p-1}) \cup \mathfrak{z}^{p-1} = |\tau^p \circ \text{Rd } |\tau^p| = |\tau^p \cup \text{Rd } |\tau^p|$ (2.16(2)), $\emptyset \neq |E^k \cap \tau^p| \subseteq |\tau^p|$ gelten. Die zusammenhängende (!) (4.5(4)) Menge E^k trifft sowohl $|\tau^p|$ als auch $|\tau_1^p|$, muß daher aufgrund wohlbekannter Sätze aus der Topologie auch $\text{Rd } |\tau^p| = \mathfrak{z}^{p-1}$ treffen. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß $\mathfrak{z}^{p-1} \subseteq Z^p \setminus E^k$. Somit kann kein $(p-1)$ -Zyklus ein der Aussage des Satzes widersprechender Ausnahmезyklus sein.

Sei nun $1 < j < p-1$ und \mathfrak{z}^j ein der Aussage des Satzes widersprechender Zyklus. Es gelte also: $|\mathfrak{z}^j| \subseteq Z^p \setminus E^k$, aber jede von \mathfrak{z}^j berandete $(j+1)$ -Kette τ^{j+1} sei sowohl mit E^k , als auch mit $Z^p \setminus E^k$ konjunkt. Um auch diese Annahme zu widerlegen, müssen wir etwas weiter ausgreifen:

G sei ein Gitter in Z^p mit $\text{card } (G_i) \geq 2$ für $i=1, \dots, p$, c^k eine beschränkte k -Zelle von G und f eine Elementabbildung zwischen c^k und E^k . Da $k > 0$, muß c^k mindestens eine Regularitätsachse besitzen. O.B.d.A. können wir annehmen, daß die x_1 -Achse eine Regularitätsachse von c^k ist. Es gilt somit: $Z_1(c^k) = +h_1^j \cap -h_1^{j+1}$, $h_1^j, h_1^{j+1} \in G_1$, da c^k beschränkt ist. h' sei das arithmetische Mittel der Bestimmungszahlen von h_1^j und h_1^{j+1} und h' sei derjenige Prinzipal der Richtung 1, der h' als Bestimmungszahl besitzt. G' sei diejenige Verfeinerung von G , welche durch Hinzunahme von h' entsteht. c_1^k sei diejenige k -Zelle von G' mit $Z_1(c_1^k) = +h_1^j - h'$, $Z_i(c_1^k) = Z_i(c^k)$ für $i \neq 1$, c_2^k diejenige k -Zelle von G' mit $Z_1(c_2^k) = +h' - h_1^{j+1}$, $Z_i(c_2^k) = Z_i(c^k)$ für $i \neq 1$. $c_1^k + c_2^k$ ist somit gerade die Verfeinerung bzgl. G' von c^k .

$c^{k-1} := h' \cap \bigcap_{i=2}^p z_i(c^k)$ ist eine c_1^k und c_2^k gemeinsame $(k-1)$ -Zelle des Gitters G' ; $c^{k-1} = c_1^k \cap c_2^k$. $E_1^k = f(c_1^k)$ und $E_2^k = f(c_2^k)$ sind zwei k -Elemente mit: $E^k = E_1^k \cup E_2^k$, $E_1^k \cap E_2^k = f(c_1^k) \cap f(c_2^k) = f(c_1^k \cap c_2^k) = f(c^{k-1})$; ihr Durchschnitt ist somit ein $(k-1)$ -Element.

Wäre $\beta^j \sim 0$ sowohl in $Z^P \setminus E_1^k$, als auch in $Z^P \setminus E_2^k$, so gäbe es zwei $(j+1)$ -Ketten $\tau_1^{j+1}, \tau_2^{j+1}$ mit $\partial \tau_i^{j+1} = \beta^j, \tau_i^{j+1} \subseteq Z^P \setminus E_i^k, i=1,2$. $\tau^{j+1} := \tau_1^{j+1} + \tau_2^{j+1}$ ist ein $(j+1)$ -Zyklus, da $\partial \tau^{j+1} = \partial \tau_1^{j+1} + \partial \tau_2^{j+1} = \beta^j + \beta^j = 0^j$. Ferner gilt $[\tau^{j+1}] = [\tau_1^{j+1}] + [\tau_2^{j+1}] \subseteq [c_1^{j+1}] \cup [c_2^{j+1}] \subseteq [E_1^k \cup E_2^k] = [(E_1^k \cap E_2^k)] = [f(c^{k-1})]$. Aufgrund der Induktionsannahme hätten wir aber, daß $\tau^{j+1} \sim 0$ in $Z^P \setminus f(c^{k-1})$. Es wären somit die Voraussetzungen des ALEXANDERSchen Lemmas 4.2 erfüllt und wir hätten: $\beta^j \sim 0$ in $[(E_1^k \cup E_2^k)] = [E^k]$. Dies widerspricht aber der Annahme über β^j . Somit muß $\beta^j \not\sim 0$ in mindestens einer der beiden Mengen $Z^P \setminus E_1^k, Z^P \setminus E_2^k$ gelten.

Nun sei o.B.d.A. $\beta^j \not\sim 0$ in $Z^P \setminus E_1^k$. Wir setzen $E_1^k = : (1)E^k, (1)c^k := c_1^k$ und wiederholen die eben beschriebene Unterteilung von c^k an c_1^k . Wiederum muß β^j in mindestens einer der beiden Mengen $[(1)E_1^k], [(1)E_2^k]$ nicht nullhomolog sein, wobei $(1)E_1^k, (1)E_2^k$ die Rolle von E_1^k, E_2^k in der obigen Unterteilung übernehmen. Induktiv so fortfahrend, erhalten wir eine Folge $(n)c^k, (n)E^k = f((n)c^k)$, mit: $(m)c^k \subseteq (n)c^k, z_1((m)c^k) \subseteq z_1((n)c^k)$ für $m \geq n$ und $\beta^j \not\sim 0$ in $Z^P \setminus f((n)c^k)$. Die Variationsintervalle von $z_1((n)c^k)$ bilden offensichtlich eine Intervallschachtelung, da die Länge

des Variationsintervalls von $z_1((n)c^k)$ kleiner gleich $\frac{\alpha_{j+1} - \alpha_j}{2^n}$ ist, wobei α_{j+1}, α_j die Bestimmungszahlen von h_1^j, h_1^{j+1} sind.

Sei a die durch diese Intervallschachtelung eindeutig bestimmte reelle Zahl. h^a sei derjenige Prinzipal der Richtung 1, dessen Bestimmungszahl a ist. Dann ist $h^a \subseteq z_1((n)c^k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen der Definition der Intervallschachtelung. G_a sei dasjenige Gitter, das aus G durch Hinzunahme von h_a entsteht. Dann ist

$$\begin{aligned} c_a &= h^a \cap \bigcap_{i=2}^p z_i(c^k) \text{ eine } (k-1)\text{-Zelle von } G_a, \text{ die in allen } (n)c^k \\ &\text{enthalten ist. } c_a = \bigcap_{n=1}^{\infty} (n)c^k, \text{ da } \bigcap_{n=1}^{\infty} (n)c^k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^p z_i((n)c^k) = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} z_1((n)c^k) \cap \bigcap_{i=2}^p z_i(c^k) = \bigcap_{n=1}^{\infty} z_1((n)c^k) \cap \bigcap_{i=2}^p z_i(c^k) = \\ &= z_1((n)c^k) \end{aligned}$$

$= h_a \cap \bigcap_{i=2}^p z_i(c^k) = c_a \cdot h_a = \bigcap_{n=1}^{\infty} z_1({}^{(n)}c^k)$, da wegen der Definition von a nur ein Punkt dessen erste Koordinate mit a übereinstimmt in allen $z_1({}^{(n)}c^k)$ enthalten sein kann!

$E_a := f(c_a)$ ist somit ein $(k-1)$ -Element und aufgrund der Induktionshypothese ist \mathfrak{z}^j in $Z^p \setminus E_a$ nullhomolog. $\mathfrak{z}^j \sim 0$ in $Z^p \setminus E_a$ bedeutet: Es existiert eine $(j+1)$ -Kette α^{j+1} , deren algebraischer Rand \mathfrak{z}^j und deren Träger in $Z^p \setminus E_a$ enthalten ist.

Andererseits haben wir, daß $\mathfrak{z}^j \sim 0$ in $Z^p \setminus f({}^{(n)}c^k)$ ist. Somit muß jede von \mathfrak{z}^j berandete $(j+1)$ -Kette α^{j+1} mit $f({}^{(n)}c^k)$ konjunkt sein.

Da ferner ${}^{(m)}c^k \subseteq {}^{(n)}c^k$ haben wir: ${}^{(m)}E^k = f({}^{(m)}c^k) \subseteq f({}^{(n)}c^k) = {}^{(n)}E^k$ für $m \geq n$. Also: $A_m := |\alpha^{j+1}| \cap {}^{(m)}E^k \subseteq |\alpha^{j+1}| \cap {}^{(n)}E^k := A_n$.

Die $A_n, n \in \mathbb{N}$, sind als abgeschlossene Teilmengen der kompakten ${}^{(n)}E^k$ selbst kompakt und, da Z^p ein topologischer HAUSDORFFraum und somit a fortiori ein T_1 -Raum ist, sind für die A_n die Voraussetzungen des CANTORSchen Durchschnittssatzes (KUHN, Topologie, p. 111) erfüllt und wir haben: $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (|\alpha^{j+1}| \cap {}^{(n)}E^k) =$

$= |\alpha^{j+1}| \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f({}^{(n)}c^k) = |\alpha^{j+1}| \cap f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^{(n)}c^k\right) =$ (Injektivität von f beachten!) $= |\alpha^{j+1}| \cap f(c_a) = |\alpha^{j+1}| \cap E_a$ für jede von \mathfrak{z}^j berandete $(j+1)$ -Kette α^{j+1} . Somit auch für die von \mathfrak{z}^j berandete und in $Z^p \setminus E_a$ gelegene $(j+1)$ -Kette α^{j+1} . Dies ist aber ein Widerspruch! Es kann somit keinen solchen Ausnahmezyklus \mathfrak{z}^j geben. \square

4.7 Bemerkungen

(1) Seien x, y Punkte aus $Z^p \setminus E^k, p \geq 2$, wobei $E^k, 0 \leq k \leq p$, ein k -Element ist. Aufgrund von 4.6 ist der 0-Zyklus $x+y$ auf dem Gitter G , dessen jedes Teilgitter $G_i, i=1, \dots, p$, die Prinzipale mit den Bestimmungszahlen x_i, y_i enthält, nullhomolog in $Z^p \setminus E^k$. Somit hängen wegen 3.11 je zwei Punkte aus $Z^p \setminus E^k$ in $Z^p \setminus E^k$ zusammen. $Z^p \setminus E^k$ ist somit zusammenhängend und, als Komplement der abgeschlossenen echten Teilmenge E^k nicht leer und offen, somit ein nichtleeres Gebiet.

Ist E^k eine Teilmenge von \mathbb{R}^p , so enthält $Z^p \setminus E^k$ den Punkt w und nach I 3.23(2) ist auch $(Z^p \setminus E^k) \setminus \{w\} = \mathbb{R}^p \setminus E^k$ ein Gebiet, das nach 4.5(3) nicht leer ist.

(2) Die Voraussetzung $p \geq 2$ ist notwendig, um das ALEXANDERSche Lemma anwenden zu können. 4.6 gilt in Z^1 , der ALEXANDROFFschen Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^1 , jedoch nicht in \mathbb{R}^1 :

Z^1 ist via stereographische Projektion homöomorph zu einem beliebigen Kreis in der x,y -Ebene. Da Kreise zerlegungspunktfrei sind, ist das Komplement bzgl. Z^1 jedes 0-Elements, das ja immer ein Punkt ist, zusammenhängend. Im \mathbb{R}^1 gilt dies jedoch nicht mehr, da bekanntlich *jeder* Punkt des \mathbb{R}^1 ein Zerlegungspunkt von \mathbb{R}^1 ist. Auch ist das Komplement bzgl. \mathbb{R}^1 jedes in \mathbb{R}^1 enthaltenen 1-Elements, das ja ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall des \mathbb{R}^1 ist, unzusammenhängend in \mathbb{R}^1 .

Die 1-Elemente des Z^1 sind die relativ homöomorphen Bilder abgeschlossener, nicht ausgearteter Intervalle, die abgeschlossen und in \mathbb{R}^1 enthalten sind. Kein abgeschlossenes Intervall ist zu einem Kreis homöomorph, da alle Punkte eines abgeschlossenen Intervalls mit Ausnahme der Endpunkte Zerlegungspunkte desselben sind. Kreise sind jedoch zerlegungspunktfrei und Zerlegungspunktfreiheit ist eine topologische Invariante (I 1.21(1)). Deshalb ist das Komplement jedes 1-Elements nicht leer. Enthält ein 1-Element E^1 den Punkt w , so kann durch eine Drehung des Kreises erreicht werden, daß der Punkt w , der auf der Einheitskreislinie der xy -Ebene dem Punkt $(0,1)$ entspricht, in das Komplement von E^1 zu liegen kommt. Das so gedrehte Einselement $'E^1$ wird nun in den \mathbb{R}^1 durch stereographische Projektion abgebildet. Das Bild von $'E^1$ muß als stetiges Bild des Kontinuums $'E^1$ selbst ein Kontinuum, somit ein beschränktes und abgeschlossenes, nichtausgeartetes Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, sein. Das Komplement von $[a,b]$ bzgl. \mathbb{R} ist die Menge $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, also die Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen von \mathbb{R} . Werden diese nun auf die Einheitskreislinie der xy -Ebene zurückprojiziert, so besitzen die Bilder von $(-\infty, a)$ und (b, ∞) beide den Punkt w als Berührungspunkt, da sie beide unbeschränkt sind. Die Vereinigung der Bilder von $(-\infty, a)$ bzw. (b, ∞) mit w ist jeweils zusammenhängend in Z^1 , da diese Vereinigungen in der abgeschlossenen Hülle bzgl. Z^1 der zusammenhängenden Mengen Bild von $(-\infty, a)$ bzw. Bild von (b, ∞) enthalten sind. Das Komplement bzgl. Z^1 von $'E^1$ ist aber gerade das Bild von $(-\infty, a)$ vereinigt mit $\{w\}$ vereinigt mit dem Bild von (b, ∞) . Diese Menge ist zusammenhängend, da das Bild von $(-\infty, a)$ vereinigt mit $\{w\}$ und das Bild von (b, ∞) vereinigt mit $\{w\}$ zusammenhängen (s.o.!) und beide Mengen den Punkt w gemeinsam haben. Dreht man nun $'E^1$ wieder nach E^1 zurück, so geht das zusammenhängende Komplement von $'E^1$ in das zusammenhängende Komplement von E^1 über. Falls E^1 den Punkt w *nicht* enthält, entfallen die beiden Drehungen; der Rest verläuft wörtlich, wie eben!

- (3) Die im Beweis verwendete Konstruktion einer Folge von k -Zellen, deren Schnitt eine $(k-1)$ -Zelle ergibt, hätte man auch etwas anders durchführen können:

Anstatt immer das Variationsintervall derselben Regularitätsachse zu halbieren, hätte man auch in zyklischer Reihenfolge die Variationsintervalle aller Regularitätsachsen halbieren können. Auch dann hätte $\gamma^j \neq 0$ in $Z^P \setminus f\left(\binom{(n)}{c_1^k}\right)$ bzw. $Z^P \setminus f\left(\binom{(n)}{c_2^k}\right)$ gelten müssen, wobei $\binom{(n)}{c_1^k}$, $\binom{(n)}{c_2^k}$ gerade die aus $\binom{(n-1)}{c^k}$ durch 'Halbierung' der sich gerade an der Reihe befindenden regulären Zellenkomponente hervorgegangenen k -Zellen sind. $\binom{(0)}{c^k} = c^k$ sei die beschränkte Ausgangs- k -Zelle. Als $\binom{(n)}{c^k}$ wird wieder diejenige der $\binom{(n)}{c_i^k}$, $i=1,2$, gewählt, in deren Komplement γ^j nicht nullhomolog ist. Falls j_1, j_2, \dots, j_k die Regularitätsachsen von c^k sind, bilden die Variationsintervalle der $Z_{j_s} \left(\binom{(n)}{c^k}\right)$, $s=1, \dots, k$, wiederum eine Intervallschachtelung für jedes $s=1, \dots, k$, die gegen a_{j_s} aus \mathbb{R} konvergiert.

Das Bild des Punktes z unter f , wobei z derjenige Punkt aus \mathbb{R}^P sei, dessen Koordinaten bzgl. Defektachsen von c^k mit den Bestimmungszahlen der zugehörigen Defektkomponenten von c^k übereinstimmt und bzgl. der Regularitätsachsen mit den zugehörigen a_{j_s} , liegt nicht im Träger von γ^j , da γ^j in $Z^P \setminus E^k = Z^P \setminus f(c^k)$ enthalten ist und $z \in \binom{(n)}{c^k} \subseteq c^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach dem verallgemeinerten Fundamentallemma gilt wiederum: $\gamma^j \sim 0$ in $Z^P \setminus f(z)$. Genauso fortfahrend wie im Beweis wird wiederum die Unmöglichkeit der Existenz eines solchen Ausnahmezyklus γ^j gezeigt.

Nun können wir uns an die Formulierung und den Beweis des Hauptsatzes der ganzen Arbeit begeben:

4.8 Theorem (Entspricht Theorem 21.2, p. 135 in NEWMAN)

Sei S^k eine topologische k -Sphäre des Z^P , $0 \leq k \leq P-1$. Dann gilt:

- (1) Falls $j \neq p-k-1$, ist jeder in $Z^P \setminus S^k$ gelegene j -Zyklus in $Z^P \setminus S^k$ nullhomolog.
- (2) Es gibt einen in $Z^P \setminus S^k$ gelegenen und in $Z^P \setminus S^k$ nicht nullhomologen $(p-k-1)$ -Zyklus γ^{p-k-1} .
- (3) Falls sowohl γ_1^{p-k-1} , als auch γ_2^{p-k-1} , in $Z^P \setminus S^k$ gelegen und dort nicht nullhomolog sind, so ist ihre Summe modulo 2 in $Z^P \setminus S^k$ nullhomolog.

Aus Teilaussage (2) folgt insbesondere, daß das Komplement bzgl. Z^p jeder topologischen k -Sphäre S^k , $0 \leq k \leq p-1$, nicht leer ist. Somit kann der ganze Raum Z^p keine topologische k -Sphäre sein. Wäre nämlich $Z^p \setminus S^k = \emptyset$ für irgendeine k -Sphäre S^k , wäre der einzige in der leeren Menge enthaltene $(p-k-1)$ -Zyklus, O^{p-k-1} , das leere System von $(p-k-1)$ -Zellen. $O^{p-k-1} = \partial O^{p-k}$, $|O^{p-k}| = \emptyset$, somit $O^{p-k-1} \sim 0$ in $Z^p \setminus S^k$, im Widerspruch zu Teilaussage (2).

Keine topologische k -Sphäre S^k des Z^p kann mit \mathbb{R}^p übereinstimmen, da jede topologische k -Sphäre S^k als stetiges Bild der kompakten Menge S^{p-1} selbst kompakt ist. \mathbb{R}^p ist jedoch nicht kompakt!

Der Fall $j=p-1$ dieses Theorems enthält eine teilweise Verallgemeinerung des klassischen JORDANSchen Kurvensatzes: eine topologische $(p-1)$ -Sphäre besitzt in Z^p zwei Komplementärgebiete. Dies gilt wegen Teilaussage (2), da es für $k=p-1$ in $Z^p \setminus S^{p-1}$ einen dort nicht nullhomologen $(p-(p-1)-1 = 0)$ -Zyklus γ^0 gibt. Somit kann die offene Menge $Z^p \setminus S^{p-1}$ (S^{p-1} ist abgeschlossen nach 4.5(3)) kein Gebiet sein, da in einem Gebiet jeder 0-Zyklus nullhomolog ist (3.11.1). $Z^p \setminus S^{p-1}$ besitzt somit mindestens zwei Komponenten. Seien nun K_1, K_2 zwei Komponenten von $Z^p \setminus S^{p-1}$. $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$ werden somit durch S^{p-1} getrennt! $\gamma^0 = x_1 + x_2$ ist daher in $Z^p \setminus S^{p-1}$ nicht nullhomolog; (wäre γ^0 in $Z^p \setminus S^{p-1}$ nullhomolog, so lägen x_1 und x_2 nach 3.11 in derselben Komponente von $Z^p \setminus S^{p-1}$.)

Sei nun z ein weiterer Punkt aus $Z^p \setminus S^{p-1}$, der durch S^{p-1} von x_2 getrennt wird. Wiederum ist somit $z + x_2$ in $Z^p \setminus S^{p-1}$ nicht nullhomolog! Nach Teilaussage (3) gilt dann aber, daß $(x_1 + x_2) + (z + x_2) = x_1 + z$ in $Z^p \setminus S^{p-1}$ nullhomolog ist, somit x_2 und z in $Z^p \setminus S^{p-1}$ zusammenhängen, z deshalb auch in K_1 liegt. Genauso zeigt man, daß jeder von x_1 durch S^{p-1} getrennte Punkt v aus $Z^p \setminus S^{p-1}$ in K_2 liegt. $Z^p \setminus S^{p-1}$ hat somit zwei Komponenten, die gemäß I 3.16(3) Gebiete von Z^p sind. Falls $S^{p-1} \subseteq \mathbb{R}^p$ kann nur eine Komponente den Punkt w enthalten, aufgrund der Disjunktheit von Komponenten. Diejenige, welche den Punkt w enthält, werde die *unbeschränkte* Komponente von $Z^p \setminus S^{p-1}$ genannt. Sie bleibt ein nichtleeres, unbeschränktes Gebiet des \mathbb{R}^p , falls aus ihr der Punkt w entfernt wird nach I 3.25(2). Wir erhalten somit: Jede topologische $(p-1)$ -Sphäre, die in \mathbb{R}^p enthalten ist, bestimmt zwei Gebiete; ein beschränktes und ein unbeschränktes; (da w innerer Punkt der unbeschränkten Komponente von $Z^p \setminus S^{p-1}$ ist, kann w kein Berührungspunkt der anderen Komponente von $Z^p \setminus S^{p-1}$ sein. Somit muß diese nach I 3.8, I 3.7(7) als Teilmenge von \mathbb{R}^p beschränkt sein.

Das Theorem 4.8 enthält auch noch folgendes Resultat:

Sei Γ eine JORDANKurve des Z^3 (eine JORDANKurve ist eine topologische 1-Sphäre S^1 , da sie zum Einheitskreis des \mathbb{R}^2 homöomorph ist). Dann enthält $Z^3 \setminus \Gamma$ mindestens einen in $Z^3 \setminus \Gamma$ *nicht* nullhomologen 1-Zyklus. Dies sieht man sofort ein, wenn man in Teilaussage (2) $k=1$ und $p=3$ setzt.

Auch hier gilt wieder, daß, falls Γ in \mathbb{R}^3 gelegen ist, es mindestens einen in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ gelegenen und dort *nicht* nullhomologen 1-Zyklus γ^1 geben muß.

Man sieht, wie folgt, ein: Angenommen, jeder in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ gelegene, somit beschränkte, 1-Zyklus γ^1 sei dort nullhomolog. Dann ist auch *jeder* in $Z^3 \setminus \Gamma$ gelegene 1-Zyklus β in $Z^3 \setminus \Gamma$ nullhomolog. Denn, wenn β ein unbeschränkter in $Z^3 \setminus \Gamma$ gelegener 1-Zyklus ist, muß die Anzahl seiner unbeschränkten 1-Zellen gerade sein – eine 1-Kette τ^1 mit ungeradzahlig vielen unbeschränkten 1-Zellen besitzt w als algebraischen Randpunkt, weil w zum algebraischen Rand *jeder* unbeschränkten 1-Zelle *jedes* Gitters in Z^3 gehört und somit in einer ungeraden Anzahl von 1-Zellen von τ^1 liegt, da *keine* beschränkte 1-Zelle von τ^1 w als algebraischen Randpunkt besitzt. $\partial \tau^1$ ist also von 0^0 verschieden und somit ist τ^1 kein 1-Zyklus. Wir können deshalb die unbeschränkten 1-Zellen von β paarweise zusammenfassen. Sei etwa c_1^1, c_2^1 ein Paar unbeschränkter 1-Zellen von β . Da Γ als topologische 1-Sphäre kompakt ist, muß Γ in einer geeigneten abgeschlossenen Nullumgebung bezüglich der Maximumnorm des \mathbb{R}^3 enthalten sein. Solche Nullumgebungen sind bekanntlich Würfel, die sich als 3-Zellen auf einem geeigneten Gitter des \mathbb{R}^3 auffassen lassen und somit 3-Elemente sind. Sei nun $\Gamma \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_{\max} \leq r, r > 0\} = W$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $[a_1, \infty), [a_2, \infty)$ die Variationsintervalle von c_1^1 bzw. c_2^1 sind. Sei y eine reelle Zahl, die größer als das Maximum von a_1 und a_2 ist. Das Gitter G , auf dem unser 1-Zyklus β liegt, werde nun so zu G' verfeinert, daß zu jedem Teilgitter $G_i, G_j, i, j \in \{1, 2, 3\}$, wobei i der Regularitätsindex von c_1^1, j derjenige von c_2^1 ist, der Prinzipal h_i^y bzw. h_j^y hinzugenommen wird. c_1^1 und c_2^1 werden nun bzgl. G' verfeinert. Wir erhalten, daß die Variationsintervalle der 1-Zellen aus ' c_1^1 bzw. ' c_2^1 die Gestalt $[a_1, y], [y, \infty)$ bzw. $[a_2, y], [y, \infty)$ annehmen. c_1^1 bzw. c_2^1 besitzen also jeweils eine beschränkte und eine unbeschränkte 1-Zelle als Verfeinerungszellen. Die beiden beschränkten 0-Zellen c_1^0 und c_2^0 , die man erhält, wenn die beiden beschränkten

1-Zellen der Verfeinerungen von c_1^1 bzw. c_2^1 nach oben entregularisiert werden, liegen beide in $\mathbb{R}^3 \setminus W$, da $y = |y| \cdot r$ und die Maximumnorm dieser beiden Punkte c_1^0 und c_2^0 größer gleich $|y|$ ist. Nach 4.7(1) ist $\mathbb{R}^3 \setminus W$ ein Gebiet, da W ein in \mathbb{R}^3 enthaltenes 3-Element ist. Nach 3.11 ist dann aber $c_1^0 + c_2^0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus W$ nullhomolog.

Es existiert also eine 1-Kette τ_1^1 , die in $\mathbb{R}^3 \setminus W \subseteq Z^3 \setminus W$ verläuft, somit beschränkt ist und $c_1^0 + c_2^0$ als ihren algebraischen Rand besitzt. Die beiden unbeschränkten 1-Zellen der Verfeinerungen von c_1^1 und c_2^1 bilden ebenfalls eine in $Z^3 \setminus W$ verlaufende 1-Kette τ_2^1 , deren algebraischer Rand $c_1^0 + c_2^0$ ist. $\tau^1 := \tau_1^1 + \tau_2^1$ ist somit ein 1-Zyklus, der nach 4.6 in $Z^3 \setminus W \subseteq Z^3 \setminus \Gamma$ nullhomolog ist. Falls ' c_1^0 ' bzw. ' c_2^0 ' den beschränkten algebraischen Randpunkt von c_1^1 bzw. c_2^1 bezeichnet, so bildet die Summe modulo 2 der beschränkten 1-Zellen der Verfeinerungen von c_1^1 bzw. c_2^1 und der 1-Kette τ_1^1 eine beschränkte 1-Kette

' τ^1 ', die in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ enthalten ist. Es gilt: $\partial \tau^1 = 'c_1^0 + c_2^0'$,
 $|\tau^1 + |\tau^1|| = c_1^1 + c_2^1$, $\partial(|\tau^1 + \tau^1|) = 'c_1^0 + c_2^0'$, $|\tau^1 + \tau^1| \subseteq |\tau_1^1| \cup |\tau_2^1|$
 $\cup \tau^1 \subseteq (\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma) \cup (Z^3 \setminus W) \subseteq Z^3 \setminus \Gamma$.

Das eben beschriebene Verfahren wenden wir nun auf *alle* Paare unbeschränkter 1-Zellen von \mathfrak{B} an. Falls τ_b die Teilkette der beschränkten 1-Zellen von \mathfrak{B} und τ_u die Teilkette der unbeschränkten 1-Zellen von \mathfrak{B} bezeichnet, gilt, daß $\mathfrak{B} = \tau_u + \tau_b$. Somit: $0^0 = \partial \mathfrak{B} = \partial \tau_u + \partial \tau_b$. Hieraus ergibt sich sofort: $\partial \tau_u = -\partial \tau_b = \partial \tau_b$ (1.37).

$\partial \tau_u = \sum_{c \in \tau_u} \partial c = \sum_{w \neq c^0 \subseteq c \in \tau_u} c^0$, da w in allen 1-Zellen aus τ_u und

somit in einer geraden Anzahl von 1-Zellen aus τ_u liegt. Wenn wir die unbeschränkten 1-Zellen von τ_u zu Paaren zusammenfassen und zu jedem Paar seine beschränkte 1-Zelle ' τ^1 ' wie oben bilden, so ist die Summe modulo 2 aus τ_b und allen diesen beschränkten 1-Ketten ein beschränkter in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ enthaltener 1-Zyklus, da die Summe modulo 2 der Ränder dieser beschränkten 1-Ketten gerade

$\partial \tau_u = \partial \tau_b$ ergibt. Der so gebildete 1-Zyklus \mathfrak{B}^1 ist aber als beschränkter 1-Zyklus in $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \subseteq Z^3 \setminus \Gamma$ dort nullhomolog nach Voraussetzung. Addiert man noch zu \mathfrak{B}^1 alle unbeschränkten 1-Zyklen τ^1 , die in der oben beschriebenen Art und Weise zu jedem Paar unbeschränkter 1-Zellen aus \mathfrak{B} gebildet werden, so erhält man gerade \mathfrak{B} , da die 1-Ketten τ_2^1 , die in der oben gezeigten Art zu jedem Paar unbeschränkter 1-Zellen existieren, in dieser Summe für jedes Paar unbeschränkter 1-Zellen zweimal auftauchen. \mathfrak{B} ist somit als

Summe modulo 2 von in $Z^3 \setminus \Gamma$ nullhomologen 1-Zyklen dargestellt und nach 3.9 somit in $Z^3 \setminus \Gamma$ selbst nullhomolog. Da γ ein beliebiger in $Z^3 \setminus \Gamma$ gelegener 1-Zyklus war, haben wir somit, daß jeder in $Z^3 \setminus \Gamma$ gelegene 1-Zyklus dort nullhomolog ist, im Widerspruch zur Aussage, daß es mindestens einen in $Z^3 \setminus \Gamma$ gelegenen und dort nicht nullhomologen 1-Zyklus geben muß. Somit muß es einen in $R^3 \setminus \Gamma$ gelegenen und dort nicht nullhomologen 1-Zyklus γ geben, falls $\Gamma \subseteq R^3$.

Allgemein erhält man aus Teilaussage (2), daß es in Z^p , $p \geq 2$, im Komplement jeder topologischen $(p-2)$ -Sphäre S^{p-2} einen in $Z^p \setminus S^{p-2}$ gelegenen und dort nicht nullhomologen 1-Zyklus γ^1 gibt (setze $k=p-2$!). Genauso, wie eben, zeigt man, daß, falls $S^{p-2} \subseteq R^p$, es ebenfalls einen in $R^p \setminus S^{p-2}$ gelegenen und dort nicht nullhomologen 1-Zyklus γ^1 gibt.

Nun aber zum Beweis von Theorem 4.8!

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach k :

Falls $k=0$, haben wir, daß S^0 gerade das homöomorphe Bild von $'S^0 = \{x \in R^p \mid x_i = 0 \text{ für } i \geq 2, x_1^2 = 1\} = \{(1, 0, \dots, 0), (-1, 0, \dots, 0)\}$, somit ein Paar (x_1, x_2) , $x_1 \neq x_2$, von Punkten des Z^p ist.

Teilaussage (1) bekommt nun folgendes Aussehen:

Falls $j \neq p-0-1=p-1$, ist jeder in $Z^p \setminus S^0$ gelegene j -Zyklus γ^j dort nullhomolog.

Sei nun $j \neq p-1$. Falls $j=p$ kann nur 0^0 ein in $Z^p \setminus S^0$ gelegener p -Zyklus sein, da $|\Omega^p| = Z^p$ und 0^p und Ω^p die einzigen p -Zyklen sind; 0^p ist definitionsgemäß in jeder offenen Teilmenge des Z^p nullhomolog. Sei nun $j \neq p-1, p$, somit $j \leq p-2$. Setzt man im ALEXANDERschen Lemma 4.2 $F_1 = \{x_1\}$ und $F_2 = \{x_2\}$ (Z^p ist T_2 - und somit a fortiori ein T_1 -Raum), so ist aufgrund des verallgemeinerten Fundamentallemmas 3.12 für jedes j , $0 \leq j \leq p-1$, jeder in $(Z^p \setminus F_1) \cup (Z^p \setminus F_2) = (Z^p \setminus \{x_1\}) \cup (Z^p \setminus \{x_2\}) = Z^p \setminus \{x_1, x_2\} = Z^p \setminus (F_1 \cup F_2)$ gelegene j -Zyklus γ^j sowohl in $Z^p \setminus F_1$, als auch in $Z^p \setminus F_2$ nullhomolog. Es gibt somit in $Z^p \setminus F_1$, $i=1, 2$, gelegene $(j+1)$ -Ketten τ_i^{j+1} , die von γ^j berandet werden. Da $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ($x_1 \neq x_2$!) gilt, daß $Z^p \setminus (F_1 \cap F_2) = Z^p$ und somit ist der $(j+1)$ -Zyklus $\tau_1^{j+1} + \tau_2^{j+1}$ wiederum wegen des verallgemeinerten Fundamentallemmas in Z^p nullhomolog. Deshalb gilt nach dem ALEXANDERschen Lemma: $\gamma^j \sim 0^j$ in $Z^p \setminus (F_1 \cup F_2) = Z^p \setminus \{x_1, x_2\} = Z^p \setminus S^0$, da $j \leq p-2$. Wir können die Aussage für $j=p-1$ nicht folgern, das für $j=p-1$ das ALEXANDERsche Lemma nicht anwendbar ist.

Aussage (2) liest sich im Falle $k=0$, wie folgt:

Es gibt einen in $Z^P \setminus S^0$ enthaltenen und dort *nicht* nullhomologen $(p-1)$ -Zyklus ζ^{p-1} .

Einen solchen erhalten wir folgenderart:

Da Z^P ein topologischer HAUSDORFFraum ist, gibt es zwei disjunkte Umgebungen U_1, U_2 von x_1 und x_2 . Mindestens einer der beiden Punkte x_1, x_2 ist von w verschieden und somit endlich. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $x_1 \neq w$. Jede Umgebung U_1 von x_1 enthält dann aber eine geeignete abgeschlossene Umgebung von x_1 bzgl. der Maximumnorm des \mathbb{R}^P (I 3.4). Diese ist ja ein Würfel und läßt sich somit auf einem geeigneten Gitter als p -Zelle c^P auffassen. ∂c^P ist ein $(p-1)$ -Zyklus und berandet nach 3.13(3) genau zwei p -Ketten, nämlich c^P und $[c^P$. x_1 ist innerer Punkt von c^P und x_2 innerer Punkt von $Z^P \setminus c^P$, weil Z^P ein topologischer HAUSDORFFraum ist und es somit eine Umgebung U_2 von x_2 gibt mit: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Somit:

$x_2 \in U_2 \subseteq Z^P \setminus U_1 \subseteq Z^P \setminus c^P$. Daher kann weder c^P , noch $[[c^P] = \overline{Z^P \setminus c^P}$ (1.42(3), Abschließung bzgl. Z^P bilden) ganz in $Z^P \setminus S^0 = Z^P \setminus \{x_1, x_2\}$ enthalten sein. ∂c^{p-1} ist somit ein in $Z^P \setminus S^0$ enthaltener und dort nicht nullhomologer $(p-1)$ -Zyklus.

Aussage (3) lautet jetzt:

Seien $\zeta_1^{p-1}, \zeta_2^{p-1}$ zwei in $Z^P \setminus S^0$ gelegene, aber dort nicht nullhomologe $(p-1)$ -Zyklen, so ist $\zeta_1^{p-1} + \zeta_2^{p-1} \sim 0^{p-1}$ in $Z^P \setminus S^0$.

Man erhält diese Aussage sofort, wenn man in Satz 3.15 $A = \{x_1\}$ und $B = \{x_2\}$ setzt; (jede einpunktige Menge ist abgeschlossen und zusammenhängend.)

Wir haben nun alle drei Aussagen für den Fall $k=0$ bewiesen und somit unsere Induktion verankert. Wir können daher annehmen, daß der Satz in allen drei Teilaussagen bereits für kleinere Dimensionen, als $k>0$ bewiesen ist.

Sei S^k eine topologische k -Sphäre und $f: 'S^k \rightarrow S^k$ eine Sphärenabbildung zwischen $'S^k$ und S^k .

$'S^k = \{x \in \mathbb{R}^P \mid x_i = 0 \text{ für } i \geq k+1, \sum_{i=1}^P x_i^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 = 1\}$. Dann ist

$'S^k \cap h_{k+1}^0$ eine $(k-1)$ -Sphäre und $'S^k \cap +h_{k+1}^0$ bzw. $'S^k \cap -h_{k+1}^0$ homöo-

morph zu einer k -Zelle (I 3.21(1)). Somit erhalten wir, daß die topologische k -Sphäre S^k sich als Vereinigung der beiden k -Elemente $f('S^k \cap +h_{k+1}^0) = E_1^k$ und $f('S^k \cap -h_{k+1}^0) = E_2^k$, deren Durchschnitt gerade

die topologische $(k-1)$ -Sphäre $S^{k-1} = f('S^k \cap h_{k+1}^0)$ ist, darstellen

läßt. Zunächst wollen wir die Teilaussage (1) beweisen:

Sei ζ^j ein j -Zyklus in $Z^P \setminus S^k$ und seien $\tau_1^{j+1}, \tau_2^{j+1}$ $(j+1)$ -Ketten

in $Z^p \setminus E_1^k$ bzw. in $Z^p \setminus E_2^k$, die von β^k berandet werden; (nach Theorem 4.6 müssen solche $(j+1)$ -Ketten existieren, da $E_i^k \subseteq S^k$, $i=1,2$, also: $|\beta^j| \subseteq Z^p \setminus S^k \subseteq Z^p \setminus E_i^k$, $i=1,2$.) Voraussetzungsgemäß ist $j \neq p-k-1$, woraus $j+1 \neq p-k = p-(k-1)-1$ folgt. Wegen der Induktionsannahme ist der $(j+1)$ -Zyklus $\tau_1^{j+1} + \tau_2^{j+1}$ in $Z^p \setminus S^{k-1} = Z^p \setminus (E_1^k \cap E_2^k)$ berandend. Setzt man im ALEXANDERSchen Lemma $F_1 = E_1^k$ und $F_2 = E_2^k$, so gilt: $\beta^j \sim 0$ in $Z^p \setminus F_1, Z^p \setminus F_2$. Ferner gilt, daß die Summe modulo 2 der von β^j in $Z^p \setminus F_i$, $i=1,2$, berandeten $(j+1)$ -Ketten $\tau_1^{j+1}, \tau_2^{j+1}$ in $Z^p \setminus S^{k-1} = Z^p \setminus (E_1^k \cap E_2^k) = Z^p \setminus (F_1 \cap F_2)$ nullhomolog ist (s.o.!).

Somit muß wegen des ALEXANDERSchen Lemmas β^j in $Z^p \setminus (F_1 \cup F_2) = Z^p \setminus (E_1^k \cup E_2^k) = Z^p \setminus S^k$ nullhomolog sein. Dies ist gerade die Behauptung.

Als nächstes beweisen wir die Teilaussage (3):

Seien β_1^{p-k-1} und β_2^{p-k-1} zwei in $Z^p \setminus S^k$ gelegene $(p-k-1)$ -Zyklen, die in $Z^p \setminus S^k$ nicht beranden. Wir müssen zeigen, daß $\beta^{p-k-1} := \beta_1^{p-k-1} + \beta_2^{p-k-1}$ in $Z^p \setminus S^k$ berandet!

Da $Z^p \setminus S^k = Z^p \setminus (E_1^k \cup E_2^k) = (Z^p \setminus E_1^k) \cap (Z^p \setminus E_2^k)$, gilt:

$|\beta_i^{p-k-1}| \subseteq Z^p \setminus S^k \subseteq Z^p \setminus E_r^k$, $r,i=1,2$. Nach Theorem 4.6 beranden sowohl β_1^{p-k-1} , als auch β_2^{p-k-1} in $Z^p \setminus E_i^k$, $i=1,2$. Es gibt somit für $i=1,2$ eine in $Z^p \setminus E_i^k$ gelegene und von β_r^{p-k-1} , $r=1,2$, berandete $(p-k)$ -Kette $\tau_{r,i}^{p-k}$ ($\partial \tau_{r,i}^{p-k} = \beta_r^{p-k-1}$, $|\tau_{r,i}^{p-k}| \subseteq Z^p \setminus E_i^k$; $i,r=1,2$.)

Da $k \geq 1$, gilt: $-k \leq -1$ und somit: $p-k-1 \leq p-1-1 = p-2$. Deshalb läßt sich das ALEXANDERSche Lemma auf β_1^{p-k-1} und β_2^{p-k-1} , $r=1,2$,

anwenden. Wäre $\beta_r^{p-k} := \beta_{r,1}^{p-k} + \beta_{r,2}^{p-k}$, $r=1,2$, in $Z^p \setminus S^{k-1} =$

$Z^p \setminus (E_1^k \cap E_2^k) = (Z^p \setminus E_1^k) \cup (Z^p \setminus E_2^k)$ nullhomolog, so wäre wegen

des ALEXANDERSchen Lemmas β_r^{p-k-1} , $r=1,2$, in $Z^p \setminus (E_1^k \cup E_2^k) = Z^p \setminus S^k$

nullhomolog, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit: $\beta_r^{p-k-1} \not\sim 0$

in $Z^p \setminus S^{k-1}$, $r=1,2$. Da $p-k = p-(k-1)-1$ und $\beta_r^{p-k} = \beta_r^{p-(k-1)-1}$, $r=1,2$,

nicht nullhomolog in $Z^p \setminus S^{k-1}$, folgt aus der Induktionsvorausset-

(a) zung, daß $\beta^{p-k} = \beta_1^{p-k} + \beta_2^{p-k} \sim 0$ in $Z^p \setminus S^{k-1} = Z^p \setminus (E_1^k \cap E_2^k)$.

$$\begin{aligned} \beta^{p-k} &= \beta_1^{p-k} + \beta_2^{p-k} = \tau_{1,1}^{p-k} + \tau_{1,2}^{p-k} + \tau_{2,1}^{p-k} + \tau_{2,2}^{p-k} = \\ &= (\underbrace{\tau_{1,1}^{p-k} + \tau_{2,1}^{p-k}}_{:= \tau_1^{p-k}}) + (\underbrace{\tau_{1,2}^{p-k} + \tau_{2,2}^{p-k}}_{:= \tau_2^{p-k}}) = \tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_i^{p-k} &= \tau_{1,i}^{p-k} + \tau_{2,i}^{p-k} \in Z^P \setminus E_i^k, \quad i=1,2. \quad \tau_i^{p-k} = \tau_{1,i}^{p-k} + \tau_{2,i}^{p-k} \\ &= \tau_1^{p-k-1} + \tau_2^{p-k-1} = \tau^{p-k-1}, \quad i=1,2. \quad \text{Somit: } \tau^{p-k-1} \sim 0 \text{ in } Z^P \setminus E_i^k, \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Da τ^{p-k} nullhomolog ist in $Z^P \setminus S^{k-1} = Z^P \setminus (E_1^k \cup E_2^k)$ ((a)) und Summe modulo 2 zweier im $Z^P \setminus E_1^k$ bzw. $Z^P \setminus E_2^k$ von τ^{p-k-1} berandeter

(p-k)-Ketten $\tau_1^{p-k}, \tau_2^{p-k}$, muß, wiederum nach dem ALEXANDERSchen Lemma, τ^{p-k-1} in $Z^P \setminus (E_1^k \cup E_2^k) = Z^P \setminus S^k$ nullhomolog sein. Dies ist aber gerade Teilaussage (2).

Abschließen wollen wir mit dem Beweis der Teilaussage (2):
Es gibt in $Z^P \setminus S^k$ mindestens einen nicht nullhomologen (p-k-1)-Zyklus.

Aufgrund der Induktionsannahme gibt es einen in $Z^P \setminus S^{k-1}$ nicht nullhomologen p-(k-1)-1=p-k Zyklus τ^{p-k} .

$$\begin{aligned} \emptyset &\subseteq (E_1^k \cap |\tau^{p-k}|) \cap (E_2^k \cap |\tau^{p-k}|) = E_1^k \cap E_2^k \cap |\tau^{p-k}| = S^{k-1} \cap |\tau^{p-k}| \subseteq \\ &\subseteq S^{k-1} \cap (Z^P \setminus S^{k-1}) = \emptyset. \quad \text{Ferner ist } F_i = E_i^k \cap |\tau^{p-k}| \text{ abgeschlossen} \\ &\text{für } i=1,2. \quad \text{Wegen des Gittertrennungssatzes 1.36 gibt es eine Ver-} \\ &\text{feinerung } G^* \text{ des Gitters } G, \text{ auf dem wir unsere Betrachtungen durch-} \\ &\text{führen, dergestalt, daß keine Zelle von } G^* \text{ beide Mengen } F_1 \text{ und } F_2 \\ &\text{trifft. } \tau^{p-k} \text{ sei das System aller Zellen von } \tau^{p-k} \text{ die } E_2^k \\ &\text{treffen. } \tau^{p-k} \text{ ist dann ein in } Z^P \setminus S^k \text{ nicht nullhomologer (p-k-1)-Zyk-} \\ &\text{lus. Denn, angenommen es gäbe auf } G^* \text{ eine in } Z^P \setminus S^k \text{ gelegene und} \\ &\text{von } \tau^{p-k} \text{ berandete (p-k)-Kette } \tau_0^{p-k}. \text{ Dann trifft der (p-k)-Zyklus} \\ &\tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k} \text{ } E_1^k \text{ nicht. } (|\tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k}| \subseteq \underbrace{(E_2^k \cap |\tau^{p-k}|)}_{\subseteq Z^P \setminus E_1^k} \cup \underbrace{(Z^P \setminus (E_1^k \cup E_2^k))}_{\subseteq Z^P \setminus E_1^k}) \\ &\subseteq Z^P \setminus E_1^k) \end{aligned}$$

und ist somit nach 4.6 in $Z^P \setminus E_1^k \subseteq Z^P \setminus S^{k-1}$ nullhomolog.

$$\begin{aligned} \text{Der Zyklus } \tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k} \text{ trifft } E_2^k \text{ nicht, } (|\tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k}| \subseteq \\ \subseteq \underbrace{|\tau_0^{p-k}|}_{\subseteq Z^P \setminus E_2^k} \cup \underbrace{|\tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k}|}_{\subseteq Z^P \setminus E_2^k} \subseteq Z^P \setminus E_2^k, \text{ da alle (p-k)-Zellen von } \tau^{p-k}, \\ \subseteq Z^P \setminus (E_1^k \cup E_2^k) = Z^P \setminus E_2^k \end{aligned}$$

die E_2^k treffen wegen der Definition von τ^{p-k} in τ^{p-k} liegen und somit keine Zelle von τ^{p-k} , die E_2^k trifft, in $\tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k}$ liegen kann) und ist wiederum nach 4.6 in $Z^P \setminus E_2^k \subseteq Z^P \setminus S^{k-1}$ nullhomolog.

Damit aber wäre $\tau^{p-k} = (\tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k}) + (\tau_0^{p-k} + \tau_1^{p-k} + \tau_2^{p-k})$ in $Z^P \setminus S^{k-1}$ nullhomolog. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß

$$\tau^{p-k} \not\sim 0 \text{ in } Z^P \setminus S^{k-1}.$$

Hiermit ist der Induktionsschluß erbracht und das Theorem bewiesen.



Um die Gesamtaussage des JORDANSchen Kurvensatzes zu erhalten, müssen wir noch eine wichtige Teilaussage beweisen: S^{p-1} ist der Rand beider Komplementärgebiete!

4.9 Theorem

Sei S^{p-1} eine topologische $(p-1)$ -Sphäre in Z^p . G_1 und G_2 seien ihre Komplementärgebiete (4.8). Dann ist S^{p-1} der Rand bzgl. Z^p sowohl von G_1 , als auch von G_2 .

Beweis:

Zunächst können wir o.B.d.A. annehmen, daß $S^{p-1} \subseteq \mathbb{R}^p$. Ist $w \in S^{p-1}$, so können wir, da nach 4.8 $Z^p \setminus S^{p-1} \neq \emptyset$, durch eine geeignete Drehung der Einheitskugel des \mathbb{R}^{p+1} , die nach KUHN, Topologie, 3.2(3), p. 105, zu Z^p homöomorph ist, erreichen, daß ein Punkt aus $Z^p \setminus S^{p-1}$ auf den Nordpol w der Einheitskugel des \mathbb{R}^{p+1} zu liegen kommt.

Sei nun $S^{p-1} \subseteq \mathbb{R}^p$, $b \in S^{p-1}$ und $f: 'S^{p-1} \rightarrow S^{p-1}$, eine Sphärenabbildung zwischen $'S^{p-1}$, der Einheitskugeloberfläche des \mathbb{R}^p , und S^{p-1} . $U'_\xi(b) := U_\xi(b) \cap S^{p-1}$, $U_\xi(b)$ die offene Kugel mit Radius ξ um b in der euklidischen Metrik des \mathbb{R}^p , $\xi > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, daß $f(U_\delta(f^{-1}(b)) \cap 'S^{p-1}) \subseteq U_\xi(b) \cap S^{p-1} = U'_\xi(b)$,

$$= U'_\delta(f^{-1}(b))$$

$f^{-1}(b) \in 'S^{p-1}$, $U_\delta(f^{-1}(b))$ die offene Kugel um $f^{-1}(b)$ mit Radius δ in der euklidischen Metrik des \mathbb{R}^p .

Zunächst zeigen wir, daß $K = f('S^{p-1} \setminus U'_\delta(f^{-1}(b))) \subseteq S^{p-1}$ ein $(p-1)$ -Element ist. Dies sieht man, wie folgt, ein: Durch eine geeignete Drehung der Einheitskugel des \mathbb{R}^p kann $'S^{p-1} \setminus U'_\delta(f^{-1}(b))$ in $'S^{p-1} \setminus U'_\delta(w)$, w der Nordpol von $'S^{p-1}$, übergeführt werden. Das Bild unter der stereographischen Projektion von $'S^{p-1} \setminus U'_\delta(w)$ ist aber nach I 3.20 eine abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt in \mathbb{R}^{p-1} , die Kugel bzgl. der euklidischen Metrik gebildet. Nach I 3.21(2) ist jedoch eine solche Kugel relativ homöomorph zu einer $(p-1)$ -Zelle c^{p-1} , somit also ein $(p-1)$ -Element. Da K durch mehrmalige Schachtelung von Homöomorphismen aus c^{p-1} entsteht, ist K ebenfalls ein $(p-1)$ -Element.

Nach 4.7(1) ist deshalb $Z^p \setminus K$ ein Gebiet, das nach I 3.16(3) bogenzusammenhängend ist. Sei Γ irgendein in $Z^p \setminus K$ verlaufender Bogen, der $x_1 \in G_1 \subseteq Z^p \setminus S^{p-1} \subseteq Z^p \setminus K$ und $x_2 \in G_2 \subseteq Z^p \setminus S^{p-1} \subseteq Z^p \setminus K$ verbindet. Wäre $\Gamma \cap S^{p-1} = \emptyset$, so hingen x_1 und x_2 in $Z^p \setminus S^{p-1}$ zusammen. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß x_1 und x_2 in verschiedenen Komponenten von $Z^p \setminus S^{p-1}$ liegen. Es muß somit $\Gamma \cap S^{p-1} \neq \emptyset$ gelten. Nach I 1.46 und I 1.47 haben wir, daß der

erste Punkt von Γ auf S^{p-1} von x_1 aus in der abgeschlossenen Hülle von G_1 und der erste Punkt von $\hat{\Gamma}$ auf S^{p-1} von x_2 aus in der abgeschlossenen Hülle von G_2 liegt. Da $\Gamma \subseteq Z^p \setminus K$, muß $\Gamma \cap S^{p-1}$ in $S^{p-1} \cap f(U'_\xi(f^{-1}(b))) \subseteq U'_\xi(b)$ liegen. $\Gamma \cap S^{p-1}$ enthält aber nach Obigem Punkte aus der abgeschlossenen Hülle von G_1 und G_2 . Da ξ beliebig war, enthält jede Umgebung von b Punkte aus der abgeschlossenen Hülle von G_1 , als auch aus der abgeschlossenen Hülle von G_2 . Somit gehört b sowohl zur abgeschlossenen Hülle von G_1 , als auch zur abgeschlossenen Hülle von G_2 . Andererseits haben wir: $b \in S^{p-1} \subseteq Z^p \setminus G_1, Z^p \setminus G_2$. $Z^p \setminus G_i, i=1,2$, ist abgeschlossen, da $G_i, i=1,2$, offen ist. Somit gilt: $b \in \text{Rd } G_1, \text{Rd } G_2$. Da b beliebig war, haben wir: $S^{p-1} \subseteq \text{Rd } G_1, \text{Rd } G_2$.

Um die Umkehrinklusion $\text{Rd } G_1, \text{Rd } G_2 \subseteq S^{p-1}$ zu beweisen, gehen wir, wie folgt, vor:

Sei $G = G_1 \cup G_2$. Nach KUHN, Topologie, 5.3(3), p.36, bilden die drei Mengen $G^\circ = G, \text{Rd } G, (Z^p \setminus G)^\circ = (S^{p-1})^\circ$ eine Zerlegung von Z^p . S^{p-1} ist jedoch im Rand der offenen Menge G_1 enthalten und somit nach I 1.19(3) nirgendsdicht als Teilmenge der nirgendsdichten Menge $\text{Rd } G_1$. Daher gilt: $(S^{p-1})^\circ = \emptyset$; hieraus folgt jedoch sofort: $\text{Rd } G = Z^p \setminus G = S^{p-1}$. Nach KUHN, 3.6, p. 130, haben wir: $\text{Rd } G_1, \text{Rd } G_2 \subseteq \text{Rd } G = S^{p-1}$, da G_1 und G_2 offene Komponenten von G sind.

4.9.1 Der JORDANSche Kurvensatz in $Z^p, R^p, E^p, E_w^p, (p \geq 2)$

(1) Der JORDANSche Kurvensatz in Z^p kann, wie folgt, ausgesprochen werden:

Jede topologische $(p-1)$ -Sphäre S^{p-1} besitzt zwei nichtleere Komplementärgebiete G_1, G_2 . S^{p-1} ist der Rand beider Komplementärgebiete. (4.8, 4.9).

(2) Falls wir unsere Betrachtungen auf den R^p beschränken, S^{p-1} somit ganz in R^p enthalten ist, nimmt der Kurvensatz folgende Form an:

Jede in R^p enthaltene topologische $(p-1)$ -Sphäre S^{p-1} zerlegt den R^p in zwei nichtleere Gebiete G_1, G_2 . Eines ist beschränkt, das andere ist unbeschränkt. S^{p-1} ist der topologische Rand bzgl. R^p beider Gebiete.

Beweis:

Der erste Teil der Aussage von (2) würde in den Betrachtungen zu Theorem 4.8 bewiesen. Es ist somit nur noch die Aussage, daß S^{p-1} der Rand beider Komplementärgebiete ist, zu beweisen. Falls G_1 das beschränkte Komplementärgebiet von S^{p-1} ist, stimmt nach

I 3.18 der Rand von G_1 bzgl. Z^p , der nach (1) mit S^{p-1} zusammenfällt, mit dem Rand von G_2 bzgl. R^p überein. G_2 , die unbeschränkte Komponente von $R^p \setminus S^{p-1}$, entsteht aus einem Gebiet G des Z^p , das S^{p-1} als seinen Rand bzgl. Z^p besitzt, durch Entfernen des Punktes w . Nach I 3.17(2) stimmt der Rand von G bzgl. Z^p mit dem Rand von $G_2 = G \setminus \{w\}$ bzgl. R^p überein.

- (3) Sei E_w^p , $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung eines p -dimensionalen normierten linearen Raumes E^p mit der Norm $\|\cdot\|$. Falls $K^{p-1} = \{x \in E^p \mid \|x\| = 1\}$ die "Oberfläche" der Einheitskugel in E^p bezeichnet, so wollen wir jede zu K^{p-1} relativ homöomorphe Teilmenge B von E_w^p als topologische $(p-1)$ -Sphäre bezeichnen. Wiederum gilt:
Jede topologische $(p-1)$ -Sphäre B des E_w^p besitzt zwei Komplementärgebiete G_1, G_2 . Es gilt: $B = \text{Rd } G_1 = \text{Rd } G_2$.

Beweis:

Nach I 2.11(3) sind R^p und E^p dergestalt zueinander homöomorph, daß $f(\cdot S^{p-1}) = K^{p-1}$, falls f den Homöomorphismus zwischen R^p und E^p bezeichnet. Nach I 3.13 läßt sich f dergestalt zu einem Homöomorphismus \tilde{f} zwischen Z^p und E_w^p fortsetzen, daß $\tilde{f}|_{R^p} = f$. Somit gilt: $\tilde{f}(\cdot S^{p-1}) = f(\cdot S^{p-1}) = K^{p-1}$. K^{p-1} ist somit als homöomorphes Bild der JORDANmenge $\cdot S^{p-1}$ des R^p eine JORDANmenge des E_w^p (I 1.9). Falls B eine zu K^{p-1} relativ homöomorphe Teilmenge von E_w^p ist, besitzt $E_w^p \setminus B$ somit zwei nichtleere Komponenten G_1, G_2 , mit $\text{Rd } G_1 = \text{Rd } G_2 = B$. Da B das relativ homöomorphe Bild der kompakten Menge K^{p-1} in dem topologischen HAUSDORFFraum E_w^p ist, ist B abgeschlossen und $E_w^p \setminus B$ somit offen. Nach I 3.16(3) sind aber alle Komponenten der offenen Menge $E_w^p \setminus B$ Gebiete.

- (4) Falls E^p , $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, ein p -dimensionaler NLR ist und K^{p-1} wie in (3) erklärt ist, gilt folgendes Analogon zum JORDANschen Kurvensatz:
Jede zu K^{p-1} relativ homöomorphe Teilmenge B von E^p besitzt zwei nichtleere Komplementärgebiete G_1, G_2 , von denen eines beschränkt, das andere jedoch unbeschränkt ist. $\text{Rd } G_1 = \text{Rd } G_2 = B$.
Der Beweis verläuft völlig analog wie der Beweis des JORDANschen Kurvensatzes im R^p .
- (5) Es ist interessant, festzustellen, daß der JORDANsche Kurvensatz in unendlichdimensionalen normierten Räumen insofern nicht zu gelten braucht, daß ein relativ homöomorphes Bild

der Oberfläche der Einheitskugel den Raum nicht unbedingt zu zerlegen braucht.

Um dies zu zeigen, betrachten wir den Raum l^2 aller quadratisch summierbaren reellen Folgen. $e_1=(1,0,\dots)$, $e_2=(0,1,0,\dots),\dots$, $e_k=(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0),\dots$ usw. bilden ein vollständiges

↑
k-te Stelle

Orthonormalsystem des l^2 , da für $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$, $(x, e_k) = x_k$

und $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|^2$ (HEUSER, Funktionalanalysis,

65.1, p. 269). Durch $f(x) = 0 \cdot e_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (x, e_{k-1}) e_k$ definieren

wir eine Selbstabbildung des l^2 . Falls $x=(x_1, x_2, \dots) \in l^2$, so gilt:

$f(x)=(0, x_1, x_2, \dots)$ und offenkundig ist $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 0^2 +$

$+ \sum_{k=2}^{\infty} f(x)_k^2 = \|f(x)\|^2$. Die Abbildung f ist somit wohldefiniert

und normerhaltend. Darüberhinaus ist $f(x)$ linear, da $f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha(x_k) + \beta(y_k)) = f((\alpha x_k) + (\beta y_k)) = f((\alpha x_k + \beta y_k)) =$

$= (0, \alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots) = (\alpha 0 + \beta 0, \alpha x_1 + \beta y_1, \dots) =$

$(\alpha 0, \alpha x_1, \alpha x_2, \dots) + (\beta 0, \beta y_1, \beta y_2, \dots) = \alpha(0, x_1, x_2, \dots) + \beta(0, y_1, y_2, \dots) =$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$. Somit ist f stetig, da für alle $x \neq 0$ aus l^2

$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 1$ und daher $\|f\| = \sup_{\substack{x \in l^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 1 < \infty$.

f ist injektiv, da aus $f(x)=0$ folgt, daß $x=0$. Dies sieht man, wie

folgt ein: $(f(x), e_m) = (\sum_{k=2}^{\infty} (x, e_{k-1}) e_k, e_m) = (x, e_{m-1})$ für alle

$m \geq 2$. Somit muß für alle $k=1, 2, \dots$ $(x, e_k) = (f(x), e_{k+1}) = (0, e_{k+1}) = 0$ gelten, falls $f(x)=0$. Aber nur der Nullvektor kann auf allen Elementen eines maximalen Orthonormalsystems senkrecht stehen.

Somit kann nur der Nullvektor auf den Nullvektor abgebildet werden und f ist als lineare Abbildung deshalb injektiv.

Jeder Vektor x aus l^2 , dessen erste Koordinate gleich 0 ist, der also die Form $x=(0, x_2, x_3, \dots)$ besitzt, ist das Bild unter f des Vektors $x'=(x_2, x_3, \dots)$. Damit ist f ein Normisomorphismus zwischen l^2 und der Hyperebene H von l^2 , die aus der linearen Hülle der (e_2, e_3, \dots) besteht. Nach HEUSER, loc. cit., 7.5, p. 57,

ist f^{-1} auf $H = f(l^2)$ stetig, da $\|x'\| = \|f(x)\|$ und somit $m=1$

eine in Satz 7.5 geforderte Konstante ist.

Falls $S = \{x \in l^2 \mid \|x\| = 1\}$, gilt, daß $f(S) = \{x \in l^2 \mid x_1 = 0, \|x\| = 1\}$, somit gerade die "Oberfläche" der Einheitskugel von H ist. $f(S)$ kann jedoch nach I 2.20(1) als echte Teilmenge der Hyperebene H (beispielsweise gilt: $(0, 2, 0, 0, \dots) = z$ liegt in H , jedoch haben wir: $\|z\| = 2$ und somit liegt z nicht in $f(S)$!) l^2 nicht zerlegen.

- (6) Aus (4) ergibt sich, daß ein normierter linearer Raum E , in dem irgendeine Teilaussage des JORDANSchen Kurvensatzes nicht gilt, *unendlichdimensional* sein muß. □

In den folgenden Sätzen 4.9.2 bis 4.9.7 bezeichne X^p entweder R^p , Z^p oder einen p -dimensionalen normierten linearen Raum E^p , bzw. dessen ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung E^p_w . Die topologischen $(p-1)$ -Sphären S^{p-1} seien immer Teilmengen von X^p . Die Zitierung von Satz 4.3.3 in Satz 4.9.3 ist dadurch gerechtfertigt, daß durch den in I 2.11(3) angegebenen kanonischen Homöomorphismus zwischen R^p und E^p bzw. durch seine Fortsetzung auf Z^p und E^p_w nach I 3.13 die Aussage von Satz 4.3.3 auch für den E^p bzw. E^p_w als gültig erwiesen wird.

4.9.2 Folgerungen

Sei S^{p-1} eine topologische $(p-1)$ -Sphäre in X^p und G_1, G_2 die Komplementärgebiete von S^{p-1} .

- (1) G_1, S^{p-1}, G_2 bilden eine echte Zerlegung von X^p .
- (2) $\overline{G_{1/2}} = G_{2/1} \cup S^{p-1} = \overline{G_{2,1}}$.
- (3) $(\overline{G_{1/2}})^o = G_{1/2}$.

Beweis:

- (1) wegen des JORDANSchen Kurvensatzes für X^p gilt, daß $\emptyset \neq [S^{p-1} = G_1 \cup G_2, G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, G_1 \cap G_2 = \emptyset$ wegen der Komponenteneigenschaft von G_1 und G_2 .
- (2) folgt aus (1) und der Tatsache, daß $Rd G_1 = Rd G_2 = S^{p-1}$, (KUHN, Topologie, 5.2, p. 36).
- (3) Da $S^{p-1} = Rd G_1 = Rd G_2$, kann kein Punkt aus S^{p-1} innerer Punkt von $\overline{G_{1/2}}$ sein. Nach (2) ist $\overline{G_{1/2}} = G_{1/2} \cup S^{p-1}$. Da $G_{1/2}$ Gebiete sind, ist jeder Punkt von $G_{1/2}$ innerer Punkt von $G_{1/2}$. □

4.9.3 Satz

Sind G_1, G_2 die beiden Komplementärgebiete der topologischen $(p-1)$ -Sphäre S^{p-1} und ist S^{p-1} in einem Gebiet G enthalten, so hat $G \setminus S^{p-1}$ genau zwei Komponenten: nämlich $G \cap G_1, G \cap G_2$.

Es gilt: $Rd(G \cap G_{1/2}) = S^{p-1} \cup (G_{1/2} \cap Rd G)$.

Beweis:

Daß $G \cap G_1, G \cap G_2$ die Komponenten von $G \setminus S^{p-1}$ sind, folgt aus 4.3.3. Da G offen ist, gilt nach I 1.14(1): $G \cap \text{Rd } G = \emptyset$. Andererseits ist $\text{Rd } G_1 = S^{p-1} \subseteq G$. Somit: $\text{Rd } G \cap \text{Rd } G_1 \subseteq G \cap [G = \emptyset$.

Nach KUHN, 5.4(2), p. 36 gilt daher:

$$\text{Rd}(G \cap G_1) = (G \cap \text{Rd } G_1) \cup (G_1 \cap \text{Rd } G) = (G \cap S^{p-1}) \cup (G_1 \cap \text{Rd } G) = S^{p-1} \cup (G_1 \cap \text{Rd } G); \text{ entsprechend verfahren wir für } G_2. \quad \square$$

4.9.4 Satz

Zwei disjunkte topologische $(p-1)$ -Sphären S_1, S_2 haben genau drei Komplementärgebiete. Diese können so mit G_1, G_2, G_3 bezeichnet werden, daß $\text{Rd } G_1 = S_1, \text{Rd } G_2 = S_2, \text{Rd } G_3 = S_1 \cup S_2$ gilt.

Beweis:

Als zusammenhängende Teilmenge von $[S_1$ muß S_2 in einem Komplementärgebiet G' von S_1 enthalten sein. Das andere Komplementärgebiet von S_1 bezeichnen wir mit G_1 .

Entsprechend seien G'' dasjenige Komplementärgebiet von S_2 , das S_1 enthält und G_2 das andere.

Nach 4.9.3 hat $G' \setminus S_2$ die beiden Komponenten $G' \cap G_2, G' \cap G''$.

Nach KUHN, 3.9, p. 131, sind dann $G_1, G' \cap G_2, G' \cap G'' =: G_3$ die Komponenten von $[S_1 \setminus S_2 = [S_1 \cap [S_2 = [(S_1 \cup S_2)$ ($A \hat{=} [S_1, B \hat{=} S_2, C \hat{=} G'$; die von G' verschiedene Komponente von $[S_1$ ist G_1 , die Komponenten von $G' \setminus S_2$ sind $G' \cap G_2, G' \cap G''$, s.o.).

Da $G_2 \subseteq [S_1$, muß G_2 entweder in G_1 oder G' enthalten sein. Wäre $G_2 \subseteq G_1$, so folgte $G' \cap G_2 \subseteq G' \cap G_1 = \emptyset$. Somit könnte aber $G' \cap G_2$ als leere Menge keine Komponente von $G' \setminus S_2$ sein. Somit gilt: $G_2 \subseteq G'$! Deswegen haben wir: $G' \cap G_2 = G_2$.

Nach dem JORDANSchen Kurvensatz ist $\text{Rd } G_1 = S_1, \text{Rd } G_2 = S_2$. Die Ränder S_1 bzw. S_2 von G' bzw. G'' treffen sich nicht. Nach KUHN, 5.4(2), p. 36, ist somit: $\text{Rd } G_3 = \text{Rd}(G' \cap G'') = (G' \cap S_2) \cup (G'' \cap S_1) = S_2 \cup S_1. \quad \square$

Durch vollständige Induktion nach n erhalten wir:

4.9.5 Satz

Seien $S_1, \dots, S_n, n \geq 2$, paarweise disjunkte topologische $(p-1)$ -Sphären. Dann besitzt $S := \bigcup_{j=1}^n S_j$ genau $n+1$ Komplementärgebiete.

Beweis:

4.9.4 liefert gerade die Induktionsverankerung. Seien $S_1, \dots, S_n, n \geq 2$, paarweise disjunkte topologische $(p-1)$ -Sphären, für die

der Satz bereits bewiesen ist. $S = \bigcup_{j=1}^n S_j$ habe somit $n+1$ Komplementärgebiete.

mentärgebiete. S_{n+1} sei eine weitere topologische $(p-1)$ -Sphäre mit $S_{n+1} \cap S_j = \emptyset$, $j=1, \dots, n$. Als zusammenhängende Teilmenge von $[S = \bigcap_{j=1}^n [S_j$ muß S_{n+1} in genau einer Komponente G von $[S$ enthalten sein. Die übrigen n Komponenten von $[S$, die mit S_{n+1} leeren Durchschnitt besitzen, wollen wir G_1, \dots, G_n nennen. S_{n+1} besitzt wegen des JORDANSchen Kurvensatzes genau zwei Komplementärgebiete D_1, D_2 . Nach 4.9.3 sind die Komponenten von $G \setminus S_{n+1} = G \cap D_1, G \cap D_2$. Wiederum nach KUHN, 3.9. p. 131, sind die Komponenten von $[S \setminus S_{n+1} = \bigcap_{j=1}^n [S_j \cap [S_{n+1} = \bigcap_{j=1}^{n+1} [S_j = \left[\bigcup_{j=1}^{n+1} S_j : G \cap D_1, G \cap D_2, G_1, \dots, G_n \right.$. Somit besitzt $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S_{n+1}$ $n+2$ Komplementärgebiete; ($A \hat{=} [S$, $B \hat{=} S_{n+1}$, $C \hat{=} G$). □

4.9.6 Satz

Seien S_1, S_2 zwei topologische $(p-1)$ -Sphären. G_{11}, G_{12} bzw. G_{21}, G_{22} seien die Komplementärgebiete von S_1 bzw. S_2 . Falls eine dieser $(p-1)$ -Sphären, etwa S_1 , ganz in einem Komplementärgebiet der anderen, etwa G_{21} , enthalten ist, muß genau ein Komplementärgebiet von S_1 ebenfalls ganz in G_{21} enthalten sein.

Beweis:

Angenommen, beide Komplementärgebiete von S_1 trafen das Komplement von G_{21} , so müßten nach KUHN, 1.8, p. 119, auch beide Komplementärgebiete von S_1 den Rand von G_2 , der mit S_2 übereinstimmt, treffen. Somit: $G_{11} \cap S_2 \neq \emptyset \neq G_{12} \cap S_2$. Da aber $G_{11} \subseteq [G_{12}$, muß, wiederum nach loc. cit., die zusammenhängende Menge S_2 den Rand von G_{11} , der mit S_1 zusammenfällt, treffen. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß S_1 in einem der Komplementärgebiete von S_2 , also ganz im Komplement von S_2 , enthalten sein soll!

Wäre $G_{11}, G_{12} \subseteq G_{21}$, so hätten wir: $\mathbb{Z}^P = G_{11} \cup G_{12} \cup S_1 \subseteq G_{21} \subset \mathbb{Z}^P$, bzw. $\mathbb{R}^P = G_{11} \cup G_{12} \cup S_1 \subseteq G_{21} \subset \mathbb{R}^P$!

4.9.7 Bemerkungen

- (1) Falls beide topologische $(p-1)$ -Sphären S_1, S_2 in 4.9.6 ganz in \mathbb{R}^P bzw. E^P enthalten sind und S_1 in der beschränkten Komponente von $[S_2$ enthalten ist, muß die beschränkte Komponente von $[S_1$ in der beschränkten Komponente von $[S_2$ enthalten sein, da ja nach 4.9.6 mindestens eine Komponente von $[S_1$ in der beschränkten Komponente von $[S_2$ enthalten sein muß und keine unbeschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes wegen der

Erblichkeit der Beschränktheit, niemals in einer beschränkten Teilmenge enthalten sein kann.

- (2) Sind die beiden topologischen $(p-1)$ -Sphären S_1 und S_2 disjunkt, so müssen beide als zusammenhängende Mengen ganz in einem Komplementärgebiet der anderen liegen. Wir haben somit nach 4.9.6, daß, falls etwa $S_1 \subseteq G_{21}$, eines der Komplementärgebiete von S_1 , etwa G_{11} , in G_{21} enthalten sein muß. In diesem Fall würde $S_2 \subseteq G_{11}$ sofort den Widerspruch $\emptyset \neq S_2 \subseteq \bar{S}_2$ implizieren, da $G_{11} \subseteq G_{21} \subseteq \bar{S}_2$. Da aber andererseits S_2 als zusammenhängende Teilmenge von \bar{S}_1 eine Komponente von \bar{S}_1 bestimmt, muß $S_2 \subseteq G_{12}$ gelten. Wiederum nach 4.9.6, muß für ein Komplementärgebiet von S_2 gelten, daß es ganz in G_{12} enthalten ist. Wäre $G_{21} \subseteq G_{11}$, so hätten wir den Widerspruch $\emptyset \neq G_{11} \subseteq G_{21} \subseteq G_{12}$, $G_{11} \cap G_{12} = \emptyset$, $G_{11} \cap G_{12} = \emptyset$, wegen der Komponenteneigenschaft von G_{11} und G_{12} . Somit muß $G_{21} \subseteq G_{12}$ gelten.

Den ganzen Sachverhalt kann man auch, wie folgt, ausdrücken: Ein Komplementärgebiet einer topologischen $(p-1)$ -Sphäre S_1 in X^p enthält entweder ein Komplementärgebiet einer zu S_1 disjunkten topologischen $(p-1)$ -Sphäre S_2 oder ist in einem Komplementärgebiet von S_2 enthalten. Dasjenige Komplementärgebiet von S_1 , das ein Komplementärgebiet von S_2 umfaßt, enthält auch S_2 . Falls S_1 und S_2 ganz in \mathbb{R}^p bzw. E^p enthalten sind und das beschränkte Komplementärgebiet von S_1 das beschränkte Komplementärgebiet von S_2 enthält, so enthält das beschränkte Komplementärgebiet von S_1 auch S_2 . Das unbeschränkte Komplementärgebiet von S_1 , muß dann im unbeschränkten Komplementärgebiet von S_2 , das S_1 umfaßt, enthalten sein.

Aus dem JORDANSchen Kurvensatz in Z^p bzw. \mathbb{R}^p können wir nun einige interessante Folgerungen ziehen. Z.B., daß das stetige und injektive Bild einer offenen Menge des Z^p (\mathbb{R}^p) in Z^p (\mathbb{R}^p) wiederum offen ist. Z^p (\mathbb{R}^p) besitzen somit die Invarianz offener Mengen (I 1.1).

4.10 Theorem (Invarianz der Dimensionszahl)

Seien $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \neq q$. Dann lassen sich weder \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q , noch Z^p und Z^q topologisch aufeinander abbilden!

Beweis:

Falls $q=0$, so ist \mathbb{R}^0 ein Punkt x der reellen Zahlen, $Z^0 = \{x\} \cup \{w\}$. Diese beiden endlichen Mengen lassen sich nicht einmal bijektiv auf $\mathbb{R}^p \subset Z^p$, $p \geq 1$, abbilden, somit a fortiori auch nicht topologisch auf \mathbb{R}^p bzw. Z^p .

Sei $q = 1$. Falls $p = 0$, gilt das gerade eben Angeführte. Sei also $p > 1$. \mathbb{R}^1 besitzt jeden seiner Punkte als Zerlegungspunkt. \mathbb{R}^p , $p > 1$, ist jedoch nach I 2.21(2) zerlegungspunktfrei. Nach I 1.21(1) ist Zerlegungspunktfreiheit eine topologische Invariante, somit können \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^1 , $p > 1$, nicht zueinander homöomorph sein.

Seien nun $p, q > 1$; $q < p$ o.B.d.A..

Aufgrund von 4.9.1(2) besitzt $'S^{q-1}$, die Einheitskugeloberfläche des \mathbb{R}^q zwei Komplementärgebiete, zerlegt somit den \mathbb{R}^q , während die in den \mathbb{R}^p isometrisch auf kanonische Art und Weise eingebettete Menge $'S^{q-1}$ als echte Teilmenge eines echten Unterraums nach I 2.20(2) nur eine einzige Komplementärkomponente besitzt. Wäre $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ein Homöomorphismus, so wäre $\mathbb{R}^p \setminus 'S^{q-1}$ zusammenhängend. $f(\mathbb{R}^p \setminus 'S^{q-1}) = f(\mathbb{R}^p) \setminus f('S^{q-1}) = \mathbb{R}^q \setminus f('S^{q-1})$ jedoch ist das Komplement einer topologischen $(q-1)$ -Sphäre des \mathbb{R}^q und besitzt nach 4.9.1(2) (JORDANScher Kurvensatz in \mathbb{R}^q) zwei Komplementärgebiete. Der Zusammenhang ist aber eine stetige und somit a posteriori eine homöomorphe Invariante. Deshalb kann es keinen Homöomorphismus zwischen \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q geben.

Gäbe es aber einen Homöomorphismus zwischen Z^p und Z^q , so vermittelte nach I 3.13 die Einschränkung desselben auf \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q eine topologische Abbildung zwischen \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q . Die Unmöglichkeit der Existenz einer solchen Abbildung wurde jedoch gerade gezeigt. Somit kann es auch keine topologische Abbildung zwischen Z^p und Z^q geben. □

4.10.1 Folgerung

Wegen des in I 2.11(3) angegebenen kanonischen Homöomorphismus zwischen E^s und \mathbb{R}^s bzw. E_w^s und Z^s , $s \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$, würde die Existenz eines Homöomorphismus zwischen E^p und E^q , $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, bzw. E_w^p und E_w^q sofort die Existenz eines solchen zwischen \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q bzw. Z^p und Z^q herbeiführen. Dies widerspricht jedoch dem Theorem 4.10 und somit gilt die Invarianz der Dimensionszahl auch für endlichdimensionale lineare Räume.

Zum Beweis des Satzes über die Invarianz offener Mengen unter stetigen und injektiven Abbildungen, die auf offenen Teilmengen von Z^p (\mathbb{R}^p) definiert sind und ihre Werte in Z^p (\mathbb{R}^p) haben, benötigen wir noch einige Sätze:

4.11 Theorem

Das Komplement eines p -Elements in Z^p (\mathbb{R}^p), $p \geq 2$, ist nicht leer und zusammenhängend.

Beweis:

Daß das Komplement eines p -Elements E^p in $Z^p(\mathbb{R}^p)$, $p \geq 2$, ein Gebiet und somit zusammenhängend ist, wurde in 4.7(1) gezeigt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $Z^p(\mathbb{R}^p)$ kein p -Element sein kann. Sei E^p ein p -Element des $Z^p(\mathbb{R}^p)$ und $f: c^p \rightarrow E^p$ eine Elementabbildung, wobei wir o.B.d.A. c^p als beschränkt annehmen können. In diesem Fall ist aber c^p ein kompaktes Intervall des \mathbb{R}^p , dessen topologischer Rand O nach 4.5(6) eine topologische $(p-1)$ -Sphäre ist. Nun ist $c^p \setminus O$ als die Menge der inneren Punkte eines Intervalls zusammenhängend. Wäre $E^p = f(c^p) = Z^p(\mathbb{R}^p)$, so müßte $f(c^p \setminus O) = f(c^p) \setminus f(O) = Z^p \setminus f(O) (\mathbb{R}^p \setminus f(O))$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend sein. Nach dem JORDANSchen Kurvensatz besitzt jedoch $Z^p \setminus f(O) (\mathbb{R}^p \setminus f(O))$ zwei nichtleere Komponenten und ist somit unzusammenhängend. Somit kann kein p -Element mit $Z^p(\mathbb{R}^p)$ übereinstimmen. \square

Entscheidend für den Beweis des Invarianz offener Mengen ist das folgende Theorem:

4.12 Theorem

Sei A eine beschränkte p -Zelle, $p \geq 2$, auf einem Gitter \mathcal{G} des $Z^p(\mathbb{R}^p)$ und f eine eineindeutige, stetige Abbildung von A nach $Z^p(\mathbb{R}^p)$.

Dann ist $f(A^\circ)$ eines der Komplementärgebiete des topologischen $(p-1)$ -Sphäre $f(\text{Rd } A)$.

Beweis:

Nach KUHN, 1.11, p. 100, besitzt f eine stetige Inverse, da jede beschränkte Zelle kompakt in \mathbb{R}^p ist. f ist somit ein Homöomorphismus zwischen A und $f(A)$. Deshalb ist nach 4.5(5)(6) $f(\text{Rd } A)$ eine topologische $(p-1)$ -Sphäre und $f(A)$ ein p -Element. $f(A^\circ)$ ist als stetiges Bild der zusammenhängenden Menge A° (A ist ein kompaktes, nicht ausgeartetes Intervall des \mathbb{R}^p und somit ist sein Inneres nicht leer und zusammenhängend) zusammenhängend und trifft wegen der Eineindeutigkeit von f die topologische $(p-1)$ -Sphäre $f(\text{Rd } A)$ nicht, muß somit in einem der beiden Komplementärgebiete von $f(\text{Rd } A)$, etwa G_1 , liegen. Wäre $f(A^\circ) \subset G_1$, so wären Punkte aus $M = Z^p \setminus f(A) (\mathbb{R}^p \setminus f(A))$ in beiden Komplementärgebieten G_1, G_2 von $f(\text{Rd } A)$ enthalten, aber keiner dieser Punkte könnte in $\text{Rd } G_1 = \text{Rd } G_2 = f(\text{Rd } A) \subseteq f(A)$ enthalten sein. Dies widerspricht jedoch der Tatsache aus Theorem 4.11, daß M als Komplement eines p -Elements zusammenhängend ist und somit auch $\text{Rd } G_1$ treffen müßte, weil $G_2 \subseteq [G_1 \text{ und } G_1 \cap M \neq \emptyset \neq G_2 \cap M]$. \square

4.13 Theorem (Invarianz offener Mengen)

Sei G eine offene Menge des Z^p (\mathbb{R}^p), $p \geq 2$ und f sei eine stetige, eineindeutige Abbildung von G auf $E \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p).

Dann ist auch E eine offene Teilmenge von Z^p (\mathbb{R}^p).

Beweis:

Zunächst wollen wir annehmen, daß $G \subset Z^p$. Dann kann durch eine geeignete Drehung der Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^{p+1} , die ja zu Z^p homöomorph ist, erreicht werden, daß eine zu G homöomorphe und somit offene Menge den Punkt w nicht enthält. Wir können somit in diesem Fall o.B.d.A. annehmen, daß $G \subseteq \mathbb{R}^p$. Sei nun y aus E , etwa $y = f(x)$, x aus G . Wegen der Regularität von \mathbb{R}^p gibt es dann eine abgeschlossene Umgebung von x bzgl. der Maximumnorm, also ein kompaktes Intervall und somit eine beschränkte p -Zelle K , die noch ganz in G enthalten ist. Nach dem vorhergehenden Theorem 4.12 wird aber das Innere dieser p -Zelle auf eine y enthaltende offene Menge abgebildet, die ganz in $f(K) \subseteq f(G) = E$ enthalten ist. Somit muß E offen sein, da y aus E beliebig war.

Falls nun $G = Z^p$ und $f(G) = E$ nicht offen wäre, gälte $E \neq Z^p$ und wir hätten, daß $f(G \setminus \{w\}) = f(\mathbb{R}^p) = f(G) \setminus f(w) = E \setminus f(w)$ offen wäre, wegen des ersten Teils des Beweises. $f(w)$ wäre somit ein Öffnungspunkt von E . Nach I 1.26(3) kann aber in einem zerlegungspunktfreien Raum X (Z^p , $p \geq 2$, ist zerlegungspunktfrei nach I 3.12(3)) keine echte, abgeschlossene Teilmenge von X , die mehr als einen Punkt besitzt (E muß als bijektives Bild der Menge $Z^p \supset \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen!) Öffnungspunkte besitzen. E ist aber als stetiges Bild der kompakten Menge Z^p kompakt und somit als kompakte Teilmenge des HAUSDORFFraums Z^p abgeschlossen. □

4.14 Bemerkungen

- (1) Im \mathbb{R}^1 ist jede stetige und injektive Funktion, die auf einer offenen Teilmenge der reellen Zahlen definiert ist, offen (I 1.7) und somit gilt die Aussage von 4.13 für offene Teilmengen von \mathbb{R}^1 . Da Z^1 , die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^1 , zu einer Kreislinie der xy -Ebene homöomorph ist und Kreise zerlegungspunktfrei sind (Satz von WILDER), Z^1 somit wegen der topologischen Invarianz der Zerlegungspunktfreiheit ebenfalls zerlegungspunktfrei ist, kann beim Beweis der Aussage von 4.13 wörtlich so, wie im zweiten Teil des Beweises von 4.13 argumentiert werden. Wir haben somit: Sei $X = Z^p$ (\mathbb{R}^p), $p \geq 1$, und G eine offene Teilmenge von X .

Ist f eine injektive und stetige Abbildung, die G nach X abbildet, so ist $f(G)$ offen. Insbesondere ist das stetig-eindeutige Bild in X eines Gebietes von G wiederum ein Gebiet.

- (2) Der eben festgestellte Sachverhalt darf keineswegs mit der Tatsache verwechselt werden, daß bei topologischen Abbildungen von X offene Mengen in offene Mengen übergeführt werden. Diese Tatsache ist eine einfache Folgerung aus der Definition der topologischen Abbildung. In (1) wird keineswegs gefordert, daß die stetig-eindeutige Funktion f außerhalb von G definiert ist, noch, daß sie zu einem Homöomorphismus, der X in sich selbst abbildet, fortgesetzt werden kann, noch, daß f die Einschränkung einer topologischen Selbstabbildung von X auf G ist.

4.15 Korollar

Sei X entweder \mathbb{R}^p oder \mathbb{Z}^p , $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

- (1) Falls $G \subseteq X$ offen und f eine stetig-injektive Abbildung von G nach X ist, so vermittelt f einen Homöomorphismus zwischen G und $f(G)$.
- (2) Falls f die Menge $E \subseteq X$ stetig-eindeutig nach X abbildet, so gilt: $f(E^\circ) \subseteq (f(E))^\circ$. Ist $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ ebenfalls stetig, so haben wir: $f(E^\circ) = (f(E))^\circ$.
- (3) Falls die Menge E in (2) abgeschlossen ist und f eine stetige Inverse besitzt, so gilt: $f(\text{Rd } E) = \text{Rd } f(E)$. (Invarianz des Randes.)
- (4) \mathbb{Z}^p ist zu keiner echten Teilmenge homöomorph.
- (5) Keine nichtleere, offene Teilmenge O von \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p) kann zu einer offenen, nichtleeren Teilmenge O' von \mathbb{Z}^q (\mathbb{R}^q), $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, homöomorph sein.
- (6) Falls eine Teilmenge B von \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p) zu einer Teilmenge C von \mathbb{Z}^q (\mathbb{R}^q), $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, homöomorph ist, so gilt: $B^\circ = \emptyset$, falls $p > q$.

Beweis:

Die Aussagen (1)-(3) folgen wegen der Invarianz der offenen Mengen für \mathbb{Z}^p (\mathbb{R}^p), $p \geq 1$, sofort aus I. 1.13 (1)-(3).

- (4) Jede zu \mathbb{Z}^p homöomorphe Teilmenge muß sowohl offen nach 4.14(1) und als stetiges Bild der kompakten Menge \mathbb{Z}^p kompakt, somit als kompakte Teilmenge des topologischen HAUSDORFFraums \mathbb{Z}^p abgeschlossen sein. Da \mathbb{Z}^p zusammenhängt (I 3.15) gibt es in \mathbb{Z}^p nur zwei offen-abgeschlossene Mengen, nämlich \mathbb{Z}^p und die leere Menge. Da die leere Menge kein bijektives Bild der überabzählbaren Menge \mathbb{Z}^p sein kann, kann somit nur \mathbb{Z}^p eine zu \mathbb{Z}^p homöomorphe Teilmenge sein.

(5) Wir zeigen die Aussage zunächst für Teilmengen von \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q . Da $p \neq q$, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $p > q$. Falls $q=0$, so kann die zweipunktige Menge $\{R^0 = x \cup \{w\} = Z^0$ unmöglich bijektiv auf eine offene Teilmenge O von \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, abgebildet werden, da O bekanntlicherweise *überabzählbar* ist. Sei nun $q \geq 1$. \mathbb{R}^q kann durch

$$k: \begin{cases} \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_q) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_q, 0, \dots, 0) = k(x) \end{cases}$$

stetig und injektiv in den \mathbb{R}^p eingebettet werden und ist somit in einem Teilraum von \mathbb{R}^p , dessen Kodimension mindestens gleich eins ist, enthalten. Falls nun $f: O \rightarrow O'$ ein Homöomorphismus zwischen O und O' ist, so ist $k \circ f$ eine stetige und eineindeutige Abbildung von $O \subseteq \mathbb{R}^p$ nach $k(O') \subseteq \mathbb{R}^p$. Da aber $\emptyset \neq O = O^0$ und $k \circ f$ stetig-eindeutig ist, muß nach 4.14(1) $(k(O'))^0 = k(O') \neq \emptyset$ gelten. Andererseits gilt aber nach I 2.7(2), daß $k(O') = \emptyset$, da $k(O')$ in einer Hyperebene des \mathbb{R}^p enthalten ist. Somit ist die Behauptung von (5) für den Fall, daß wir uns auf $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q$ beschränken, bewiesen.

Gäbe es einen Homöomorphismus zwischen $O \subseteq Z^p$ und $O' \subseteq Z^q$, so unterscheiden wir zwei Fälle: erstens $O = Z^p$; zweitens $O \subset Z^p$.

Im ersten Fall gilt: Z^p ist homöomorph zur Oberfläche der Einheitskugel des \mathbb{R}^{p+1} , in welche wiederum in geeigneter Weise die Oberfläche der Einheitskugel des \mathbb{R}^{q+1} , die zu Z^q homöomorph ist, stetig und injektiv als echte Teilmenge eingebettet werden kann. Sei $k: Z^q \rightarrow Z^p$ diese Einbettung. Falls $f: O = Z^p \rightarrow O'$ der Homöomorphismus zwischen O und O' ist, so vermittelt $k \circ f$ eine stetige und injektive und somit nach (1) homöomorphe Abbildung zwischen $O = Z^p$ und $k(O') \subseteq Z^q \subset Z^p$. Dies widerspricht jedoch (4), daß Z^p zu keiner echten Teilmenge homöomorph sein kann.

Sei nun $O \subset Z^p$. Dann kann aber wiederum wie im Beweis von 4.13 $O \subseteq \mathbb{R}^p$ o.B.d.A. angenommen werden. Z^q ist homöomorph zur Oberfläche der Einheitskugel von \mathbb{R}^{q+1} und, da $q < p$, gilt: $q+1 \leq p$. Somit ist, wie oben, Z^q stetig und injektiv durch k in die Einheitssphäre des \mathbb{R}^p einbettbar. Diese ist aber als Rand der offenen Einheitskugel nirgendsdicht in \mathbb{R}^p (I 1.19(3)) und wiederum muß, wie gehabt, $\emptyset = k(O') \neq \emptyset$, Widerspruch!, gelten.

(6) Wäre $B^0 \neq \emptyset$, so würde der Homöomorphismus zwischen B und C , eingeschränkt auf B^0 , einen Homöomorphismus zwischen B^0 und C^0 vermitteln. Einen solchen kann es jedoch nach (5) nicht geben!

Es ist sehr wohl möglich, daß $C^0 \neq \emptyset$ (das Innere bzgl. \mathbb{R}^q gebildet!) ist. Z.B. ist $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}$ aus

$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ durch Translation erzeugbar. C besitzt jedoch als Teilmenge von \mathbb{R}^2 (die x_3 -Koordinate wird einfach weggelassen!) genommen innere Punkte.

4.16 Bemerkungen

- (1) Aufgrund des Homöomorphismus zwischen \mathbb{R}^p und einem beliebigen p -dimensionalen, normierten, linearen Raum E^p , $p \geq 1$, bzw. zwischen deren ALEXANDROFFSchen Einpunktkompaktifizierungen, übertragen sich die Aussagen von 4.14 nach E^p , E_w^p (I 1,12). Da die Aussagen von 4.15 aus 4.14 und Sätzen der allgemeinen Topologie folgen, übertragen sich auch alle Aussagen von 4.15 auf E^p , E_w^p .
- (2) Aus 4.15(4) folgt, daß S^{n-1} , die Einheitskugeloberfläche des \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, die zu Z^{n-1} homöomorph ist, zu keiner ihrer Teilmengen homöomorph sein kann, da ein Homöomorphismus zwischen S^{n-1} und $A \subset S^{n-1}$ sofort einen Homöomorphismus zwischen einer echten Teilmenge von Z^{n-1} und Z^{n-1} induzieren würde. Aus denselben Gründen kann keine topologische $(n-1)$ -Sphäre S^{n-1} zu einer *echten* Teilmenge $B \subset S^{n-1}$ homöomorph sein.
- (3) Aus 4.15(2) folgt, daß, falls $A, B \subseteq Z^p$ (\mathbb{R}^p) zueinander relativ homöomorph sind und $A^\circ = \emptyset$, auch $B^\circ = \emptyset$ gelten muß. Insbesondere folgt aus: A ist kompakt und nirgendsdicht ($\bar{A}^\circ = A^\circ = \emptyset$), daß B kompakt und nirgendsdicht ist.
- (4) Seien E^k, E^j , $k \neq j$, zwei k -, bzw. j -Elemente in Z^p (\mathbb{R}^p). Dann können E^k und E^j nicht zueinander homöomorph sein. Denn ein Homöomorphismus f zwischen ihnen würde sofort einen Homöomorphismus f' zwischen ihren Urbildzellen c^k und c^j , die ja in \mathbb{R}^p enthalten sind, induzieren. c^k und c^j sind jedoch zu regulären Intervallen des \mathbb{R}^k bzw. des \mathbb{R}^j isometrisch. f' würde somit einen Homöomorphismus zwischen dem Innern von c^k und c^j induzieren. Nach 4.15(5) ist dies jedoch wegen $k \neq j$ unmöglich.
- (5) Seien S^j, S^k , $k \neq j$, zwei topologische k - bzw. j -Sphären in Z^p (\mathbb{R}^p). Dann sind S^j und S^k nicht zueinander homöomorph, da S^j zu $'S^j$, S^k zu $'S^k$ homöomorph ist. $'S^j$ ist aber zu Z^j und $'S^k$ zu Z^k homöomorph. Ein Homöomorphismus zwischen S^k und S^j würde somit einen solchen zwischen Z^j und Z^k implizieren im Widerspruch zu 4.10.
- (6) Falls $E \neq \{0\}$, ein n -dimensionaler NLR über C bzw. E_w seine AEP ist, so ist E bzw. E_w gemäß I 2.15 bzw. I 3.13 zu \mathbb{R}^{2n} bzw. Z^{2n} homöomorph. Alle Sätze, die im vierten Abschnitt bewiesen wurden und deren Aussagen unter topologischen Abbildungen invariant sind, gelten somit auch für E , da $2n \geq 2$.

L I S T E D E R S Y M B O L E
=====

Die allgemein gebräuchlichen Symbole werden *nicht* aufgeführt!

<u>Mengenlehre</u>		<u>Gitter</u>	
$A \subset X$	1	G	56, 85
card A	1	G'_w	85
$A \cup B$	1	G_i	56
<u>Topologie</u>		G^*	107
X_w	37	$ G $	57, 85
X_w	37	$B_i, B_i(G)$	56
w	37, 85	B_i^*	107
\overline{A}_w	38	<u>Zellenkomponenten</u>	
A_w	43	P_i^k	57
Z^P	53, 85	Q, Q_i	57
<u>Zahlen</u>		$r(Q), r(Q_i)$	57
x_i	53	Q_i^j	68
α, β, γ	53	$+Q_i^j$	68
$o(\alpha)$	56	$-Q_i^j$	68
$n_i, n_i(G)$	56	$o(Q), o(Q_i)$	68
$\alpha_1, \alpha_k, \alpha_{n_i}$	56	$+Q_i^{\alpha}$	69
i	53	$-Q_i^{\alpha}$	69
k, j, n	53	$V_i, V(Q_i)$	67
<u>Prinzipale</u>		I_i	56
h	53, 54	$+I_i$	58
h_i^{α}	54	$-I_i$	59
$+h, +h_i^{\alpha}$	54	$+M_i, +M_i$	59
$-h, -h_i^{\alpha}$	54	$-M_i, -M_i$	59
r(h)	54	$Z, Z_i^j, Z_i(c)$	71
$b(h), b(h_i^{\alpha})$	54	Z_i^*	108
h_i^k	57	$K_i(c), V_i(c), V(Z_i(c))$	74
$o(h), o(h_i^k)$	57		

<u>Zellen</u>			
c	58, 71	$0 \cdot \tau^k = 0^k$	90
c^k	71	$n \cdot \tau^k$	90
$\ast c^k$	109	$\tau_1^k \subset \tau_2^k$	91
∂c^k	97	$\tau_1^k \subseteq \tau_2^k$	91
$x(c^k)$	79	$ \tau^k $	90
$I(c^k)$	79	$\partial \tau^k$	97
$R(c)$	78	$\partial(\tau_1^k + \tau_2^k)$	107
$D(c)$	78	$\ast \partial \tau^k = \partial \ast \tau^k$	112
$\text{Def}(c)$	78		
$\text{Reg}(c)$	78		
$c_1 = c_2$	58		
$c_1 \neq c_2$	58	<u>Zyklen</u>	
$x \in c$	58	$\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}^0$	101
$A \subseteq c$	58	$\mathbb{Z}^k \sim 0^k$	116
$c \subseteq A$	58	$\ast \tau^k$	117
$A \cap C \neq \emptyset$	58		
$\text{Ereg}(c)$	80		
$\text{Regu}(c)$	80	<u>k-Elemente, (topologische)</u>	
$-c_i^k$	81	<u>k-Sphären</u>	
$+c_i^k$	81	E^k	147
$-c_{m,i}^k$	81	S^k	147
$+c_{m,i}^k$	81	S^k	147
<u>Ketten</u>			
τ^k	89		
$\tau_1^k + \tau_2^k$	89		
$\ast \tau^k$	109		
$[\tau^k$	90		
$-\tau^k = \tau^k$	89		
$\sum_{j=1}^n \tau_j^k$	89		
0^k	89		
$\Omega^k, \Omega^k(G)$	79		

N A M E N S - U N D S A C H V E R Z E I C H N I S

=====

Es wurden nur die speziell für diese Arbeit entwickelten Begriffe aufgenommen!

A

"abgeschlossen"	9
ähnlich gelagert	2
Ähnlichkeitstransformation	2
äußerer ζ -Ring	18
ALEXANDERSches Lemma	131
ALEXANDROFF(sche)	
Einpunktkompaktifizierung (X_w)	37
Topologie (X_w)	37
algebraischer Rand (∂L^k)	97
Anfangspunkt	33
B	
BAIRE(scher)	
Dichtesatz	23
Kategoriesatz	18 ff
Raum	20
berandend	116
beschränkt	
k-Kette	90
nach oben (Zellenkomponente)	66
nach unten (Zellenkomponente)	66
Zelle	79
Beschränkungsprinzipal	66
Beschränkungsanzahl (obere, untere)	67
Bestimmungssachse	54
Bestimmungsindex	54
Bestimmungsmenge (B_i)	56
Bestimmungsprinzipal	54
Bestimmungsrichtung	54

Bestimmungszahl	54
obere -	67
untere -	67
Bogen	33

C

Charakteristische Menge ($+I_i, -I_i$)	59
--	----

D

defekt (teilweise, total)	78
Defektachse	78
Defektheitsgrad ($D(c)$)	78
Defektindex ($Def(c)$)	78
Defektkomponente	66
dicht	15
Dichtesatz (BAIREscher-)	23

E

echte Verfeinerung	107
Einheitssphäre	26
Einpunktkompaktifizierung (X_w)	37
(k-)Element (E^k)	147
Elementabbildung	147
endlicher Punkt	37
Endpunkt	33
Entregularisat ($Ereg(c)$)	80, 87
entregularisieren	80
erblicher ζ -Ring	18
erste Kategorie	17
erster Punkt	24
erzeugendes Gitter	85

F			
fett	17	kanonischer(er)	
Fundamentallemma	126	Isomorphismus	31
		Isonormismus	28
G		Kategorie	17
gelegen	91	Kategoriesatz	18 ff
getrennt	87, 131	Kette (k-Kette, τ^k)	89
Gitter (\mathbb{G})		Kompaktifizierung	37
in \mathbb{R}^p	56	Komplement einer k-Kette	
in \mathbb{Z}^p	85	(τ^k)	90
H		Komponente	
h, h_i^k	57	- einer k-Kette	95
Halbraum ($+h_i^d, -h_i^e$)	54	unbeschränkte -	154
homöoisnorm	30	Koordinate	
Homöoisnormismus	30	eines Punktes aus \mathbb{R}^p	53
homöomorph (relativ -)	2	einer Zelle	66
Homöomorphismus (Relativ-)	2	Koordinatenintervall	
I		($K_i(c)$)	67, 74
Indexmenge (I_i)	56	Koordinatenpunkt	79
innere Punkte (einer Zelle)	83	L	
Inneres (einer Zelle)	83	Lemma	
Invarianz		ALEXANDERSches -	131
der Dimensionszahl	168 f	Fundamentallemma	126
offener Mengen	6, 171 ff	letzter Punkt	24
des Randes	7, 172	M	
Isonormismus	28	mager	17
J		Modellintervall	79
JORDAN		N	
-abbildung	5	Nachfolger (unmittelbarer)	57
-bogen	33	negativer Halbraum ($-h_i^d$)	54
-menge	5	negative Zellenkomponente	
-scher Kurvensatz	162 ff	($-Q_i^j$)	68
K		nicht getrennt	131
k-		nullhomolog (Zyklus)	116
Element (E^k)	147	O	
Kette (τ^k)	89	obere (r)	
Sphäre (S^k)	147	Beschränkungsprinzipal	66
topologische τ (S^k)	147	Beschränkungsanzahl	67
Zelle (c^k)	78	Bestimmungsanzahl	67
Zyklus (τ^k)	101	Halbraum ($+h_i^d$)	54

O (Fortsetzung)			
obere(r) (Fortsetzung!)		relativ homöomorph	2
Randprinzipal	67	Relativhomöomorphismus	2
Zellenkomponente $(+Q_i^j)$	68	Richtungsindex $(r(h),$	
Oberfläche	26	$r(Q))$	54, 57, 69, 71
Oberprinzipal	67	S	
Öffnungspunkt	11	Satz	
Ordnungsindex $(o(\lambda), o(h),$		BAIREScher	
$o(Q))$	56, 57, 68, 71	Dichtesatz	23
P		Kategoriesatz	18 ff
positive(r)		Gittertrennungssatz	87
Halbraum $(+h_i^d)$	54	Invarianz offener Mengen	171 ff
Zellenkomponente $(+Q_i^j)$	68	JORDANScher Kurvensatz	162 ff
präkompakt	39	Kettenränderzyklensatz	102
Präzellen	85	$(k-)$ Sphäre (S^k)	147
Prinzipal (h, h_i^d, h_i^j)	54 ff	topologische - (S^k)	147, 163
Ober-	67	Sphärenabbildung	147
Unter -	67	Streckung	36
Prinzipalkomponente	66	Streckungsfaktor	36
Projektion	53	Summe (modulo 2) zweier	
Punkt		k -Ketten $(\tau_1^k + \tau_2^k)$	89
Anfangs-	33	T	
End-	33	Teilgitter (G_i)	56
endlicher -	37	Teilkette	89
erster -	24	teilweise	
letzter -	24	- defekt	78
uneigentlicher -	37	- regulär	78
punktierte Umgebung von w	37	Topologie	
R		ALEXANDROFFsche - (X_w)	37
Rand (algebraischer, $\partial \tau^k$)	97	topologische k -Sphäre	
Raum (BAIREScher -)	20	(S^k)	147, 163
rechtwinkliges Gitter (G)	56	total	
regulär	66	- defekt (Zelle)	78
teilweise - (Zelle)	78	- regulär (Zelle)	78
total - (Zelle)	78	Träger einer k -Kette (τ^k)	90
Regularisat $(\text{Reg}(c))$	80, 87	Trennung	
regularisieren	80	von Mengen durch ein Gitter	87
Regularitätsachse	78	von Punkten	131
Regularitätsgrad $(R(c))$	78		
Regularitätsindex $(\text{Reg}(c))$	78		

U		Z	
Umgebung		Zelle (c)	
punktierte - von w	37	in \mathbb{R}^p	58
unbeschränkt(e)		k-Zelle (c^k)	78
k-Kette	90	in \mathbb{Z}^p	85 f
Komponente	154	Zellenbaustein (P_i^k)	57
Zelle	79	zellenermöglichend	66
uneigentlicher Punkt	37	Zellenkomponente	
unendlicher Punkt	37	($Q_i, Z_i, Z_i(c)$)	57, 69, 71
unmittelbar		Zerlegungspunkt	10
Nachfolger	57	zerlegungspunktfrei	10
Vorgänger	56	zugeordnet	
untere (r)		Halbraum	54
Beschränkungsprinzipal	66	Zellenbaustein (P_i^k)	57
Beschränkungszahl	67	Zellenkomponente ($+Q_i^j$)	68
Bestimmungszahl	67	zusammenhängend (k-Kette)	95
Halbraum ($-h_i^d$)	54	zweite Kategorie	17
Randprinzipal	67	Zyklus (\mathcal{Z}^k)	101
Zellenkomponente ($-Q_i^j$)	68		
Untergitter	107		
V			
Variationsintervall			
($V_i, V(Q_i)$)	67		
Verbindungsstrecke (\overline{xy})	33		
Verfeinerung			
eines Gitters (\mathbb{G}^*)	107		
einer k-Kette ($*\mathcal{Z}^k$)	109		
Vorgänger (unmittelbarer)	56		
Vorzeichen (eines Halbraums)	54		
W			
w	37, 85		