

D E R

J O R D A N S C H E K U R V E N S A T Z

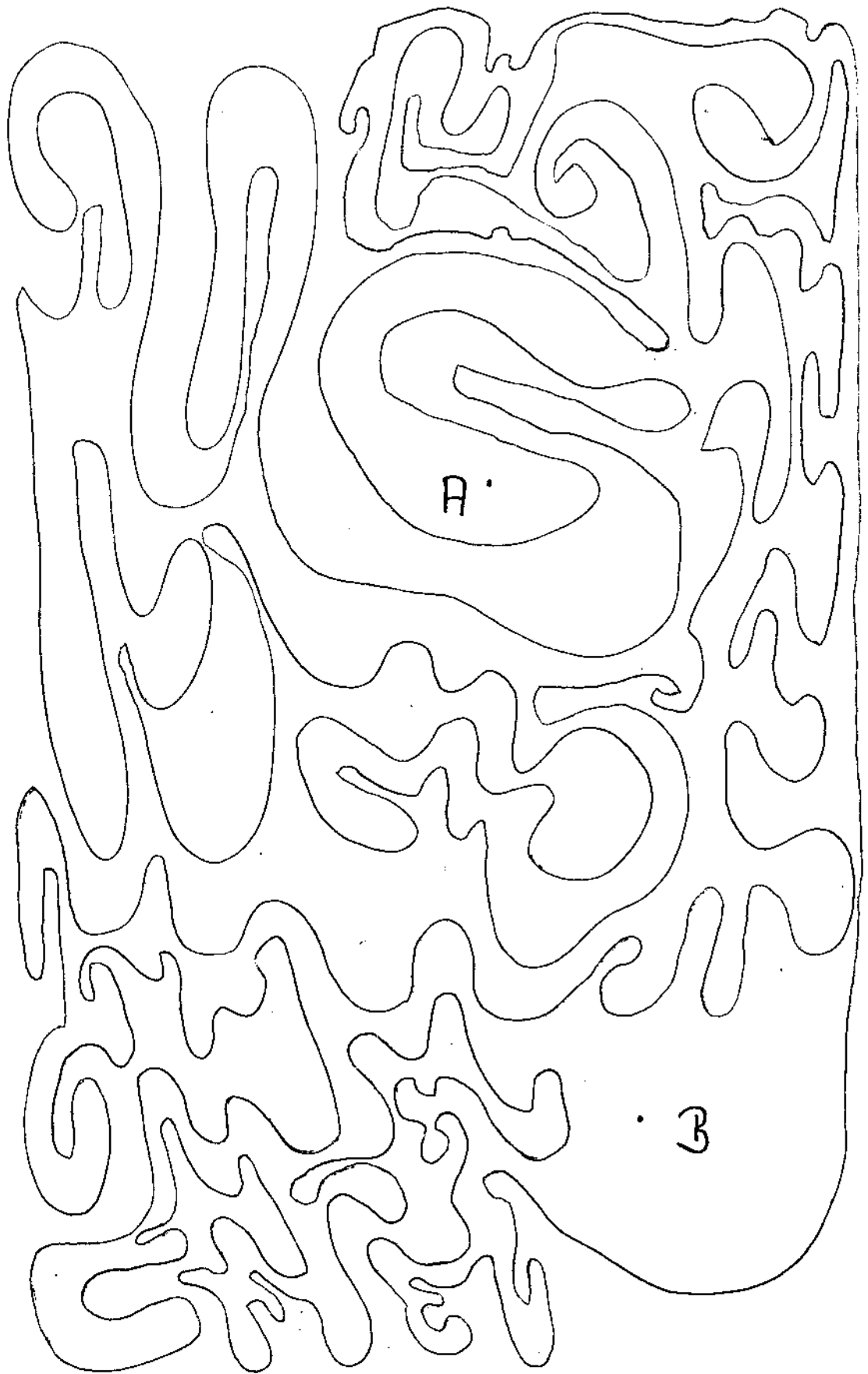
I M \mathbb{R}^P

Diplomarbeit

verfaßt

von

Rudolf Sauer



Liegen A und B im Außen- oder im
Innengebiet der Körner?

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

=====

Vorwort	I
Literatur	III
Überblick über die frühe Literatur zum JORDANSchen	
Kurvensatz	IV
Generelle Vorbemerkungen	1
I Vorbereitende Sätze	2
1. Vorbereitende Sätze aus der Topologie	2
2. Vorbereitende Sätze aus der Theorie der normierten linearen Räume	26
3. Einiges über die ALEXANDROFFsche Einpunkt- kompaktifizierung	37
II Homologie (modulo 2) in $\mathbb{Z}^{\mathbb{P}}$, der ALEXANDROFFschen Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^{\mathbb{P}}$	53
1. Gitter, Zellen, Ketten	53
2. Ränder, Zyklen	97
3. Verfeinerung von Gittern, Nullhomologe Zyklen, Fundamentallemma	107
4. Trennungssätze	131
Liste der Symbole	175
Namens- und Sachverzeichnis	177

V O R W O R T
=====

Als ich bei Professor Kuhn ein Thema für eine Diplomarbeit erfragte, schlug er mir vor, die seiner Ansicht nach äußerst knapp gehaltenen Ausführungen über den JORDANSchen Kurvensatz im \mathbb{R}^n , n eine natürliche Zahl größer oder gleich zwei, in dem Buch von M.H.A. NEWMAN "Elements Of The Topology Of Plane Sets Of Points", Cambridge University Press 1964, - besagte Ausführungen stehen auf den Seiten 128 bis 137 -, in eine besser lesbare Form zu bringen. Ich hoffe, dies ist mir hinreichend gelungen!

Ich möchte an dieser Stelle auf die Beweisskizze für den JORDANSchen Kurvensatz im \mathbb{R}^2 aufmerksam machen, welche Christian Pommerenke in seinem Buch "Univalent Functions", Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1975, auf den Seiten 31 bis 34 liefert. Unter Verwendung funktionentheoretischer Hilfsmittel wird eine Rohskizze für den Beweis des ebenen JORDANSchen Kurvensatzes geliefert. Da jedoch mindestens einmal unverhohlen an die Anschauung appelliert wird, (auf Seite 33, Teil (b) des Beweises von Theorem 1.10), ist der Beweisgang noch keineswegs völlig korrekt. - Es wäre jedoch der Mühe wert, sich zu überlegen, ob nicht doch die Möglichkeit besteht, unter Umständen auf dem von Herrn Pommerenke aufgezeigten Weg zu einem eventuell kürzeren rigorosen Beweis des ebenen Kurvensatzes, zu gelangen. Da jedoch Hilfsmittel aus der ebenen Funktionentheorie benutzt werden, ist es fraglich, ob der Pommerenkesche Weg, selbst wenn es gelänge, ihn in der Ebene zu einem einwandfreien Beweis des Kurvensatzes auszubauen, auch für größere Dimensionen als zwei gangbar ist. Zumindest dürfte die Übertragung in ungerade Dimensionen äußerst schwierig werden, da \mathbb{C}^n als Vektorraum über \mathbb{R} die Dimension $2n$, $2n$ gerade, besitzt.

Zum Schluß verbleibt mir noch die angenehme Pflicht, mich zu bedanken. Zunächst möchte ich mich bei Herrn Professor Kuhn für die Themenstellung der Diplomarbeit bedanken. Ferner gilt mein Dank den Herren Dipl.-Math. Hans-Dieter Wacker und Dr. Norbert Steinmetz für den Hinweis auf die Pommerenkeschen Ausführungen über den ebenen Kurvensatz.

Fräulein Luzia Kozulins hat dankenswerterweise die Illustration, die trefflich geeignet ist, die Verzwicktheit mancher JORDANKurven aufzuzeigen, angefertigt.

Last, but not least, gilt mein besonderer Dank Herrn Dr. Dieter Wrase. Als ein Einberufungsbefehl des Bundesamts für den Zivildienst meinen Studienabschluß gefährdete, riet er mir zu, diesen vor dem Verwaltungsgericht anzufechten. Ohne seinen ermutigenden Zuspruch hätte ich wohl nicht die Gelegenheit gehabt, mein Studium unbehindert abzuschließen! Darüberhinaus hat er stets mit großem Interesse die Entstehung dieser Arbeit verfolgt. Ich möchte sie ihm deshalb widmen!

Karlsruhe, den 4. April 1980

Rudolf Sauer.

L I T E R A T U R

= = = = =

- [1] Harald Kuhn: Einführung in die Topologie,
Vorlesungsskriptum, Karlsruhe 1973.
- [2] Harald Kuhn: Vorlesungsmanuskript über den JORDAN-
schen Kurvensatz (unveröffentlicht).
- [3] Willi Rinow: Lehrbuch der Topologie,
Berlin 1975.
- [4] Harro Heuser: Funktionalanalysis,
Stuttgart 1975.
- [5] John C. Oxtoby: Measure and Category,
New York, Heidelberg, Berlin 1971.
- [6] H. Schubert: Topologie,
Stuttgart 1971.
- [7] F. A. Valentine: Convex Sets,
New York 1964.

ÜBERBLICK ÜBER DIE FRÜHE LITERATUR ZUM JORDANSCHEN KURVENSATZ
 =====

Diese Aufstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit!

Erster Beweis des JORDANSchen Kurvensatzes:

- [1] O. Veblen: Trans. Amer. Math. Soc. vol. 6 (1905), p. 83.
 [2] O. Veblen: " " " " vol. 14 (1913), p. 65.

Erster Beweis des Kurvensatzes für den \mathbb{R}^n :

- [3] E. J. Brouwer: Mathematische Annalen, vol. 71 (1912), p. 134.
 [4] J. W. Alexander: Beweis des JORDANSchen Kurvensatzes,
 Annals of Mathematics, vol. 21 (1920), p. 180.
 [5] J. W. Alexander: A proof and extension of the JORDAN-
 BROUWER-Separation-Theorem,
 Trans. Amer. Math. Soc. vol. 23. (1922), p. 333;
 in dieser Arbeit steht auch der Alexandersche
 Dualitätssatz (Theorem Y auf Seite 343).
 [6] E. J. Brouwer: Mathematische Annalen, vol. 69 (1910), p. 169.

Jordans Beweisversuch des Kurvensatzes steht in:

C. Jordan: Cours d'Analyse, I, 2^{ème} éd., p. 91-99.

Beweise des JORDANSchen Kurvensatzes unter eingeschränkten
 Bedingungen wurden erbracht von:

- [7] L. D. Ames: Bulletin of the American Math. Soc. vol. 10
 (1910), p. 301.
 [8] G. A. Bliss: loc. cit. Ames ([7]), p. 398.
 [9] A. Schoenflies: Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der
 Wissenschaften, (1902), p. 185.
 Math. Annalen, vol. 58 (1903), p. 195.
 [10] H. Hahn: Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 19
 (1908), pp. 289 - 303.

In dieser Arbeit beweist Hahn den Kurvensatz für einfache
 Polygone und korrigiert dadurch den Fehler in Veblen [1].
 Ferner weist Hahn darauf hin, daß der Beweis von Theorem 28
 in Veblens Doktorarbeit (Trans. Amer. Math. Soc. vol. 5 (1904),
 p. 365) falsch ist; ebenso ist der Beweis von Theorem 9, p. 63
 in Veblen[1] falsch.

In Osgood, Funktionentheorie, Band 1 (erste Auflage) werden auf Seite 131 die Beweisversuche für den Kurvensatz, die dem JORDANSchen nachfolgen und dem Veblenschen in [1] vorausgehen, aufgezählt.

[11] N. J. Lennes: Amer. J. of Math. vol. 33 (1911), pp. 37-62.

Die folgenden Arbeiten betreffen die Invarianz der Dimensionszahl des Gebietes:

[12] L. E. J. Brouwer: Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Anal. vol. 71 (1912), p. 305.

[13] H. Lebesgue: Math. Ann. 70, p. 166 - 168.

[14] H. Lebesgue: Sur l'invariance du nombre des dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées.
Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, vol. 152, (1911), p. 841 - 843.

[15] L.E.J. Brouwer: Math. Ann. 70, p. 161 - 165.

In [2], p. 69 wird die Addition modulo 2 eingeführt.

In Brouwer [6] wird das Gebiet genauso definiert, wie es heute noch üblich ist. Jordan arbeitet in seinem Beweis des Kurvensatzes mit gegen die Kurve konvergierenden Polygonfolgen.

In allen Brouwer [6] bekannten und bis Veblen [1] veröffentlichten Beweisen, soweit sie sich nicht auf Sonderfälle beschränken oder falsch sind, wird dieses Verfahren beibehalten. Erst von Veblen [1] wurde ein Beweis gegeben, der die Kurve, statt sie als Limes von Polygonen aufzufassen, gleich selbst in Betracht zieht und mittels ihrer inneren Eigenschaften zum Resultat gelangt.

Schoenflies beschreibt in [9] die Erreichbarkeit. Brouwer geht in dem Artikel: Über JORDANSche Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. vol. 71 (1912), p. 320 weiter auf die Erreichbarkeit ein und zeigt, daß die Schoenfliessche Erweiterung des JORDANSchen Satzes auch im n-dimensionalen Raum in Kraft bleibt. Er gibt jedoch in dieser Arbeit auf Seite 321 ein Gegenbeispiel für den \mathbb{R}^3 , daß die in der Ebene bestehende Umkehrbarkeit der Schoenfliesschen Erweiterung nicht mehr gilt.

Schoenflies versuchte in den Göttinger Nachrichten (1896) auf den Seiten 79 bis 85 einen Beweis für den Kurvensatz zu erbringen.

Auszug aus dem Gutachten über die
Diplomarbeit von Herrn Rudolf Sauer

Thema: Der Jordansche Kurvensatz im \mathbb{R}^p

In seinem Buch "Elements of the Topology of Plane Sets of Points", Cambridge University Press 1964, gibt M.H.A. Newman mit Hilfe algebraischer Methoden einen Beweis des Jordanschen Kurvensatzes im \mathbb{R}^2 . Es wird erwähnt, daß sich der Kurvensatz mit denselben Methoden auch im \mathbb{R}^p , $p > 2$, beweisen läßt. Da die diesbezüglichen Angaben bei Newman nur skizzenhaft sind, erschien es mir sinnvoll, eine genaue Ausführung des Beweises als Diplomarbeit zu vergeben. Mit dieser Aufgabe habe ich Herrn Sauer betraut.

Herr Sauer unterteilt seine Arbeit in zwei Kapitel.

Kap. I besteht aus Vorbereitungen mengentopologischer und funktionalanalytischer Natur und befaßt sich insbesondere mit der Alexandroffschen Einpunkt-kompaktifizierung.

In Kap. II führt Herr Sauer - O. Veblen folgend - die Homologie Modulo 2 auf einem Gitter des \mathbb{R}^p ein, definiert Zellen (hier Punkte, Strecken, Rechtecke, ...), faßt diese zu Ketten zusammen und macht die Menge der Ketten durch eine geeignete Addition zu einer Gruppe. Nach Einführung weiterer Begriffe wie Rand, Zykel, Verfeinerung von Gittern kommt er zum **F u n d a m e n t a l l e m m a**, welches besagt, daß jeder k -Zykel Rand einer $(k+1)$ -Kette ist ($k < p$). Nun kann er das zweidimensionale "Alexandersche Lemma" und damit auch den Beweis des Kurvensatzes in den \mathbb{R}^p übertragen.

An den Anfang seiner Arbeit stellt Herr Sauer eine kurze Literaturübersicht, welche den Werdegang des Jordanschen Kurvensatzes beleuchtet. Er macht darauf aufmerksam, daß erst durch Veblen 1913 die Addition Mod 2 eingeführt und die Kurve **s e l b s t** mit ihren inneren Eigenschaften in Betracht gezogen wurde - vorher hat man die Kurve stets als Limes einer konvergenten Polygonfolge aufgefaßt, was fast zwangsläufig zu falschen Beweisen führen mußte. Den Erhard Schmidtschen Beweis zitiert Herr Sauer nicht. Dafür erwähnt er einen kurzen Beweis von Ch. Pommerenke in dessen Buch "Univalent Functions". Dieser Beweis

*Erhard Schmidt: über den Beweis des Jordanschen Kurvensatzes
Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (1921), 369
-2-*

ist nicht korrekt, weil er sich an entscheidender Stelle auf die Anschauung beruft; und wenn er korrekt wäre, ließe er sich wohl nicht ins mehrdimensionale übertragen, da er funktionentheoretische Hilfsmittel benützt.

Die Schwierigkeiten, welche sich einstellen, wenn man den Jordanschen Satz in den \mathbb{R}^p ($p > 2$) übertragen will, sind durchaus prinzipieller Art und entsprechen den in der Analysis zu beobachtenden Schwierigkeiten beim Übergang vom zwei- zum dreidimensionalen. Wo z.B. beim Fundamentallemma die Anschauung als legales Beweismittel noch akzeptabel ist, muß im mehrdimensionalen streng analytisch argumentiert werden.

Herr Sauer hat eine bemerkenswerte Arbeit geliefert. Aus ihr sprechen einerseits seine ihm eigene Gründlichkeit, andererseits seine Fantasie. Die Darstellung ist sauber bis ins kleinste Detail und die großen Zusammenhänge sind stets deutlich. Der gelungene Aufbau des Kalküls in Kap. II zeugt von mathematischem Fingerspitzengefühl und von Befähigung zu selbständigem Arbeiten. Mag sein, daß das vorbereitende Kap. I etwas zu ausladend ausgefallen ist; die Arbeit als ganzes übertrifft jedoch meine Erwartungen.

Die Arbeit von Herrn Sauer wurde mit der Note 1,0 = sehr gut bewertet.

H. Kuhn

Dr. M. H. A. Newman: Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge University Press 1964

Exercise 1. If F is the union of an infinity of simple arcs in X^1 with a common end-point but otherwise non-intersecting, $\mathcal{G}F$ is connected. [If x and y are separated by F , cut off the part of F near the common end-point, a , by a point near a in each of the arcs, and apply 16-2.]

2. Let x and y be points of Z^1 , F_1 a continuum, and F_2 any closed set such that no set $F_1 \cup C$ separates x and y , if C is a component of F_2 . Then $F_1 \cup F_2$ does not separate x and y . [Neither F_1 , nor (by 14-3) F_2 alone separates x and y . Let $(x) + (y)$ bound κ_i in $\mathcal{G}F_1$. By 9-4-1 $\kappa_1 + \kappa_2 \sim 0$ in $Z^1 - F_1 \cup C$.]

3. Deduce 16-2 from Exercise 2. [Since each component of F_2 meets at most one of F_1 , each component of $F_1 \cup F_2$ is either a component of F_2 , or the union of a component of F_1 and the components of F_2 that meet it. Use Example 1, p. 83.]

§ 5. EXTENSION TO SETS OF POINTS IN Z^p AND R^p

The arguments of §§ 1-4 (unlike those that will be used in Chapters VI and VII) are not essentially 2-dimensional in character, and it will now be shown how a large part of the theory of these sections may be extended to p -dimensional space. The definitions and properties of gratings and cells require more formal treatment, since they can no longer be seen by the inspection of two or three possible cases in a diagram, but the rest of the theory is little altered.

The results of this section are not used in the rest of the book.

17. The inductive proof of the "fundamental lemma" (5-1) started in two dimensions from a grating consisting of a single square, but in p dimensions the analogous "cube" is already too complicated a figure to form a convenient starting-point. We therefore use a grating consisting of *complete* linear $(p-1)$ -spaces, and not merely the parts cut off in a "cube". A typical grating of the new kind in two dimensions is illustrated in Fig. 41.

We first define gratings in the open space R^p .

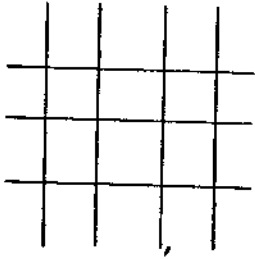


Fig. 41

The name *principal* is used for a set of points determined by one equation $\xi_r = \alpha$. A finite set of principals in R^p is a *rectangular grating*, G , if it contains at least one principal $\{\xi_r = \alpha_r\}$ for each $r = 1, 2, 3, \dots, p$. We suppose the principals numbered in any way as $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$.

Any principal $\xi_r = \alpha$ determines three closed convex sets, namely the principal itself, and the two *closed half-spaces* $\xi_r \leq \alpha$ and $\xi_r \geq \alpha$. If for each principal π_i of G , one of these three sets is chosen and called P_i , the common part

$$P_1 P_2 \dots P_m$$

is called a *cell*, and it is a k -cell if just $p-k$ of the P_i are *not null*, is called a *cell*, and it is a k -cell if just $p-k$ of the P_i are principals. Since the P_i are closed convex sets all cells are closed and convex; and since every point of R^p belongs, for each i , to at least one closed half-space determined by π_i , the union of the p -cells is R^p .

It will be noticed that in a product $P_1 P_2 \dots P_m$ there are in general superfluous factors. For example, if P_1 is $\xi_1 = 1$ and P_2 is $\xi_1 \leq 2$, then whatever P_3, \dots, P_m may be,

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_m = P_1 P_3 \dots P_m.$$

The formal treatment is, however, greatly simplified by retaining these superfluous factors, so that in the product defining any cell there appears just one factor corresponding to each principal of the grating.

A cell is determined by m equations and inequalities, each restricting only one coordinate, and is therefore the set formed by letting each coordinate range independently through a certain set of values. If the defining relations include $\xi_r \leq \alpha$ they do not include $\xi_r = \alpha$ or $\xi_r \geq \alpha$, since there is only one "factor" for each principal of G . The range of values of ξ_r cannot therefore in this case reduce to α , and hence includes at least one value in $\xi_r < \alpha$. In particular, in a p -cell, where all the factors of the defining "product"† are closed half-spaces, the "product" of the corresponding *open* half-spaces—an open set contained in the cell—is not null, and the p -cell itself is the closure of this open set. It follows that, for $k > 0$, a k -cell is the closure of an open set in some $[k]$, and that a 0-cell is a point.

† The intersection or \sim -product.

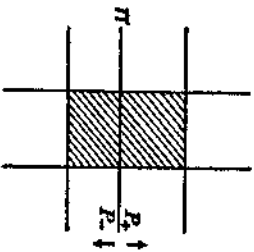
The following are simple consequences of the definitions.

(A) The only cells containing a cell $P_1 P_2 \dots P_m$ are those obtained by replacing certain P_i which are principals by corresponding closed half-spaces. For in any other change at least one half-space $\xi_i, \leq \alpha$ is replaced by $\xi_i, \geq \alpha$ or $\xi_i, = \alpha$. In either case the set no longer contains a point of $\xi_i, < \alpha$ and therefore by the last paragraph, does not contain the given cell.

In particular, the specification of a cell in the form $P_1 P_2 \dots P_m$ is unique.

(B) The only cells contained in $P_1 P_2 \dots P_m$ are those obtained by replacing half-spaces by the corresponding principals.

(C) If the k -cell A^k is contained in the principal π there are just two $(k+1)$ -cells that contain A^k but are not contained in π . The cell A^k is of the form πX , where X is a certain "product". The only $(k+1)$ -cells containing A^k are those whose specification is obtained by changing just one factor of πX from a principal to a half-space. If the factor π is not changed the resulting set is in π . Therefore the only cells of the required type are $P_+ X$ and $P_- X$, where P_+ and P_- are the closed half-spaces determined by π . These cells are different from each other, since, as we have seen, they contain points on different sides of π .



In particular, every $(p-1)$ -cell is contained in just two p -cells.

Gratings in Z^p . A rectangular grating in Z^p is, by definition, a rectangular grating in the subspace R^p . The k -cells are for $k > 0$ the closures in Z^p of the k -cells in R^p . The 0-cells are the finite 0-cells of the R^p -grating and w , the point at infinity. The symbol $P_1 P_2 \dots P_m$ may still be used to denote any cell except w , and on this understanding (A), (B) and (C) remain true, except that w belongs to all infinite† cells and no finite ones. We now confine ourselves to gratings in Z^p .

18. A k -chain on a grating G is any set of k -cells of G . The sum $C_1^k + C_2^k$ of the chains C_1^k and C_2^k is the set of k -cells belonging

† See footnote, p 101.

to one but not both of them. This addition is associative and commutative. Q^p denotes the set of all p -cells, and

$$\mathcal{G}C^p = Q^p + C^p.$$

The boundary, A^k , of a k -cell A^k ($1 \leq k \leq p$) is the set of $(k-1)$ -cells contained in it, and C^k is the sum of the boundaries of the k -cells of C^k . It follows immediately that $(C_1^k + C_2^k)^* = C_1^{k-1} + C_2^{k-1}$. A k -cycle is, if $k > 0$, a k -chain with zero boundary, and, if $k = 0$, an even number of vertices (0-cells). The sum of any set of k -cycles is evidently a k -cycle.

Theorem 18-1. If $k > 0$, C^k is a $(k-1)$ -cycle.

It is evidently sufficient to prove the theorem when C^k contains only one cell.

(i) Let $k = 1$. From the condition that the grating contains at least one principal parallel to $[\xi_r, = 0]$, for each r , it follows that every 1-cell contains two vertices (one of which may be w).†

(ii) Suppose $k > 1$. It follows from remark (B) that if

$$A^{k-2} \subseteq A^k,$$

then $A^{k-2} = \pi_1 \pi_2 X$ and $A^k = Q_1 Q_2 X$, where π_1 and Q_1 are corresponding principal and half-space. The only $(k-1)$ -cells containing $\pi_1 \pi_2 X$ and contained in $Q_1 Q_2 X$ are $\pi_1 Q_2 X$ and $\pi_2 Q_1 X$. Thus every $(k-2)$ -cell of A^k is contained in just two $(k-1)$ -cells of A^k , which is therefore a cycle.

The locus $|C^k|$ of C^k is the union of its k -cells. C^k is connected if $|C^k|$ is connected, and the components of any chain C^k are the subchains whose loci are the components of $|C^k|$. Theorems 3-1 and 3-2, and the analogue of 3-3 ($\mathcal{G}|C^p| = C^p$) remain true, and are similarly proved.

A grating G^* in Z^p is a refinement of a grating G if every principal of G^* is a principal of G . Clearly any two gratings have a common refinement. Suppose that $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ are the principals of G , and that G^* is formed by adding a single new principal π_{m+1} with half-spaces Q_{m+1}^+ and Q_{m+1}^- . The cells of G^* (other than

† This case of 18-1 fails for chains on a grating in R^p , and with it the important theorem that if $C^1 = (x) + (y)$, x and y are connected in the locus of C^1 .

w) are the non-null sets whose product symbols are obtained by appending an extra factor π_{m+1} , Q_{m+1}^+ or Q_{m+1}^- to the symbol of a cell of G , and may accordingly be denoted by $A^k\pi_{m+1}$, $A^kQ_{m+1}^+$ or $A^kQ_{m+1}^-$. Two of these products may be empty, and the third is then A^k itself. Thus each A^k of G is represented on G^* by a k -chain A_k^* consisting either of A^k itself or of the two k -cells $A^kQ_{m+1}^+$ and $A^kQ_{m+1}^-$. We may write symbolically (in either case) $A_k^* = A^k(Q_{m+1}^+ + Q_{m+1}^-)$. It follows that each k -chain C^k on G is represented by a subdivided chain C_k^* , the sum of the subdivided cells of C^k and therefore given symbolically by $C^k(Q_{m+1}^+ + Q_{m+1}^-)$. Clearly $|C_k^*| = |C^k|$, and for any two chains,

$$(C_1^k + C_2^k)^* = C_1^k + C_2^k.$$

If $k > 0$ a $(k-1)$ -cell of $A^kQ_{m+1}^+$ is, by (B), to be found by substituting a principal for a half-space factor, which may be either a factor of A^k or Q_{m+1}^+ itself.

Hence

$$(A^kQ_{m+1}^+)^* = A^kQ_{m+1}^+ + A^k\pi_{m+1},$$

and similarly,

$$(A^kQ_{m+1}^-)^* = A^kQ_{m+1}^- + A^k\pi_{m+1}.$$

Hence, adding

$$(A_k^*)^* = (A^kQ_{m+1}^+)^* + (A^kQ_{m+1}^-)^* = A^k(Q_{m+1}^+ + Q_{m+1}^-) = (A^k)^*.$$

By summation we find $(C_k^*)^* = (\hat{C}^k)^*$. The results thus established for a refinement by adjunction of a single principal may evidently be extended step by step to any refinement, and we have therefore proved

(D) If G^* is a refinement of G , there corresponds to each k -chain C^k on G a subdivided chain C_k^* , such that $|C_k^*| = |C^k|$, $(C_1^k + C_2^k)^* = C_1^k + C_2^k$, and (if $k > 0$) $(C_k^*)^* = (\hat{C}^k)^*$. This justifies the introduction of the convention of para. 6, by which the subdivided chain C_k^* on G^* is denoted by the same symbol C^k as its original on G .

The definitions of " $\Gamma^k \sim 0$ in G " and " $\Gamma_1^k \sim \Gamma_2^k$ in G " are the same as for the 2-dimensional case and Theorem 6-1 and its corollary still hold, and are similarly proved.

19. The following slightly stronger form of the 2-dimensional "Fundamental Lemma" is required (the only substantially new argument in this section).

Theorem 19-1. Let Γ^k be a k -cycle on a grating in Z^p , and let a be a point not on Γ^k . If $0 \leq k \leq p-1$, $\Gamma^k \sim 0$ in $Z^p - (a)$.

We may suppose $k > 0$, since the result is obvious if $k = 0$. It may also be assumed (by a preliminary refinement of the grating, G_1 , if necessary) that a is a vertex. The proof is by induction on the number of principals of G_1 , and is trivial if G_1 is a grating G_0 of the simplest type, with one principal in each allowed direction; for G_0 has only two vertices, which belong to every cell, and hence $a \in |\Gamma^k|$ or $\Gamma^k = 0$.

Suppose then that the omission of a principal π of G_1 gives a grating G_0 (itself a refinement of G_0) for which the theorem is known to be true. Let Q_+ , Q_- be the closed half-planes determined by π . If a is a finite point, not in π , let Q be that one of Q_+ , Q_- that does not contain a . If $a \in \pi$ or $a = w$, let Q be one of Q_+ , Q_- containing a principal of G_0 parallel to π .

Each k -cell of Γ^k in π belongs to just one $(k+1)$ -cell in Q , and therefore if C^{k+1} is the sum of all such $(k+1)$ -cells, for all k -cells of Γ^k in π , $\Gamma^k + \hat{C}^{k+1}$ is a k -cycle having no k -cell in π . It follows that it is the subdivided form on G_1 of a k -cycle Γ_0^k on G_0 . For it could only fail to be so by containing one, but not both, of the halves A^kQ_+ and A^kQ_- of a k -cell on G_0 . Since these are the only k -cells in G_1 that contain $A^k\pi$ but do not lie in π , it would follow that the $(k-1)$ -cell $A^{k-1}\pi$ belongs to only one k -cell of $\Gamma^k + \hat{C}^{k+1}$, which is impossible since this chain is a cycle. C^{k+1} does not contain a . For if a is finite and not in π , it is not in Q ; if $a = w$, all cells of C^{k+1} are finite; if $a \in \pi$ it is not in C^{k+1} , since

$$|C^{k+1}| \pi \subseteq |\Gamma^k|.$$

Thus Γ_0^k is a k -cycle on G_0 , not containing a , and so, by the inductive hypothesis, bounds a chain C_0^k not containing a . Hence, on G_1 ,

$$(C_0^k + C^{k+1})^* = \hat{C}^{k+1} + (\hat{C}^{k+1} + \Gamma^k) = \Gamma^k.$$

If $k = p-1$, $C^p + C_0^p$ and its complementary chain are the only chains bounded by Γ^{p-1} (cf. p. 107).

20. Theorem 20.1 (Alexander's Lemma). Let F_1 and F_2 be closed sets in Z^p , and Γ^k a k -cycle, $(0 \leq k \leq p-2)$, which, for $i = 1, 2$, bounds a chain C_i^{k+1} in $Z^p - F_i$. Then if $C_1^{k+1} + C_2^{k+1} \sim 0$ in $\mathcal{C}(F_1, F_2)$, $\Gamma^k \sim 0$ in $\mathcal{C}(F_1 \cup F_2)$.

Let C^{k+2} be a $(k+2)$ -chain in $\mathcal{C}(F_1, F_2)$, on a grating G , bounded by $C_1^{k+1} + C_2^{k+1}$. The closed sets $|C^{k+2}| F_1$ and $|C^{k+2}| F_2$ do not meet, and therefore a refinement, G^* , of G exists, no cell of which meets both these sets. If C_0^{k+2} is the set of $(k+2)$ -cells of G^* that lie in C^{k+2} and meet F_2 , it follows, just as in the 2-dimensional case, that the chain

$$C_0^{k+2} + C_1^{k+1},$$

whose boundary is Γ^k , meets neither F_1 nor F_2 .

21. A set of points in Z^p which is the homeomorph of a bounded j -cell is called a j -element, and denoted by J^j . Since every bounded j -cell can be mapped topologically on to the set

$$\sum_1^{j+1} \xi_i^2 \leq 1$$

in R^j (Example 4, p. 62), all j -cells are homeomorphic. The homeomorph of the unit j -sphere

$$\sum_1^{j+1} \xi_i^2 = 1 \quad \text{in } R^{j+1} \quad (j \geq 0)$$

is called a *topological j -sphere*, and denoted by J^j .

Theorem 21.1. If E^j is a j -element in Z^p ($0 \leq j \leq p$), every k -cycle in $\mathcal{C}E^j$ bounds in $\mathcal{C}E^j$.

The proof is by induction on j . There is only one non-null p -cycle in Z^p , namely Ω^p , and therefore there is none in $\mathcal{C}E^j$; the highest possible value for k is $p-1$. If $j = 0$, E^0 is a point, and by 19.1 cannot prevent Γ^k from bounding.

Suppose, then, that the theorem is proved for elements of less than j dimensions, for all k less than p , but that Γ^k is a non-bounding cycle in $\mathcal{C}E^j$. Then k cannot be $p-1$, for the continuum E^j cannot meet both the p -chains bounded by Γ^{p-1} without meeting Γ^{p-1} .

Let A^j be the pattern cell of E^j and f a topological mapping of

A^j on to E^j . A^j can be cut into two equal j -cells, A_1^j and A_2^j , with a common $(j-1)$ -cell A^{j-1} . The sets

$$E_1^j = f(A_1^j) \quad \text{and} \quad E_2^j = f(A_2^j)$$

are j -elements whose union is E^j and whose common part is the $(j-1)$ -element $f(A^{j-1})$. If $\Gamma^k \sim 0$ both in $\mathcal{C}E_1^j$ and in $\mathcal{C}E_2^j$ —say $(j-1)$ -element $f(A^{j-1})$ —the cycle $C_1^{k+1} + C_2^{k+1}$ bounds in $Z^p - f(A^{j-1})$, bounds C_1^{k+1} in $\mathcal{C}E_1^j$ —the cycle $C_1^{k+1} + C_2^{k+1}$ bounds in $Z^p - f(A^{j-1})$, by the inductive hypothesis, and therefore, by Alexander's Lemma, Γ^k bounds in $\mathcal{C}(E_1^j \cup E_2^j)$, i.e. in $\mathcal{C}E^j$, contrary to the assumption. Hence at least one of the halves E_1^j prevents Γ^k from bounding.

The bisection argument used in 10.1 and again in 12.2 can now be applied to show that there is a point a such that each of a sequence of sets closing down on a prevents Γ^k from bounding. This is impossible, for there is a chain C^{k+1} in $Z^p - (a)$ bounded by Γ^k , and a small enough neighbourhood of a does not meet C^{k+1} . We have thus reached a contradiction.

Theorem 21.2. If J^j is a topological j -sphere in Z^p , then

- (1) if $k \neq p-j-1$ every k -cycle in $\mathcal{C}J^j$ bounds in $\mathcal{C}J^j$;
- (2) there exists a non-bounding cycle Γ^{p-1-1} in $\mathcal{C}J^j$;
- (3) if Γ_1^{p-1-1} and Γ_2^{p-1-1} are non-bounding in $\mathcal{C}J^j$ their sum bounds in $\mathcal{C}J^j$. (19)

The case $j = p-1$ of this theorem contains the direct generalisation of the classical Jordan's Theorem, namely a topological $(p-1)$ -sphere determines two domains in Z^p , for (2) asserts the existence of a non-bounding 0-cycle, of which two points must belong to different residual domains, and by (3), if J^{p-1} separates x from y and y from z , it does not separate x from z , i.e. there are at most two domains. An example of the many other results contained in the theorem is: in the residual set of a simple closed curve in Z^3 there is at least one non-bounding 1-cycle.

The proof is by induction on j . If $j = 0$, then the "sphere" J^j is a pair of points, a and b . (1) follows from 19.1 and 20.1, with $F_1 = a$, $F_2 = b$; (2) states that any pair of points prevents some $(p-1)$ -cycle from bounding—the boundary of any sufficiently small p -cell with centre one of the points is such a $(p-1)$ -cycle; and (3) is the Theorem 6.4, for $(p-1)$ -cycles in Z^p ,

proved exactly as on p. 109. Suppose then that the theorem is completely proved for "spheres" of less than j dimensions. The unit j -sphere in R^{j+1} , of which J^j is the j -image, is the union of two "hemispheres" lying in $\xi_1 \geq 0$ and $\xi_1 \leq 0$, whose common part is the $(j-1)$ -sphere

$$\sum_{j-1}^j \xi_i^2 = 1, \quad \xi_1 = 0.$$

Thus J^j is the union of two j -elements, E_1^j and E_2^j , whose common part is a topological $(j-1)$ -sphere, J^{j-1} .

(1) Let Γ^k be a k -cycle in $\mathcal{G}J^j$, and C_k^{j+1} and C_k^{j+1} the $(k+1)$ -chains in $\mathcal{E}E_1^j$ and $\mathcal{E}E_2^j$, bounded by Γ^k , whose existence was proved in 21.1. Since $k+1 \neq p-(j-1)-1$, the cycle $C_k^{j+1} + C_k^{j+1}$ bounds in $\mathcal{G}J^{j-1}$, by the inductive hypothesis. Therefore, by Alexander's Lemma, Γ^k bounds in $\mathcal{G}J^j$.

We next prove (3). Let C_{i-1}^{j-1} and C_{i-1}^{j-1} be, for $i = 1, 2, \dots, (p-j)$ -chains in $\mathcal{E}E_1^j$ and $\mathcal{E}E_2^j$ respectively, bounded by Γ_{i-1}^{j-1} . Then $C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j-1}$ does not bound in $\mathcal{G}J^{j-1}$, for if it did Γ_{i-1}^{j-1} would bound in $\mathcal{G}J^j$ (by Alexander's Lemma), contrary to hypothesis. Therefore, by the inductive hypothesis, the sum

$$(C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j-1}) + (C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j-1}) \sim 0$$

in $\mathcal{G}J^{j-1}$. But this expression is also the sum of $(C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j-1})$ and $(C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j-1})$, which are chains, bounded by $\Gamma_{i-1}^{j-1} + \Gamma_{i-1}^{j-1}$, in $\mathcal{E}E_1^j$ and $\mathcal{E}E_2^j$ respectively. Hence, by Alexander's Lemma, $\Gamma_{i-1}^{j-1} + \Gamma_{i-1}^{j-1} \sim 0$ in $\mathcal{G}J^j$.

(2) By the inductive hypothesis there exists a non-bounding cycle Γ^{p-j} in $\mathcal{G}J^{j-1}$. The two closed sets $E_1^j | \Gamma^{p-j}$ and $E_2^j | \Gamma^{p-j}$ do not meet, and there is therefore a refinement, G^* , of the grating of which no cell meets both sets. Let C^{p-j} be the sum of the cells of Γ^{p-j} , considered as a chain on G^* , that meet E_2^j . Then C^{p-j} is a non-bounding cycle in $\mathcal{G}J^j$. For if it bounds C_0^{p-j} in $\mathcal{G}J^j$, the cycle $C^{p-j} + C_0^{p-j}$ does not meet E_1^j and therefore bounds in $\mathcal{E}E_1^j$, a fortiori in $\mathcal{G}J^{j-1}$; and $C_0^{p-j} + (\Gamma^{p-j} + \Gamma^{p-j})$ does not meet E_2^j and therefore bounds in $\mathcal{E}E_2^j$, a fortiori in $\mathcal{G}J^{j-1}$. Hence the sum of these cycles, namely Γ^{p-j} , bounds in $\mathcal{G}J^{j-1}$, contrary to hypothesis.

This completes the proof of the whole theorem.

One part of the original Jordan's Theorem is not contained in 21.2, namely that J^{p-1} is the frontier of both its residual domains. This may be proved by the methods of part III of Jordan's Theorem in R^2 , or as follows. Let a be any point of the unit $(p-1)$ -sphere in R^p , and let the points within a small $(p-1)$ -sphere with centre a be removed from the unit $(p-1)$ -sphere. What remains is a $(p-1)$ -element, whose f -image is a $(p-1)$ -element, E^{p-1} , contained in J^{p-1} and containing all points of it save those in a small neighbourhood of $b = f(a)$. Two points, x and y , that are separated by J^{p-1} bound a 1-chain C^1 in $\mathcal{E}E^{p-1}$, but they are not connected in $\mathcal{G}J^{p-1}$ and therefore C^1 meets $J^{p-1} - E^{p-1}$. By a lemma proved in the next chapter,† C^1 contains a simple arc with end-points x and y . The first point of J^{p-1} from x on this arc is a point of closure of the x -domain, and the first from y is a point of closure of the y -domain. Thus an arbitrarily small neighbourhood of b contains points of both domains, and therefore b belongs to the frontiers of both.

From 21.2 there follow, just as in §3:

Theorem 21.3. (Invariance of dimension number (Brouwer).) R^p cannot be mapped topologically on to R^q unless $p = q$.

Theorem 21.4. (Invariance of open sets (Brouwer).) If an open set in R^p is mapped (1, 1) continuously on to the set E in R^p , E is an open set, and the mapping is a homeomorphism.

The proofs need only trivial modifications.

Theorem 9.2 fails if $p > 2$, but a special case of Alexander's Lemma is still that if F_1 and F_2 are non-intersecting closed sets in R^p or R^p , and if x and y are connected in $\mathcal{E}F_1$ and $\mathcal{E}F_2$, then they are connected in $\mathcal{E}(F_1 \cup F_2)$. The proofs of the theorems in para. 14 are therefore valid in p dimensions without even verbal alterations.

A "stronger form" of Alexander's Lemma, analogous to 16.1, cannot be proved, or indeed even stated, for general values of k without introducing ideas which are beyond the scope of this book. Only the case $k = p-2$ goes through just as before, but the corollaries do not follow from this case; and indeed 16.2 and its corollary are not true in R^p if $p \geq 3$.

† VI. para. 1.

Generelle Vorbemerkungen

$A \subset X$ bedeutet: A ist Teilmenge von X ($A \subseteq X$), aber es existiert *mindestens* ein y aus X , welches nicht in A enthalten ist!

$\text{card } A$ bezeichnet die Kardinalzahl (Mächtigkeit) von A .

$A \dot{\cup} B$ bedeutet, daß A und B leeren Durchschnitt besitzen. (Lies: "A disjunkt vereinigt mit B").

Statt $A \cap B \neq \emptyset$ sagen wir auch: "A und B sind konjunkt".

"o.B.d.A" steht für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit";

"n.V." für "nach Voraussetzung";

"i.W.z.V" für "im Widerspruch zur Voraussetzung".

"Kuhn" bzw. "Heuser" bei Literaturangaben bezieht sich auf das Skriptum "Einführung in die Topologie" von Prof. Dr. H. Kuhn (1. Auflage!) bzw. das Buch "Einführung in die Funktionalanalysis" von Prof. Dr. H. Heuser. Entsprechend bezeichnet "Newman" das Buch "Elements of the Topology of plane sets of points" von M.H.A. Newman.

I. Vorbereitende Sätze

1. Vorbereitende Sätze aus der Topologie

Für diesen Abschnitt vereinbaren wir, daß sich Literaturangaben der Form "5.6, p. 69" immer auf das Skriptum von Herrn Professor Kuhn beziehen. Die Bezeichnungsweisen wurden in Anlehnung an dieses Skriptum gewählt.

1.1 Satz

Sei X ein separabler, lokalbogenzusammenhängender, topologischer Raum und $O \subseteq X$ eine offene Teilmenge; dann besitzt O höchstens abzählbar viele Komponenten O_i ; $O = \bigcup_{i \in I} O_i$, $I \subseteq \mathbb{N}$.

Beweis:

Nach 4.3, p. 134 sind alle Komponenten von O offen, also Gebiete, wegen des lokalen Zusammenhangs von X . Da X separabel ist, gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge D ; $D \cap O_i \neq \emptyset$, O_i eine Komponente von O , wegen der Dichtheit von D und der Offenheit von O_i (s.o.). Ferner haben wir: $(D \cap O_i) \cap (D \cap O_j) = D \cap (O_i \cap O_j) = D \cap \emptyset = \emptyset$ für $i \neq j$. Aufgrund des Auswahlaxioms können wir somit aus jeder Menge $D \cap O_i$ genau ein Element $b_i \in D$ auswählen. Offenkundig vermittelt diese Auswahl eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Komponenten von O und einer Teilmenge B von D , da die Komponenten paarweise disjunkt sind. B kann aber als Teilmenge der abzählbaren Menge D höchstens abzählbar sein.

□

1.2 Bemerkung

Der obige Satz gilt sicherlich in den separablen und lokalbogenzusammenhängenden Räumen \mathbb{R}^n , $n \geq 1$.

1.3 Definition

Sei X ein topologischer Raum und A, B Teilmengen von X .

- (1) Wir sagen " A und B sind in X ähnlich gelagert" (zueinander ähnlich gelagert), falls es eine topologische Selbstabbildung f von X gibt dergestalt, daß $f(A) = B$ ist. f wollen wir dann eine Ähnlichkeitstransformation zwischen A und B nennen.
- (2) Wir sagen " A und B sind bezüglich X relativ homöomorph zueinander", falls es eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt, welche einen Homöomorphismus zwischen den topologischen Teilräumen A und B des topologischen Raumes X vermittelt. f werde ein Relativhomöomorphismus genannt. Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, sagen wir kurz: A und B sind zueinander homöomorph.

1.4 Bemerkungen

- (1) Falls A eine Eigenschaft besitzt, welche unter topologischen Abbildungen invariant bleibt, ist notwendig dafür, daß B zu A ähnlich gelagert ist, daß B dieselbe Eigenschaft besitzt.
- (2) Aus "A und B sind ähnlich gelagert" folgt "A und B sind relativ homöomorph zueinander", da die Einschränkung der Ähnlichkeitstransformation f zwischen A und B auf A mit B als Wertebereich, einen Relativhomöomorphismus zwischen A und B induziert.
- (3) Die Umkehrung von (2) gilt nicht, da beispielsweise die x-Achse des \mathbb{R}^2 via stereographische Projektion zur Einheitskreislinie S^1 des \mathbb{R}^2 , aus welcher der Nordpol entfernt wurde, homöomorph ist. Die beiden Mengen können im \mathbb{R}^2 nicht ähnlich gelagert sein, da die x-Achse abgeschlossen, $S^1 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ aber nicht abgeschlossen im \mathbb{R}^2 ist (1).
- (4) Sei X ein topologischer Hausdorffraum, A eine nichtleere, kompakte Teilmenge und $f: A \rightarrow X$ eine injektive und stetige Abbildung von A nach X. f vermittelt dann eine bijektive und stetige Abbildung zwischen A und $f(A)$. $f(A)$ ist als Teilraum eines Hausdorffraumes selbst ein Hausdorffraum, aus dem Satz von der stetigen Inversen (1.11, p. 100) folgt somit, daß $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ ebenfalls stetig, f daher ein Relativhomöomorphismus zwischen A und $f(A)$ ist.
- (5) Sei X ein topologischer Raum und A, B, C Teilmengen von X. Aus "A relativ homöomorph zu B" und "B relativ homöomorph zu C" folgt auch, daß A relativ homöomorph zu C ist, da, falls f_1 den Relativhomöomorphismus zwischen A und B, und f_2 denjenigen zwischen B und C bezeichnet, $f_2 \circ f_1$ einen solchen zwischen A und C vermittelt.
Die Aussage "A ist relativ homöomorph zu B" impliziert natürlich auch die Aussage "B ist relativ homöomorph zu A", da, falls f ein Relativhomöomorphismus zwischen A und B ist, f^{-1} einen solchen zwischen B und A vermittelt. Da jede Teilmenge A von X, via $\text{id}_X|_A$ zu sich selbst relativ homöomorph ist, ist die Relation "A ist relativ homöomorph zu B" eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$.
- (6) Ganz analog wie in (5) zeigt man, daß die Relation "A ist ähnlich gelagert zu B" eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(X)$ ist.

1.5 Satz

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine (nicht unbedingt stetige) Abbildung und $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, X_i offen; ferner sei $f|_{X_i}$ eine offene Abbildung von X_i nach Y ; dann ist auch f eine offene Abbildung von X nach Y .

Beweis:

Sei $O \subseteq X$ eine offene Teilmenge von X . $O = \bigcup_{i \in I} O \cap X_i = \bigcup_{i \in I} O \cap X_i$; $O \cap X_i$ ist für alle $i \in I$ offen in X und X_i .

Nach 3.3(2), p. 7 ist aber $f(O) = \bigcup_{i \in I} f(O \cap X_i)$; $f(O \cap X_i)$ ist als Bild der in X_i offenen Menge $O \cap X_i$ in Y offen; somit ist auch $\bigcup_{i \in I} f(O \cap X_i) = f(O)$ in Y offen. □

1.6 Satz

Sei $O \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R} . $f: O \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und *streng monoton*; dann ist f eine offene Abbildung von O nach \mathbb{R} .

Beweis:

Sei $y \in f(O)$; wir müssen zeigen, daß noch eine ganze offene ϵ -Kugel um y in $f(O)$ enthalten ist; o.B.d.A. können wir annehmen, daß f streng wächst. Sei nun $x = f^{-1}(y)$; da O offen ist, gibt es eine offene δ -Kugel $K_\delta(x)$ um x , die noch völlig in O enthalten ist. Die abgeschlossene Kugel $\bar{K}_{\delta/2}(x)$ um x mit Radius $\delta/2$ ist ganz in $K_\delta(x)$ enthalten. Falls wir $\epsilon = \min\{|f(x - \frac{\delta}{2})|, |f(x + \frac{\delta}{2})|\}$ setzen, ist $K_\epsilon(f(x))$, die offene Kugel mit Radius ϵ um $f(x) = y$ noch ganz in $f(O)$ enthalten, da einerseits wegen des strengen Wachstums von $f(x)$ $f(x - \frac{\delta}{2}) \leq f(t) \leq f(x + \frac{\delta}{2})$ für alle $t \in \bar{K}_{\delta/2}(x)$, andererseits aber, wegen der Stetigkeit und des Zusammenhangs von $\bar{K}_{\delta/2}(x)$ f alle Werte zwischen $f(x - \frac{\delta}{2})$ und $f(x + \frac{\delta}{2})$ annehmen muß. □

1.7 Satz

Sei $f: O \rightarrow \mathbb{R}$, $O \subseteq \mathbb{R}$ offen, injektiv und stetig, so ist $f(O)$ in \mathbb{R} offen.

Beweis:

Die offene Menge O besitzt nach 1.2 höchstens abzählbar viele Teilgebiete, welche als zusammenhängende Teilmengen von \mathbb{R}^1 offene Intervalle sein müssen (2.8, p. 125); nach 2.2(3), p. 123 muß daher f , eingeschränkt auf eine Komponente von O , streng wachsen, ist also nach 1.6 offen. 1.5 liefert dann die Behauptung. □

1.8 Definition

Sei (X, X) ein topologischer Raum.

Wir wollen $A \subseteq X$ eine Jordanmenge nennen, falls A folgende Eigenschaften besitzt:

Sei $f: A \rightarrow X$ eine beliebige $X_A X$ -stetige, injektive Abbildung. Dann besitzt $X \setminus f(A)$ zwei Komponenten K_1, K_2 mit $f(A) = \text{Rd } K_1 = \text{Rd } K_2$. f heie eine Jordanabbildung.

1.9 Satz

Sei Y ein zu X mittels $g: X \rightarrow Y$ homomorpher topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Jordanmenge.

Dann ist $g(A) \subseteq Y$ ebenfalls eine Jordanmenge.

(Das Bild einer Jordanmenge unter einer homöomorphen Abbildung des Gesamtraumes ist wiederum eine Jordanmenge.)

Beweis:

Sei $h: g(A) \rightarrow Y$ eine $Y_{g(A)} Y$ -stetige, injektive Abbildung, dann ist $g^{-1} \mid h(g(A)) := B'$ eine $Y_B X$ -stetige, injektive Abbildung von B' nach X . Falls wir nun $B = g^{-1}(h(g(A)))$ setzen, ist $g^{-1} \circ h \circ (g \mid A)$ eine $X_A X$ -stetige, injektive Abbildung von A nach B , $X \setminus B$ besitzt somit zwei Komponenten K_1, K_2 mit $B = \text{Rd } K_1 = \text{Rd } K_2$; da $g(X \setminus B) = g(X) \setminus g(B) = Y \setminus B'$, besitzt auch B' zwei Komponenten $K'_1 = g(K_1)$, $K'_2 = g(K_2)$ und es gilt $\text{Rd } g(K_i) = g(\text{Rd } K_i) = g(B) = B'$, $i=1,2$, weil g ein Homöomorphismus ist; somit ist auch $g(A)$ eine Jordanmenge in Y . □

1.10 Bemerkungen

- (1) Falls $A \subseteq X$ eine Jordanmenge ist, besitzt A selbst zwei Komponenten deren Rand A ist, denn die identische Abbildung, eingeschränkt auf A , ist eine $X_A X$ -stetige, injektive Abbildung, deren Bild von A gerade A ist.
- (2) Falls die Jordanmenge A eine kompakte Teilmenge des topologischen Hausdorffraumes X ist, so ist auch jedes Bild B von A unter einer Jordanabbildung kompakt, und somit als kompakte Teilmenge des Hausdorffraumes X abgeschlossen, $X - B$ also offen. Damit haben wir, falls X noch zusätzlich lokal zusammenhängend ist, daß die Komponenten von $X - B$ Gebiete sind (4.3, p. 134); da B in diesem Falle Rand einer offenen Menge ist, muß B nach 1.19(3) nirgends dicht sein.
- (3) Das in (2) Gesagte gilt sicherlich für jede kompakte Jordanmenge im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$.

(4) Das Bild einer Jordanmenge $A \subseteq X$ unter einer Jordanabbildung f ist sicherlich wiederum eine Jordanmenge; denn sei $B=f(A)$ und $h: B \rightarrow X$ eine $X_B X$ -stetige, injektive Abbildung, so ist $h \circ f$ eine $X_A X$ -stetige Abbildung von A nach $h(B)$.

1.11 Definition

X sei ein topologischer Raum und $O \subseteq X$ eine offene Teilmenge. $f: O \rightarrow X$ sei eine stetige und injektive Abbildung von O (als Teilraum von X) nach X .

Falls nun für *alle* derartigen Abbildungen und alle in X offenen Mengen O gilt, daß $f(O)$ in X offen ist, so wollen wir sagen: " X besitzt die Invarianz offener Mengen". (Genauer: die Invarianz offener Mengen unter stetig eineindeutigen Abbildungen.)

1.12 Satz

Die Invarianz offener Mengen ist eine topologische Invariante.

Beweis:

Der zum topologischen Raum Y vermittels $g: X \rightarrow Y$ homöomorphe Raum X besitze die Invarianz offener Mengen. Sei nun O' eine in Y offene Menge und $h: O' \rightarrow Y$ eine $Y_{O'} Y$ -stetige, injektive Abbildung. Wir müssen zeigen: $h(O')$ ist offen.

Da g topologisch ist, haben wir: $O := g^{-1}(O')$ ist in X offen. $s := g^{-1} \circ h \circ (g|_O)$ ist eine $X_O X$ -stetige, injektive Abbildung von O nach X ; somit muß - da X die Invarianz offener Mengen besitzt - $s(O)$ in X offen sein. Weil g ein Homöomorphismus ist, muß somit auch $g(s(O)) = g(g^{-1} \circ h \circ (g|_O)(O)) = h \circ (g|_O)(O) = h(O')$ offen in Y sein. □

Die Invarianz offener Mengen impliziert eine ganze Reihe interessanter Folgerungen:

1.13 Satz

Der topologische Raum X besitze die Invarianz offener Mengen. Dann gilt:

(1) Falls $O \subseteq X$ offen und f eine stetige und injektive Abbildung von O nach X ist, so vermittelt f einen Homöomorphismus zwischen O und $f(O)$ (als Teilräumen von X); insbesondere ist $f(O)$ ein Gebiet, falls O ein Gebiet ist (Invarianz des Gebiets).

- (2) Falls $f: E \rightarrow X$, $E \subseteq X$, E Teilraum von X , eine stetige und injektive Abbildung ist, gilt:
 $f(E^\circ) \subseteq (f(E))^\circ$.
 Ist $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ ebenfalls stetig, so gilt:
 $f(E^\circ) = (f(E))^\circ$.
- (3) Ist die Menge E in (2) abgeschlossen, und besitzt f eine stetige Inverse, so gilt: $f(\text{Rd } E) = \text{Rd } f(E)$ (Invarianz des Randes).
- (4) Falls sich $E \subseteq X$ stetig und eineindeutig auf $B \subseteq X$, mit $B^\circ = \emptyset$, abbilden läßt, gilt auch $E^\circ = \emptyset$.

Beweis:

- (1) Aufgrund der Invarianz offener Mengen wird jede in O und somit in X offene Teilmenge O' von O auf eine in X offene Teilmenge $f(O')$ von $f(O)$ abgebildet; $f(O')$ ist daher auch in $f(O)$ offen. f ist also eine offene Abbildung von O nach $f(O)$ und daher, als bijektive, stetige und offene Abbildung von O nach $f(O)$ ein Homöomorphismus zwischen O und $f(O)$.
- (2) $f(E^\circ) \subseteq f(E)$, da $E^\circ \subseteq E$. $f(E^\circ)$ ist offen in X und deswegen als offene Teilmenge von $f(E)$ auch eine Teilmenge von $(f(E))^\circ$. Falls f^{-1} stetig ist, haben wir auch $f^{-1}(f(E)^\circ) \subseteq (f^{-1}(f(E)))^\circ = E^\circ$ und somit auch die Umkehr-Inklusion $(f(E))^\circ \subseteq f(E^\circ)$.
- (3) $\text{Rd } E = E \setminus E^\circ$, $f(\text{Rd } E) = f(E \setminus E^\circ) = f(E) \setminus f(E^\circ) = f(E) \setminus (f(E))^\circ = \text{Rd } f(E)$, nach (2).
- (4) Falls $f: E \rightarrow B$, injektiv und stetig ist, folgt nach (1), falls $E^\circ \neq \emptyset$: $\emptyset \neq f(E^\circ) \subseteq (f(E))^\circ = B^\circ = \emptyset$, Widerspruch! □

1.13.1 Satz

Sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter und zusammenhängender topologischer Raum, in welchem jede kompakte Teilmenge abgeschlossen ist, der die Invarianz offener Mengen besitzt. Dann ist X zu keiner echten Teilmenge A , A als Teilraum von X aufgefaßt, homöomorph.

Beweis:

Sei $f: X \rightarrow A$ ein Homöomorphismus zwischen X und A ; wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von X muß $f(X) = A$ kompakt, nach Voraussetzung somit abgeschlossen sein. Wegen der Invarianz offener Mengen ist A aber auch offen, A ist somit eine offene und abgeschlossene echte Teilmenge des zusammenhängenden (!) topologischen Raumes X ; nach 1.5, p. 119, muß somit, da \emptyset und X in einem zusammenhängenden Raum die beiden einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen sind, $A = \emptyset$ gelten, da $A \subset X$. Wegen $X \neq \emptyset$ und der Bijektivität von f muß andererseits $A \neq \emptyset$ gelten. Dieser Widerspruch liefert die Behauptung. □

1.13.2 Bemerkungen

- (1) Falls X ein Hausdorffraum ist, ist jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen (1.6, p. 99), somit kann, falls X ein Hausdorffraum ist, die Voraussetzung "jede kompakte Teilmenge von X ist abgeschlossen" in 1.13.1 gestrichen werden.
- (2) Da der \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, homöomorph zu jedem offenen in \mathbb{R}^n gelegenen Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ ist (1.30(2)) und darüber hinaus ein zusammenhängender Hausdorffraum ist, der die Invarianz offener Mengen besitzt (II 4.14(1)), folgt aus (1) und 1.13.1, daß \mathbb{R}^n nicht kompakt sein kann, da die Kompaktheit von \mathbb{R}^n der Aussage von 1.13.1 widerspricht.
- (3) Da jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, zu jedem in I enthaltenen kompakten Intervall I' homöomorph ist (1.30(1)), andererseits jedes kompakte Intervall I zusammenhängend und ein Hausdorffraum ist, folgt wegen (1) und 1.13.1, daß I die Invarianz offener Mengen nicht besitzen kann. Beispielsweise ist $[0, \frac{1}{2})$ in $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ offen ($[0, \frac{1}{2}) = (-1, \frac{1}{2}) \cap [0, 1]$). $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ geht aus $[0, \frac{1}{2})$ durch die Translation $x \rightarrow x + \frac{1}{4}$, eingeschränkt auf $[0, \frac{1}{2})$, hervor. Diese Translation ist sicherlich eine injektive und stetige Abbildung, die auf einer offenen Teilmenge von I , nämlich $[0, \frac{1}{2})$ definiert ist, und ihre Werte in I annimmt. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ist aber als Teilmenge des offenen Kerns $(0, 1)$ von I in I nicht offen, da in jedem topologischen Raum X eine Teilmenge O von T^O , $T \subset X$, in T nur dann offen sein kann, wenn sie in X offen ist ($O \subset T$, O in X offen $\sim O = O \cap T$, somit ist O offen in T ; sei umgekehrt $O \subset T^O$, O offen in $T \sim O = T \cap O'$, O' offen in X , $O \subset T^O \sim O = (T \cap O') \cap T^O = T^O \cap O'$, offen in X , da T^O , O' offen in X).
- (4) Genauso wie in (2) kann kein zusammenhängender, kompakter topologischer Hausdorffraum X , der zu einer echten Teilmenge A homöomorph ist, die Invarianz offener Mengen besitzen.

Im Laufe der Arbeit benötigen wir auch einige Aussagen über Zusammenhang und Ränder, auf die wir im folgenden eingehen.

1.14 Satz

Sei X ein topologischer Raum.

- (1) $A \subset X$ ist genau dann offen in X , falls $A \cap \text{Rd } A = \emptyset$; dies ist offenkundig äquivalent zu $\text{Rd } A \subseteq [A$.
- (2) $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, falls $\text{Rd } A \subseteq A$.

Beweis:

- (1) Nach 5.3(2), p. 36, bilden für jedes $A \subset X$ die drei Mengen

A° , $\text{Rd } A$, $([A]^\circ)$ eine Zerlegung von X . A ist genau dann offen, wenn $A^\circ = A$ und deshalb muß $A \cap \text{Rd } A = A^\circ \cap \text{Rd } A = \emptyset$ gelten.

Umgekehrt, falls $A \cap \text{Rd } A = \emptyset$, haben wir:

$$A = A \cap X = A \cap (A^\circ \cup \text{Rd } A \cup ([A]^\circ)) = A \cap A^\circ \cup \underbrace{A \cap \text{Rd } A}_{=\emptyset \text{ n.V.}} \cup \underbrace{A \cap ([A]^\circ)}_{\subseteq A \cap [A]^\circ},$$

also $A = A \cap A^\circ \subseteq A^\circ$; da aber immer $A^\circ \subseteq A$ gilt, haben wir $A \subseteq A^\circ \subseteq A$, somit $A = A^\circ$, A offen.

(2) A abgeschlossen $\Leftrightarrow [A]$ offen. Da $\text{Rd } A = \text{Rd } [A]$ muß $\text{Rd } A = \text{Rd } [A] \subseteq [([A]^\circ) = A$ gelten nach (1). Aus $\text{Rd } A \subseteq A = [([A]^\circ)$ folgt $\text{Rd } [A] = \text{Rd } A \subseteq [([A]^\circ) \sim [A]$ offen (nach (1)) $\sim A$ abgeschlossen. □

1.15 Folgerung

$A \subseteq X$ ist genau dann offen und abgeschlossen in X ("abgeschlossen in X "), wenn $\text{Rd } A = \emptyset$; äquivalent hierzu ist: $\text{Rd } A \neq \emptyset$ genau dann, wenn A nicht abgeschlossen.

Beweis:

Sei A abgeschlossen $\sim \text{Rd } A \subseteq [A, \text{Rd } A \subseteq A$, also $\emptyset \subseteq \text{Rd } A \subseteq \subseteq A \cap [A = \emptyset$.

Umgekehrt folgt aus $\text{Rd } A = \emptyset$: $\text{Rd } A \cap A = \emptyset \sim A$ offen

$\emptyset = \text{Rd } A \subseteq A \sim A$ abgeschlossen. □

1.16 Satz

Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede nichtleere, echte Teilmenge einen nichtleeren Rand besitzt. (X zusammenhängend \Leftrightarrow Für alle $\emptyset \subset A \subset X$ gilt $\text{Rd } A \neq \emptyset$.)

Beweis:

Nach 1.5, p. 119, ist ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend, wenn \emptyset und X die einzigen abgeschlossenen Teilmengen sind, dies ist aber nach obiger Folgerung äquivalent dazu, daß \emptyset und X die einzigen Teilmengen von X mit leerem Rand sind. □

1.17 Satz

Sei X ein topologischer Raum und O_1, O_2 in X offen. Aus $(\text{Rd } O_1) \cap O_2 \neq \emptyset$ folgt $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

Beweis:

Sei $x \in (\text{Rd } O_1) \cap O_2 \sim x \in O_2 \sim$ Es gibt eine Umgebung U von x , welche noch ganz in O_2 enthalten ist, und da x Randpunkt von O_1 ist, muß $\emptyset \neq U \cap O_1 \subseteq U \subseteq O_2$ gelten, woraus sofort die Behauptung wird. □

1.18 Satz

Besitzt der Rand der Teilmenge A des topologischen Raumes X innere Punkte, so kann A weder offen noch abgeschlossen sein. (Aus $(\text{Rd } A)^\circ \neq \emptyset$ folgt: A ist weder offen noch abgeschlossen!)

Beweis:

Sei $x \in (\text{Rd } A)^\circ$, d.h. es gibt eine Umgebung U von x , welche noch ganz in $\text{Rd } A$ enthalten ist. $U = U \cap X = U \cap (A \cup [A]) = U \cap A \cup U \cap [A]$; sowohl $U \cap A$, als auch $U \cap [A]$ müssen nichtleer sein, da ja sonst x innerer Punkt von A oder $[A]$ wäre; somit haben wir: $\emptyset \neq U \cap A \subseteq \text{Rd } A \cap A \sim A$ nicht offen, $\emptyset \neq U \cap [A] \subseteq \text{Rd } A \cap [A] \sim A$ ist nicht abgeschlossen (1.14).

1.19 Folgerungen

- (1) Wendet man die Zerlegung in 5.3(3), p. 36, auf $\text{Rd } A$ an, so erhält man, daß $([\text{Rd } A]^\circ = A^\circ \cup ([A]^\circ, \text{Rd}(\text{Rd } A) \text{ und } (\text{Rd } A)^\circ)$ eine Zerlegung von X bilden. $\text{Rd}(\text{Rd } A)$ kann aber als Rand der abgeschlossenen Menge $\text{Rd } A$ aufgrund des obigen Satzes keine inneren Punkte haben, muß somit als abgeschlossene Menge ohne innere Punkte nirgendsdicht sein. Da $X = A^\circ \cup (\text{Rd } A)^\circ \cup ([A]^\circ \cup \text{Rd}(\text{Rd } A))$ gilt, daß $\text{Rd}(\text{Rd } A) = \text{Rd } A$ genau dann, wenn $(\text{Rd } A)^\circ = \emptyset$. Falls wir $\text{Rd}(\text{Rd}(\text{Rd } A))$ bilden, muß diese Menge mit $\text{Rd}(\text{Rd } A)$ übereinstimmen, da $(\text{Rd}(\text{Rd } A))^\circ = \emptyset$ (s.o.!). Aus denselben Gründen kann eine weitere Iterierung des Randbildungsprozesses keine andere Menge als $\text{Rd}(\text{Rd } A)$ liefern.
- (2) Aus $(\text{Rd } A)^\circ \neq \emptyset$ folgt: $A \neq \emptyset, X, A^\circ \subset A \subset \bar{A}$, A also weder offen noch abgeschlossen. Denn wäre $A = \emptyset, X$, so gälte $\text{Rd } A = \emptyset$, $(\text{Rd } A)^\circ \subseteq \emptyset^\circ = \emptyset$; wäre A offen oder abgeschlossen und $(\text{Rd } A)^\circ \neq \emptyset$ ergäbe sich sofort ein Widerspruch zu obigem Satz.
- (3) Falls $A \subseteq X$ offen oder abgeschlossen, muß $(\text{Rd } A)^\circ = \emptyset$ gelten und $\text{Rd } A$ muß als abgeschlossene Menge ohne innere Punkte nirgendsdicht sein (1).

1.20 Definition

Sei X ein topologischer Raum; $x \in X$ heißt Zerlegungspunkt von X , falls $X \setminus \{x\}$ nicht zusammenhängt. Besitzt X keine Zerlegungspunkte, so soll X zerlegungspunktfrei genannt werden.

1.21 Bemerkungen

- (1) Sei $f: X \rightarrow Y$ eine injektive und stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y . Falls $x \in X$ kein Zerlegungspunkt von X ist, so ist $f(x)$ auch kein Zerlegungs-

punkt von $f(X)$. Zerlegungspunktfreiheit ist somit insbesondere eine topologische Invariante. Das Bild eines Zerlegungspunktes unter einer topologischen Abbildung ist wiederum ein Zerlegungspunkt.

- (2) Falls X mehr als zwei Punkte besitzt und zerlegungspunktfrei ist, hängt X zusammen. Da ein einpunktiger Raum zusammenhängt und die leere Menge ebenfalls zusammenhängt, ist jeder einpunktige Raum zerlegungspunktfrei. Auch ein zweipunktiger topologischer Raum ist zerlegungspunktfrei, da jede einpunktige Menge zusammenhängt; ist er allerdings mit der diskreten Topologie versehen, so bilden die beiden Punkte eine Partition und er hängt somit nicht zusammen.
- (3) Jeder Punkt der reellen Zahlen ist ein Zerlegungspunkt; $(-\infty, x) \mid (x, \infty)$ ist eine Partition von $\mathbb{R} \setminus \{x\}$!
- (4) Jede Jordankurve ist als topologisches Bild der zerlegungspunktfreien Kreislinie zerlegungspunktfrei (Satz von Wilder).
- (5) Jeder normierte lineare Raum dessen Dimension größer gleich zwei ist, ist zerlegungspunktfrei (2.21(2)).
- (6) Die Alexandroffsche Einpunktkompaktifizierung eines nichtkompakten, zerlegungspunktfreien topologischen Raumes X ist zerlegungspunktfrei (3.12(2)).

Beweis.

(1) $f(X) \setminus f(x) = f(X \setminus \{x\})$ ist das stetige Bild der zusammenhängenden Menge $X \setminus \{x\}$, also zusammenhängend. Falls x Zerlegungspunkt von X ist, ist $X \setminus \{x\}$ nicht zusammenhängend; sei nun $g: X \rightarrow Y$ eine topologische Abbildung, so wäre, falls $g(x)$ kein Zerlegungspunkt von Y wäre, $g^{-1}(Y \setminus g(x)) = X \setminus \{x\}$ zusammenhängend!

(2) Sei $X \supseteq \{x, y, z\}$, dann gilt $X = (X \setminus \{x\}) \cup (X \setminus \{y\})$, $(X \setminus \{x\}) \cap (X \setminus \{y\}) \supseteq \{z\}$, $X \setminus \{x\}$, $X \setminus \{y\}$ zusammenhängend, also X zusammenhängend als Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen, welche einen gemeinsamen Punkt enthalten. (1.11, p. 120). \square

Zum Beweis, daß keine echte Teilmenge von Z^p , $p \geq 1$, der Alexandroffschen Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^p zu Z^p homöomorph sein kann, benötigen wir einen Satz darüber, daß in einem zusammenhängenden topologischen T_1 -Raum X , der keine Zerlegungspunkte besitzt, die einpunktigen Mengen die einzigen abgeschlossenen Teilmengen sind, die durch Entfernen eines einzigen Punktes - eines sogenannten Öffnungspunktes - zu offenen Mengen gemacht werden können. Zunächst einige Hilfssätze:

1.22 Satz

Sei X ein zerlegungspunktfreier topologischer Raum. Dann besitzt jede Teilmenge A mit nichtleerem Rand, welche *nicht* von der Form $\{x\}$ oder $X \setminus \{x\}$, $x \in X$ beliebig, ist, mindestens zwei Randpunkte.

Beweis.

Angenommen es gäbe ein $y \in X$ mit $\{y\} = \text{Rd } A$, dann gälte nach 5.3(2), p. 36, daß A° , $\{y\}$, $([A]^\circ)$ eine Zerlegung von X bilden. Wäre $\emptyset = A^\circ = ([A]^\circ)$, so gälte $X = \{y\}$ und keine Teilmenge von X könnte die Voraussetzung erfüllen; sei daher o.B.d.A. $A^\circ \neq \emptyset$. Wäre nun $([A]^\circ) = \emptyset$, so hätten wir $X = A^\circ \dot{\cup} \{y\}$, d.h. $A^\circ = X \setminus \{y\}$. Wäre A offen, also $A = A^\circ$, wäre die Voraussetzung für A wiederum nicht erfüllt. Gälte aber $A^\circ \subset A$ - dies ist gleichbedeutend damit, daß A *nicht* offen ist -, so hätten wir $A^\circ = X \setminus \{y\} \subset A \subset X$, also $A = X$, wiederum erfüllt A die Voraussetzung nicht. Da aber, wie gerade gezeigt, im Falle, daß A die Voraussetzung erfüllt, A° , $([A]^\circ) \neq \emptyset$, bilden A° , $([A]^\circ)$ eine Partition der zusammenhängenden (!) Menge $X \setminus \{y\}$. □

1.23 Satz

Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ habe die Eigenschaft, daß $A \cap \text{Rd } A \supseteq \{x, y\}$, $x \neq y$. Dann gilt für alle $a \in A$: $\text{Rd}(A \setminus \{a\}) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, $A \setminus \{a\}$ kann *nicht* offen sein.

Beweis.

- (1) $\text{Rd}(A \setminus \{a\}) = \overline{A \setminus \{a\}} \cap \overline{(A \setminus \{a\})} = \overline{A \cap [a \cap [AU\{a\}]}$.
- (2) $\text{Rd } A = \overline{A} \cap \overline{A}$.
- (3) $\text{Rd } A \cap A = \overline{A} \cap \overline{A \cap A} = (\overline{A \cap A}) \cap (\overline{A \cap A})$.
- (4) $\overline{A} \subset \overline{AU\{a\}}$.

Sei $a \neq x, y$, so gilt $\{x, y\} \subset A \setminus \{a\}$ und somit $\{x, y\} \subset \overline{A \setminus \{a\}}$; andererseits $\{x, y\} \subset \text{Rd } A \cap A \subset \overline{A \cap A} \subset \overline{A} \cap \overline{AU\{a\}} = \overline{(A \setminus \{a\})}$, summa summarum: $\{x, y\} \subset \overline{A \setminus \{a\}} \cap \overline{(A \setminus \{a\})} = \text{Rd}(A \setminus \{a\}) \cap (A \setminus \{a\})$ und somit $\emptyset \neq \{x, y\} \subset \text{Rd}(A \setminus \{a\}) \cap (A \setminus \{a\})$. Falls o.B.d.A. $a = x$, so sind die obigen Schlüsse, wenn man statt $\{x, y\}$ $\{y\}$ schreibt, unverändert durchführbar und somit gilt: $\emptyset \neq \{y\} \subset \text{Rd}(A \setminus \{x\}) \cap (A \setminus \{x\})$.

Aus 1.14 folgt dann die Behauptung. □

1.24 Folgerung

Falls in einem topologischen Raum die abgeschlossene Menge A mindestens zwei Randpunkte besitzt, so kann sie durch Entfernen eines Punktes *nicht* in eine offene Teilmenge verwandelt werden, da $A \cap \text{Rd } A \supseteq \{x, y\}$ und somit die Voraussetzungen des obigen Satzes für A erfüllt sind.

1.25 Satz

X sei ein zerlegungspunktfreier topologischer T_1 -Raum.

$A \subset X$ sei eine mehr als einpunktige, echte, abgeschlossene Teilmenge mit nichtleerem Rand. Dann besitzt A mindestens zwei Randpunkte.

Beweis.

Wäre A das Komplement einer einpunktigen Menge $\{y\}$ so müßte, da $X \setminus \{y\} = A$ offen ist (X ist ein T_1 -Raum!), A zugleich offen und abgeschlossen sein, was nach 1.15 den Widerspruch zur Voraussetzung $Rd A \neq \emptyset$ nach sich zöge; somit sind alle Voraussetzungen von 1.22 erfüllt und A besitzt daher mindestens zwei Randpunkte. □

1.26 Folgerungen

- (1) Keine Menge A, welche die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt, kann Öffnungspunkte besitzen (1.24).
- (2) Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, welcher alle Voraussetzungen von 1.25 erfüllt und A eine echte, abgeschlossene, mehr als einpunktige Teilmenge von X. Nach 1.16 gilt dann $Rd A \neq \emptyset$ und A erfüllt somit die Voraussetzungen des obigen Theorems, so daß A nach (1) keine Öffnungspunkte besitzt.
- (3) In einem beliebigen T_1 -Raum X gilt, daß $X \setminus \{x\}$, $x \in X$ beliebig und $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$ offen sind. Somit sind in einem Raum der die Voraussetzungen von (2) erfüllt, X und die einpunktigen Mengen die einzigen abgeschlossenen Mengen, welche Öffnungspunkte besitzen.
- (4) Jeder Punkt der reellen Zahlen ist Zerlegungspunkt derselben. Es gilt auch, daß jedes Intervall $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, a als Öffnungspunkt besitzt ($(-\infty, a)$, (a, ∞) sind offen!). Aus dieser Tatsache folgt wegen (2) sofort, daß die reellen Zahlen Zerlegungspunkte haben müssen, da sie ja sonst keine echten, abgeschlossenen Teilmengen mit Öffnungspunkten besitzen dürften.

Wir benötigen später die Tatsache, daß je zwei beschränkte, abgeschlossene, nichtausgeartete Intervalle des \mathbb{R}^p durch eine topologische Selbstabbildung des \mathbb{R}^p ineinander übergeführt werden können, zwei kompakte, nichtausgeartete Intervalle des \mathbb{R}^p somit zueinander ähnlich gelagert sind. Da jedes nichtausgeartete, kompakte Intervall des \mathbb{R}^p das Produkt p kompakter, nichtausgearteter Intervalle des \mathbb{R}^1 ist, beweisen wir zunächst den Satz, daß, falls $X_i, i \in I, I$ endlich, eine endliche Familie

topologischer Räume ist, und $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I$, eine endliche Familie von Homöomorphismen zwischen X_i und $Y_i, f = \prod_{i \in I} f_i$

ein Homöomorphismus zwischen $X = \prod_{i \in I} X_i$ und $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ ist.

1.27 Satz

Sei $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I, I$ endlich, eine endliche Familie offener Abbildungen von X_i nach Y_i , so ist auch $f = \prod_{i \in I} f_i$ eine of-

fene Abbildung von $X = \prod_{i \in I} X_i$ nach $Y = \prod_{i \in I} Y_i$. (X, Y versehen

mit der Produkttopologie der X_i bzw. Y_i .)

Beweis.

Sei O offen in X , dies bedeutet, daß $O = \bigcup_{j \in J} O_j, O_j \subseteq X, J$ beliebig,

$$O_j = \prod_{i \in I} O_j^i, O_j^i \text{ offen in } X_i, \text{ also } f(O) = f(\bigcup_{j \in J} O_j) = \bigcup_{j \in J} f(O_j) =$$

$$= \bigcup_{j \in J} f(\prod_{i \in I} O_j^i) = \bigcup_{j \in J} \prod_{i \in I} f_i(O_j^i) \text{ offen in } X \text{ als Vereinigung offener$$

Mengen. $\left\{ \begin{array}{l} \text{offen in } X, \text{ da } f_i(O_j^i) \text{ offen in } X_i, \text{ wegen} \\ \text{der Offenheit von } f_i \end{array} \right. \quad \square$

1.28 Satz

Sei $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I, I$ endlich, eine endliche Familie von Homöomorphismen zwischen den topologischen Räumen X_i und Y_i . Dann

ist $f = \prod_{i \in I} f_i$ ein Homöomorphismus zwischen $X = \prod_{i \in I} X_i$ und $Y = \prod_{i \in I} Y_i$,

wobei X und Y mit der Spurtopologie der X_i bzw. Y_i versehen sind.

Beweis.

Da alle f_i bijektiv sind, ist auch ihre Produktabbildung f bijektiv, da alle f_i als Homöomorphismen zwischen X_i und Y_i offen sind, ist ihre Produktabbildung aufgrund des obenstehenden Satzes offen und da alle f_i stetig sind, ist nach 4.11, p. 65, ihre Produktabbildung stetig, f also ein Homöomorphismus. \square

1.29 Satz

Je zwei kompakte, nichtausgeartete Intervalle des \mathbb{R}^1 lassen sich durch eine topologische Selbstabbildung des \mathbb{R}^1 ineinander überführen.

Beweis.

Seien $I_1 = [a_1, b_1], a_1 < b_1, I_2 = [a_2, b_2], a_2 < b_2$, zwei nichtausgeartete, kompakte Intervalle des \mathbb{R}^1 . O.B.d.A. können wir annehmen, daß $a_1 = a_2 = 0$, da $f_1(I_1)$ bzw. $f_2(I_2)$ das Intervall $I'_1 = [0, b_1 - a_1]$ bzw. $I'_2 = [0, b_2 - a_2]$ ergibt, wobei $f_i(x) = x - a_i, i = 1, 2. f_i$ ist aber offen-

kundig eine Bewegung des \mathbb{R}^1 , somit eine Isometrie und ein Homöomorphismus. $f(x) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ ist aber eine topologische Selbstabbildung des \mathbb{R}_1 , welche I'_1 in I'_2 überführt. \square

1.30 Folgerungen

(1) Da jedes nichtausgeartete, kompakte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}^p$

die Gestalt $I = \prod_{i=1}^p [a_i, b_i]$ besitzt, gilt, daß falls

$I' = \prod_{i=1}^p [a'_i, b'_i]$ ein weiteres kompaktes, nichtausgeartetes

Intervall im \mathbb{R}^p ist, es zu jedem Koordinatenintervall $[a_i, b_i]$, $i=1, \dots, p$, eine topologische Selbstabbildung f_i des \mathbb{R}^1 gibt, welche $[a_i, b_i]$ in $[a'_i, b'_i]$, $i=1, \dots, p$, über-

führt. $f = \prod_{i=1}^p f_i$ ist dann eine topologische Selbstabbildung

des \mathbb{R}^p , welche I in I' überführt.

(2) Jedes offene Intervall im \mathbb{R}^p ist zu \mathbb{R}^p homöomorph.

Wiederum genügt es die Behauptung für jedes offene Intervall des \mathbb{R}^1 zu beweisen; zunächst sei $I=(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Nach dem vorigen Satz läßt sich $[a,b]$ topologisch nach $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ transformieren und die Einschränkung der Transformation auf (a,b) liefert eine topologische Abbildung von (a,b) auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird aber durch $\tan x$ topologisch auf \mathbb{R} abgebildet. Falls I sowohl nach unten, wie nach oben unbeschränkt ist, gilt, daß $I = \mathbb{R}$ ist, und wir brauchen nichts mehr zu beweisen; sei also o.B.d.A. $I=(a, \infty)$. Durch Translation um $-a$ wird I in $(0, \infty)$ übergeführt und es gilt, daß $\text{arc tan } (0, \infty) = (0, \frac{\pi}{2})$; $(0, \frac{\pi}{2})$ ist aber nach obigem zu \mathbb{R} homöomorph.

Wir benötigen auch einige Aussagen über nirgendsdichte Mengen.

1.31 Definition

Sei X ein topologischer Raum.

- (1) $A \subseteq X$ heißt dicht in X , falls $A \cap O \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Menge O (4.8(1), p. 34).
- (2) $A \subseteq X$ heißt nirgendsdicht, falls die abgeschlossene Hülle von A keine inneren Punkte besitzt ($(\bar{A})^\circ = \emptyset$).

1.32 Bemerkungen

- (1) Jede Obermenge einer dichten Menge ist dicht, da, falls $A' \supseteq A$, A dicht, $A' \cap O \supseteq A \cap O \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Menge O .
- (2) Falls X ein T_1 -Raum ohne einpunktige offene Mengen und A dicht in X ist, gilt, daß jeder Punkt aus X Häufungspunkt von A ist. Denn, falls $x \in X$, so hat jede Umgebung U von x mindestens zwei Punkte, da X kein einpunktige offene Menge enthält. Also gilt: $U \setminus \{x\} = U \cap [x \neq \emptyset]$; da U eine x enthaltende offene Menge O enthält, und $U \cap [x \neq \emptyset] \cap [x \neq \emptyset]$ und $[x \neq \emptyset]$ offen, da X ein T_1 -Raum ist, gilt $O \cap [x \neq \emptyset]$ offen und somit $(U \setminus \{x\}) \cap A \supseteq (O \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, da A dicht; somit muß x ein Häufungspunkt von A sein.
- (3) Falls es in dem topologischen Raum X eine Menge A gibt dergestalt, daß jeder Punkt von X Häufungspunkt von A ist, ist A dicht in X und X enthält keine einpunktigen offenen Mengen. Wäre nämlich $x \in X$ offen in X , so wäre $\{x\}$ eine Umgebung von x und wir hätten $\{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$ und somit $(\{x\} \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$, im Widerspruch dazu, daß x Häufungspunkt von A sein soll. Da für jedes $y \in X$ gilt, daß jede punktierte Umgebung von y mit A nichtleeren Durchschnitt besitzt, muß jede nichtleere offene Menge O , welche ja Umgebung aller ihrer Punkte ist, mit A nichtleeren Durchschnitt besitzen, somit ist A dicht.
- (4) Jede Teilmenge einer nirgendsdichten Menge ist selbst nirgendsdicht, da aus $A \subseteq B$, B nirgendsdicht, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, und somit $\emptyset \subseteq (\overline{A})^{\circ} \subseteq (\overline{B})^{\circ} = \emptyset$ folgt.

1.33 Satz

$A \subseteq X$ dicht $\Leftrightarrow [A$ besitzt keine inneren Punkte.

Beweis.

A dicht \sim Jede nichtleere offene Menge hat mit A nichtleeren Durchschnitt. Hätte $[A$ innere Punkte, so existierte ein $x \in [A$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine offene Umgebung U' von x mit $x \in U' \subseteq [A$, was sofort zu $A \cap U' \subseteq A \cap [A = \emptyset$ führte, im Widerspruch dazu, daß $A \cap U' \neq \emptyset$, da A dicht und U' nichtleer.

Sei umgekehrt $([A]^{\circ} = \emptyset$; hieraus folgt, daß jede offene Umgebung U jedes Punktes y aus $[A$ mit $A = ([A)$ nichtleeren Durchschnitt besitzt. Jede offene Menge O , welche mit $[A$ konjunkt ist, ist nichtleer und offene Umgebung jedes Punktes aus $O \cap [A$ und deshalb mit A konjunkt (s.o.). Jede nichtleere, offene Menge, welche mit $[A$ disjunkt ist, ist ganz in $[(A) = A$ enthalten und somit ebenfalls mit A konjunkt; somit haben *alle* nichtleeren offenen Mengen mit A nichtleeren Durchschnitt und A ist somit dicht in X . \square

1.34 Satz

$A \subseteq X$ ist genau dann nirgendsdicht, wenn $[A$ eine offene und dichte Teilmenge enthält.

Beweis.

Sei A nirgendsdicht $\sim (\bar{A})^\circ = \emptyset$. Da $A \subseteq \bar{A}$ folgt $[\bar{A} = ([A)^\circ \subseteq [A$.

$([A)^\circ$ ist offen. Wäre $([A)^\circ$ nicht dicht, so existierte eine nichtleere, offene Menge O mit $O \cap ([A)^\circ = \emptyset \sim O \subseteq [([A)^\circ = \bar{A} \sim \emptyset + O \subseteq \bar{A}^\circ \sim A$ nicht nirgendsdicht, Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei $[A \supseteq O$, O offen und dicht. $[O$ ist abgeschlossen und besitzt als Komplement einer dichten Menge keine inneren Punkte, $([O)^\circ = \emptyset$. Es gilt $A \subseteq [O \sim A \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{[O}$, also $\bar{A}^\circ \subseteq ([O)^\circ = \emptyset \sim A$ nirgendsdicht. □

1.35 Folgerung

Das Komplement jeder nirgendsdichten Menge ist als Obermenge einer dichten Menge selbst dicht.

1.36 Satz

Für jede nirgendsdichte Menge A gilt: $Rd A = \bar{A}$.

Beweis.

$Rd A = \bar{A} \cap \bar{[A} = \bar{A} \cap X = \bar{A}$ ($\bar{[A} = X$, da $[A$ dicht in X). □

1.37 Folgerungen

(1) Da $A \subseteq \bar{A}$ für jede Teilmenge A eines topologischen Raumes X , ist jeder Punkt einer nirgendsdichten Menge B Randpunkt dieser Menge.

(2) Eine abgeschlossene Menge C ist genau dann nirgendsdicht, wenn $C = Rd C$ gilt.

Beweis.

(2) Sei C abgeschlossen und nirgendsdicht, dann gilt: $C = \bar{C} = Rd C$. Sei umgekehrt $C = Rd C$, dann muß C abgeschlossen sein, da $Rd C$ abgeschlossen ist. $Rd C$ kann aber nach 1.19(3) als Rand der abgeschlossenen Menge C keine inneren Punkte besitzen, somit gilt: $\emptyset = (Rd C)^\circ = C^\circ = (\bar{C})^\circ$, C ist also nirgendsdicht. □

1.38 Definition

Sei X ein topologischer Raum und $B \subseteq X$; falls eine Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ in X nirgendsdichter Teilmengen existiert, dergestalt, daß

$B = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, so wollen wir B mager oder von erster Kategorie nennen.

Falls B sich *nicht* als abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Mengen darstellen läßt, heiße B fett oder von zweiter Kategorie.

1.39 Bemerkungen

(1) Jede endliche oder abzählbare Vereinigung magerer Mengen ist mager, da jede endliche oder abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.

(2) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager, da aus $A \subseteq B$, B mager, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n nirgendsdicht, und somit $A = A \cap B = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap A_n$, $A \cap A_n$, $n=1, 2, \dots$ nirgendsdicht als Teilmenge der nirgendsdichten Menge A_n , folgt.

Insbesondere sind auch beliebige Schnitte magerer Mengen mager, da aus $A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, A_λ mager, $A \subseteq A_\lambda$ für jedes λ aus Λ , und somit A mager folgt; die mageren Teilmengen eines topologischen Raumes bilden somit einen äußeren oder erblichen σ -Ring.

(3) "Magerkeit" bzw. "Fettheit" einer Menge sind topologische Invarianten, da durch topologische Abbildungen nirgendsdichte Mengen auf nirgendsdichte Mengen abgebildet werden.

Es gilt folgender auf Baire zurückgehender, wichtige Satz:

1.40 Theorem (Bairescher Kategoriesatz)

Sei X entweder ein abzählbarkompakter, regulärer topologischer Raum oder ein vollständiger metrischer Raum.

Dann besitzt keine magere Teilmenge innere Punkte.

Kein nichtleerer Raum, der die Voraussetzungen erfüllt, kann daher mager sein, da $\emptyset \neq X = X^\circ$ für jeden nichtleeren topologischen Raum X ; jeder Raum, der die Voraussetzungen erfüllt, muß also fett oder von zweiter Kategorie sein, daher der Name Kategoriesatz.

Beweis.

Wir können zunächst annehmen, daß alle nirgendsdichten Mengen, als deren Vereinigung sich die magere Menge B darstellen läßt,

abgeschlossen sind, denn sei etwa $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n nirgendsdicht, so gilt: $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, und falls $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n})^\circ = \emptyset$, folgt hieraus sofort, daß $B^\circ = \emptyset$.

Sei X zunächst ein abzählbarkompakter, regulärer Raum, also ein T_1 -Raum, in welchem für jedes $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bilden (3.4, 3.5, p.86) und, in welchem der Cantorsche Durchschnittssatz für beliebige Folgen abnehmender, nichtleerer abgeschlossener Mengen gilt (4.5, p. 111).

Sei $\emptyset \neq O$ eine beliebige nichtleere offene Menge.
 Da $\overline{A_1}^o = \emptyset$ haben wir: $O \cap [\overline{A_1}] \neq \emptyset$, da $[\overline{A_1}]$ als Komplement der nirgendsdichten Menge $\overline{A_1}^o$ dicht ist (1.35).

Sei $x_1 \in O \cap [\overline{A_1}]$. Da $x_1 \in [\overline{A_1}]$ gibt es eine offene Umgebung U_1 von x_1 mit $U_1 \cap \overline{A_1}^o = \emptyset$ ($[\overline{A_1}]$ ist als offene Menge beispielsweise eine solche Umgebung). $O \cap U_1$ ist eine offene Umgebung von x_1 und wegen der Regularität von x_1 Obermenge einer abgeschlossenen Umgebung F_1 von x_1 ; also: $F_1 \subseteq U_1 \cap O \subseteq U_1 \subseteq [\overline{A_1}]$. Da F_1 eine Umgebung von x_1 ist, gilt: $(F_1)^o \neq \emptyset$, $(F_1)^o \cap [\overline{A_2}] \neq \emptyset$, da $[\overline{A_2}]$ als Komplement der nirgendsdichten Menge $\overline{A_2}^o$ dicht ist.

Sei $x_2 \in (F_1)^o \cap [\overline{A_2}]$; dieselbe Schlußweise wie bei x_1 liefert uns eine abgeschlossene Umgebung F_2 von x_2 mit:

$$F_2 \subseteq \underbrace{(F_1)^o}_{\subseteq [\overline{A_1}]} \cap [\overline{A_2}] \subseteq [\overline{A_1}] \cap [\overline{A_2}] = [(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})], F_2 \subseteq (F_1)^o \subseteq F_1.$$

Induktiv in der oben geschilderten Art und Weise fortfahrend, erhalten wir eine Folge (F_n) , $n \in \mathbb{N}$, von abgeschlossenen Mengen mit $F_n \subseteq F_{n-1} \subseteq F_{n-2} \subseteq \dots \subseteq F_1$, $F_n \subseteq \bigcap_{i=1}^n [\overline{A_i}] = [(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i})]$.

Da F_1 als abgeschlossene Teilmenge des abzählbarkompakten Raumes X selbst abzählbarkompakt ist (4.2(4), p. 109), erfüllt die Folge (F_n) alle Voraussetzungen des Cantorschen Durchschnittsatzes (4.5, p. 111), also gilt: $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Sei $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$; angenommen $x \in \bigcup_{n=1}^m \overline{A_n}$. Es existiert ein $\overline{A_m}$ mit $x \in \overline{A_m}$; nun gilt aber $x \in F_m \subseteq \bigcap_{i=1}^m [\overline{A_i}] \subseteq [\overline{A_m}]$, also muß, da die gegenteilige Annahme zu dem Widerspruch $x \in \overline{A_m} \cap [\overline{A_m}]^o = \emptyset$ führt, $x \in [\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}] \subseteq [B]$ gelten. Andererseits gilt $x \in F_1 \subseteq O$, also $x \in O \cap [B]$. Da O als nichtleere offene Menge beliebig war, hat also jede nichtleere offene Menge mit $[B]$ nichtleeren Durchschnitt, somit auch jede offene Umgebung jedes Punktes aus B , woraus die Behauptung folgt.

Betrachten wir nun den Fall, daß X ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik d ist.

Nach dem Prinzip der Kugelschachtelung, 6.7 p. 170, ist die Vollständigkeit von X äquivalent dazu, daß jede abnehmende Folge abgeschlossener Kugeln, deren Radien gegen Null streben, einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Da jeder Metrische Raum normal ist (2.8 p.146) und aus der Normalität eines topologischen Raumes seine Regularität folgt

(4.10(1) p. 94), können wir auch in diesem Fall annehmen, daß für jedes $y \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden.

Sei O eine offene Teilmenge von X . Es gibt für jeden Punkt $x \in O$ eine ε -Umgebung, $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$, die ganz in O enthalten ist.

Sei $y \in K_\varepsilon(x) \subseteq O$. Wie oben haben wir: $K_\varepsilon(x) \cap \overline{A_1} \neq \emptyset$. Sei dann $x_1 \in K_\varepsilon(x) \cap \overline{A_1}$; wie oben existiert eine abgeschlossene Umgebung F_1 von x_1 mit $F_1 \subseteq K_\varepsilon(x) \cap \overline{A_1} \subseteq O \cap \overline{A_1}$.

Da $(F_1)^{\circ} \neq \emptyset$ (F_1 ist eine Umgebung von x_1 !) existiert ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq F_1 \subseteq O \cap \overline{A_1}$, $\overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} \subseteq F_1 \subseteq O \cap \overline{A_1}$, $K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_2} \neq \emptyset$ ($\overline{A_2}$ ist dicht!).

Sei $x_2 \in K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_2}$, dann existiert wiederum eine abgeschlossene Umgebung F_2 von x_2 mit $F_2 \subseteq K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_2}$, ($K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_2}$ ist eine offene Umgebung von x_1 !), $(F_2)^{\circ} \neq \emptyset$, da F_2 eine Umgebung von x_2 ist. Wiederum existiert ein $\varepsilon_2 > 0$ mit $K_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq (F_2)^{\circ} \subseteq F_2 \subseteq K_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_2} \subseteq \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2}$, $\overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} \subseteq F_2 \subseteq K_{\varepsilon_1}(x_1)$, $F_2 \subseteq \overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)}$.

Sei $\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2')$, dann gilt $K_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq \overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} \subseteq K_{\varepsilon_2'}(x_2) \subseteq \overline{K_{\varepsilon_2'}(x_2)} \subseteq F_2 \subseteq \overline{A_1 \cup A_2}$.

Induktiv so fortfahrend, erhalten wir eine abnehmende Folge abgeschlossener Kugeln, deren Radien gegen Null streben (wähle

$$\varepsilon_n = \frac{\min(\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n'})}{n} \leq \frac{\varepsilon_{n-1}}{n} \leq \frac{\varepsilon_1}{n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty, \text{ dergestalt, daß}$$

$$\overline{K_{\varepsilon_n}(x_n)} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

Da nach dem Prinzip der Kugelschachtelung (6.7 p. 170) der Durchschnitt dieser Kugeln nichtleer ist, erhalten wir genauso wie im ersten Beweisteil, daß, falls x in diesem Durchschnitt enthalten ist, x auch in $O \cap B$ enthalten sein muß, wiederum also $B^{\circ} = \emptyset$ gelten muß. □

1.41 Definition, Bemerkungen

(1) wir wollen einen nichtleeren topologischen Raum, in welchem die Aussage des Baireschen Kategorieatzes gilt (Jede magere Menge besitzt keine inneren Punkte) einen Baireschen Raum nennen; Bairesche Räume sind von zweiter Kategorie, da sie

innere Punkte besitzen.

Die "Bairizität" eines topologischen Raumes ist topologisch invariant, da "Magerkeit" (1.39(3)) und Leerheit des Inneren einer Teilmenge topologisch invariant sind. Äquivalent zu unserer Definition ist offensichtlich, daß jede offene Teilmenge von X fett bzw., daß das Komplement jeder mageren Menge dicht ist (1.33).

- (2) Der Beweis des Baireschen Categoriesatzes beruht im wesentlichen darauf, daß wir zu einem Punkt x_n der nichtleeren Menge $O \cap \overline{A_n}$, $n=1,2,\dots$, eine Umgebung U_n finden können dergestalt, daß $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$ und $U_n \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} \right)$ gilt; jeder topologische Raum X , in welchen es möglich ist, zu einem Punkt der auf alle Fälle nichtleeren Menge $O \cap \overline{A_n}$ ($O \neq \emptyset$, $\overline{A_n}$ dicht!) eine dergestaltige Umgebung U_n zu finden, ist ein Bairescher Raum, da alle übrigen Schlüsse ansonsten ungeändert weiterlaufen.

Beispielsweise sei X ein regulärer topologischer Raum mit der Eigenschaft, daß jede offene Menge O eine abzählbarkompakte Menge A , deren Inneres nicht leer ist, enthält. Wenn wir im Beweis des Categoriesatzes in der offenen Menge $O \cap \overline{A_1}$ eine abzählbarkompakte Teilmenge A mit inneren Punkten wählen, werde $x_1 \in A^\circ \subseteq O \cap \overline{A_1}$ genommen. Wegen der Regularität von X läuft dann die ganze weitere Beweiskette genauso wie oben weiter (wähle $F_1 \subseteq A^\circ \subseteq A$); solche topologische Räume sind somit ebenfalls Bairesche Räume. Hieraus ergibt sich sofort, daß lokalkompakte und reguläre Räume Bairesche Räume sind, insbesondere also lokalkompakte Hausdorffräume, da nach 3.5(1), p. 107, lokalkompakte Hausdorffräume vollständig regulär und somit regulär sind.

- (3) Die übliche Form, den Baireschen Categoriesatz für vollständige metrische Räume zu formulieren, siehe etwa 6.8, p. 171, folgt sofort aus der hier gewählten, da aus $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n abgeschlossen und $\emptyset \neq X$, X vollständig, sofort für mindestens ein A_n , etwa A_m , $(A_m)^\circ \neq \emptyset$ folgen muß (wäre für alle n $(A_n)^\circ = \emptyset$, so wäre X mager und wir hätten den Widerspruch $\emptyset \neq X = X^\circ = \emptyset$). Somit muß mindestens ein $x \in A_m$ eine ϵ -Kugel besitzen, welche ganz in A_m enthalten ist. Insbesondere gilt $K_\epsilon(x) \subseteq \overline{K_\epsilon(x)} \subseteq \overline{A_m} = A_m$, A_m enthält also sogar eine abgeschlossene Kugel (siehe Heuser, 31.1, p. 149).
- (4) Jeder nichtleere kompakte Hausdorffraum X ist ein Bairescher Raum, denn er ist nach 2.2(4), p. 102, lokalkompakt (1).

- (5) Jeder höchstens abzählbare Bairesche T_1 -Raum X besitzt mindestens eine einpunktige offene Teilmenge; denn wäre keine einpunktige Teilmenge von X offen, so wäre $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$, x_n abgeschlossen und nirgendsdicht, somit X von erster Kategorie, im Widerspruch dazu, daß kein Bairescher Raum von erster Kategorie sein kann. Deshalb kann kein höchstens abzählbarer, mehrpunktiger Bairescher T_1 -Raum X zusammenhängen, da, falls $x \in X$ offen in X , $x | X \setminus \{x\}$ eine Partition von X bildet. Damit ergibt sich, daß jeder Bairesche T_1 -Raum X , welcher eine Menge A enthält dergestalt, daß jeder Punkt von X Häufungspunkt von A ist, überabzählbar sein muß. da ein solcher Raum nach 1.32(3) keine einpunktige offene Menge enthalten kann. Somit müssen die reellen Zahlen, als vollständiger metrischer Raum, dessen jedes Element Häufungspunkt der rationalen Zahlen ist, überabzählbar sein. Ebenso muß jeder mehrpunktige, vollständige und zusammenhängende metrische Raum, insbesondere die reellen Zahlen, jedes abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen, jeder Banachraum, der ein- oder höherdimensional ist (jeder normierte lineare Raum ist zusammenhängend (2.23(2))), überabzählbar sein. Da sowohl die Vollständigkeit, wie auch der Zusammenhang der reellen Zahlen eine Konsequenz des Vollständigkeitsaxioms sind, und Zusammenhang und Vollständigkeit der reellen Zahlen deren Überabzählbarkeit implizieren, könnte man das Vollständigkeitsaxiom ebensogut "Überabzählbarkeitsaxiom" nennen.
- (6) Jeder abzählbare, kompakte Hausdorffraum X muß eine ganze Folge paarweise verschiedener offener Punkte enthalten (ist X endlich, so muß X als endlicher T_1 -Raum mit der diskreten Topologie versehen sein, jeder Punkt von X ist dann offen in X), denn da er mindestens einen offenen Punkt x_1 enthalten muß (s.o.). ist $X_1 := X \setminus \{x_1\}$ abgeschlossen und somit als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraumes selbst ein kompakter Hausdorffraum. X_1 enthält somit einen in X_1 offenen Punkt x_2 . Da aber X_1 als Komplement der abgeschlossenen Menge $\{x_1\}$ in X offen ist, muß auch x_2 in X offen sein; induktiv in der beschriebenen Weise fortfahrend, erhalten wir eine ganze Folge $\{x_n\}$ in X offener Punkte. Jede abzählbare, kompakte Teilmenge K eines topologischen Hausdorffraumes X , welche ja in der Spurtopologie von X ein kompakter Hausdorffraum ist, besitzt somit eine ganze Folge isolierter Punkte, da ein Punkt einer Teilmenge A eines topologischen Raumes Y genau dann ein isolierter Punkt ist, falls er in der Spurtopologie offen ist. Da jeder metrische Raum ein Hausdorffraum ist, gilt das eben Gesagte insbesondere für jede abzählbare, kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes.

1.42 Satz (Bairescher Dichtesatz)

In einem Baireschen Raum X ist das Komplement jeder mageren Menge nicht leer, dicht und fett.

Beweis.

Sei B eine magere Teilmenge von X . Dann muß $X \setminus B$ nichtleer sein, da sonst $X=B$, X mager gälte im Widerspruch dazu, daß jeder Bairesche Raum fett ist. Aus demselben Grunde muß $X \setminus B$ fett sein, da $X \setminus B$ mager den Widerspruch $X=BU(X \setminus B)$ mager als Vereinigung zweier magerer Mengen nach sich zöge. $X \setminus B$ muß darüberhinaus dicht sein, da $B^0 = \emptyset$ wegen der Bairizität von X gilt (1.33). \square

1.43 Folgerungen, Bemerkungen

- (1) Die irrationalen Zahlen liegen dicht in den reellen Zahlen, da wegen des Zusammenhänge der reellen Zahlen keine einpunktige Menge offen sein kann (siehe 1.41(5)) und die rationalen Zahlen als abzählbare Teilmenge somit mager sind.
- (2) Besitzt ein Bairescher T_1 -Raum X eine magere dichte Teilmenge D , so kann er keine offenen Punkte enthalten, da D als dichte Teilmenge mit diesen nichtleeren Durchschnitt hätte, sie also enthielte, und somit keine magere Menge wäre. ($D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, A_n nirgendsdicht; wäre x in X offen, so gälte $\emptyset \neq \{x\} \cap D = \{x\} \sim x \in D \sim x \in A_m \sim x \in (\overline{A_m})^0 \sim A_m$ nicht nirgendsdicht.)
- (3) Das Komplement jeder mageren und dichten Teilmenge D eines Baireschen Raumes X kann keine F_{σ} -Menge, D kann keine G_{δ} -Menge sein.
- (4) Auch die übliche Form des Baireschen Dichtesatzes für vollständige metrische Räume (siehe etwa 6.9, p. 172) folgt aus dem obigen Satz.

Beweis.

(3) $B=X \setminus D$ hat als Komplement der dichten Menge D keine inneren Punkte. Wäre $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n abgeschlossen, so gälte für jedes F_n :

$(F_n)^0 \subseteq B^0 = \emptyset$, also wäre jedes F_n nirgendsdicht, B also mager. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, da X als Vereinigung der beiden mageren Menge B und D selbst mager sein müßte. Wäre D eine G_{δ} -Menge, so müßte $B=X \setminus D$ eine F_{σ} -Menge sein als Komplement einer G_{δ} -Menge. Insbesondere sind die rationalen Zahlen keine G_{δ} -, die irrationalen keine F_{σ} -Menge.

(4) Sei X ein Bairescher Raum und (G_n) eine Folge in X offener und dichter Mengen, so ist $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ dicht in X , denn $A_n = X \setminus G_n$, $n=1,2,\dots$,

ist nirgendsdicht als Komplement einer offenen dichten Menge (1.33) und somit gilt $X \setminus G = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := A$, A ist aber als abzählbare Vereinigung nirgendsdichter Mengen mager und somit $X \setminus A = G$ dicht in X aufgrund des Dichtesatzes. □

Wir benötigen einige Tatsachen und Begriffsbildungen über Bögen; unter Bögen (bezeichnet mit Γ) wollen wir dabei genau wie in 2.3(1), p. 124, stetige Bilder eines kompakten Intervalls $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ in einem topologischen Raum X verstehen; eine Abbildung $f: I \rightarrow X$ mit $f(I) = \Gamma$ soll Parameterabbildung heißen, $f(a)$ sei der Anfangspunkt, $f(b)$ der Endpunkt von Γ . Wir sagen auch: " Γ verbindet $f(a)$ mit $f(b)$ ". Ist f sogar eine topologische Abbildung von I nach Γ , versehen mit der Spurtopologie von X , so wollen wir Γ einen Jordanbogen nennen. Jeder Bogen ist als stetiges Bild der kompakten Menge I kompakt und abgeschlossen, falls X ein Hausdorffraum ist.

1.44 Definition

Sei X ein topologischer Hausdorffraum, Γ ein Bogen in X und $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von X . $f: [a, b] \rightarrow X$ sei eine Parameterdarstellung von Γ . Falls $A \cap \Gamma \neq \emptyset$, so gilt $\emptyset \neq f^{-1}(A \cap \Gamma) \subseteq [a, b]$ und daher existiert $m = \min f^{-1}(A \cap \Gamma) \geq a$ und $M = \max f^{-1}(A \cap \Gamma) \leq b$, da $A \cap \Gamma$ abgeschlossen ist.

$f(m)$ nennen wir den ersten Punkt von Γ auf A , vom Anfangspunkt aus gesehen (den letzten Punkt von Γ auf A , vom Endpunkt aus betrachtet) und $f(M)$ den letzten Punkt von Γ auf A , vom Anfangspunkt aus betrachtet (den ersten Punkt von Γ auf A , vom Endpunkt aus betrachtet).

1.45 Satz

Sei Γ ein Bogen des topologischen Hausdorffraumes X und $\emptyset \neq A$ eine abgeschlossene Teilmenge von X , welche den Anfangspunkt *nicht* enthält. Falls nun, mit den Bezeichnungen der obigen Definition, y der erste Punkt von Γ auf A , vom Anfangspunkt aus betrachtet, ist, so gilt, daß y Randpunkt, der von Anfangspunkt des Bogens Γ bestimmten Komponente von A , ist.

Beweis.

Sei $f: [a, b] \rightarrow X$ eine Parameterdarstellung von Γ ; da $y = f(m) \neq f(a)$ und $m = \min f^{-1}(\Gamma \cap A)$, gilt für alle t mit $a \leq t < m$: $f(t) \in [A, f]([a, t])$ ist ein Weg, der $f(a)$ und $f(t)$ verbindet, also liegen $f(a)$ und $f(t)$ in derselben Bogenkomponente von A , welche wiederum als zusammenhängende Teilmenge von A in genau einer Komponente K von A enthalten ist. Diese enthält aber $f(a)$, den Anfangspunkt,

ist also die von $f(a)$ bestimmte.

Sei U eine beliebige Umgebung von y ; dann ist $f^{-1}(U^0)$ eine in $[a,b]$ offene Menge, welche $m=f^{-1}(y)$ enthält. Da $m > a$ und $f^{-1}(U^0)$ offen, enthält $f^{-1}(U^0)$ Punkte, die links von m liegen, also kleiner als m sind; sei t_0 ein solcher, dann gilt: $K \ni f(t_0) \in f(f^{-1}(U^0)) \subseteq U^0 \subseteq U$; andererseits gilt: $y \in A \subseteq [K, y \in U$, somit $y \in \text{Rd } K$. □

Ganz entsprechend beweist man:

1.46 Satz

Sei X ein topologischer Hausdorffraum, $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge von X , welche den Endpunkt von Γ nicht enthält.

Falls y der erste Punkt von Γ auf A , vom Endpunkt aus betrachtet, ist, so gilt, daß y Randpunkt der vom Endpunkt des Bogens Γ bestimmten Komponente von A ist.

1.47 Bemerkungen

Aus dem Beweis der beiden vorherstehenden Sätze geht sofort hervor, daß y auch Randpunkt der von $f(a)$ bzw. $f(b)$ bestimmten Bogenkomponente ist.

1.48 Satz

I sei ein reguläres Intervall des \mathbb{R}^p ; dann ist jeder Punkt aus $I \cup \text{Rd } I$ Berührungspunkt des Inneren von I . ($\bar{I} = I^0$.)

Beweis.

Falls x aus I^0 brauchen wir nichts zu beweisen; sei also o.B.d.A.

x aus $\text{Rd } I$. $I = \prod_{i=1}^p I_i$, I_i ein Intervall des \mathbb{R}^1 , $i=1, \dots, p$. Wäre

für jedes $i=1, \dots, p$ x_i , die i -te Koordinate von x , ein Punkt aus

I_i^0 , so wäre x ein Punkt aus $\prod_{i=1}^p I_i^0 \subseteq I^0$. Seien also etwa x_{i_j} ,

$j=1, \dots, k \leq p$, aus $\text{Rd } I_{i_j}$ (wäre ein x_{i_j} aus $(I_{i_j})^0 \subseteq I_{i_j}$, so läge

x nicht in $I = \prod_{i=1}^p I_i$). O.B.d.A. können wir annehmen, daß $I_{i_j} = [x_{i_j}, b]$,

$x_{i_j} < b$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, daß $K_\varepsilon(x_{i_j}) \cap I_{i_j}^0 \neq \emptyset$ (K_ε genommen

in der euklidischen Metrik des \mathbb{R}^1). Trivialerweise ist für jedes $\varepsilon > 0$ $K_\varepsilon(x_i) \cap I_i^0 \neq \emptyset$ für alle x_i , welche in I_i^0 gelegen sind. Somit

gilt für alle $\varepsilon > 0$: $\emptyset \neq \underbrace{\prod_{i=1}^p K_\varepsilon(x_i)}_{:=K} \cap \underbrace{\prod_{i=1}^p I_i^0}_{\subseteq I^0}$. K ist aber gerade die

Kugel um x mit Radius ε in der Maximummetrik des \mathbb{R}^p , woraus die Behauptung folgt. □

1.49 Bemerkung

Später (II.1.28(2)) werden wir sehen, daß jede p-Zelle eines Gitters G des \mathbb{R}^p ein reguläres Intervall des \mathbb{R}^p ist; somit gilt die Behauptung von 1.48 für jede p-Zelle eines Gitters in \mathbb{R}^p .

2. Vorbereitende Sätze aus der Theorie der normierten linearen Räume

$\{0\} \neq E$ bezeichne durchwegs einen normierten linearen Raum über $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} mit der Norm $\|\cdot\|$.

2.1 Definition

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum.

$S := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ werde die Oberfläche der Einheitskugel oder Einheitssphäre der Norm $\|\cdot\|$ genannt.

$p: \begin{cases} E \setminus \{0\} \rightarrow S \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{cases}$ werde die Projektion von $E \setminus \{0\}$ auf die Einheits-sphäre genannt.

2.2 Satz

- (1) Durch $x \sim y \pmod{S} \Leftrightarrow p(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} = p(y)$ wird auf $E \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation erklärt. Aus $x \sim y$ folgt, daß x und y linear abhängig (l.a.) sind.
- (2) Falls $\|\cdot\|_1$ eine weitere Norm auf E ist, und S' die Einheitssphäre der Norm $\|\cdot\|_1$ bezeichnet, gilt:
 $x \sim y \pmod{S} \Leftrightarrow x \sim y \pmod{S'}$.
- (3) Die Projektion p von $E \setminus \{0\}$ auf die Einheitssphäre S ist surjektiv und stetig; es gilt darüberhinaus: $p|_S = id_S$.

Beweis.

(1) Daß eine Äquivalentrelation vorliegt, folgt daraus, daß die Gleichheitsrelation eine Äquivalenzrelation ist. Aus $x \sim y$ folgt $\|y\| x - \|x\| y = 0$, $\|x\|, \|y\| \neq 0$, also x, y l.a..

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{\|x\|}{\|x\|} &= \frac{\|y\|}{\|y\|} \sim \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 = \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|_1 \sim \frac{\|x\|_1}{\|x\|} = \frac{\|y\|_1}{\|y\|} \sim \\
 &\sim \frac{\|x\|}{\|x\|_1} = \frac{\|y\|}{\|y\|_1}, \text{ also } \frac{\|x\|}{\|x\|_1} = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \frac{\|y\|}{\|y\|_1} \cdot \frac{\|y\|}{\|y\|} = \\
 &= \frac{\|y\|}{\|y\|_1}; \text{ die Umkehrung wird genauso gezeigt.}
 \end{aligned}$$

(3) Sei $x \in X \sim \|x\| = 1 \sim p(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{1} = x$, also ist p surjektiv und $p|_S = id_S$.

Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \rightarrow x \neq 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß $x_n \neq 0$, da fast alle x_n in einer den Nullpunkt nicht enthaltenden

ε -Kugel um x liegen müssen. Nach Heuser 6.1, p. 52, gilt $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, $f(x_n) = \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$, p ist somit stetig. \square

2.3 Bemerkung

Nach Schubert, Topologie, 1.6, p. 156, ist S ein Retrakt von $E \setminus \{0\}$ und somit bogenzusammenhängend, falls $\dim E \geq 2$ oder E ein NLR über \mathbb{C} ist (2.21(2)). \square

2.4 Hilfssatz

Sei E ein normierter linearer Raum und $x, y \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} \Leftrightarrow \text{Es gibt } \lambda, \mu \text{ aus } \mathbb{R}, \lambda, \mu > 0 \text{ so, daß } \lambda x = \mu y.$$

Beweis.

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} \sim x \|y\| = \|x\| y, \lambda = \|y\| > 0, \mu = \|x\| > 0.$$

$$\lambda, \mu > 0, \lambda x = \mu y \sim x = \frac{\mu}{\lambda} y \sim \frac{x}{\|x\|} = \frac{(\lambda/\mu)y}{\|(\lambda/\mu)y\|} = \frac{(\lambda/\mu) \cdot y}{|\lambda/\mu| \cdot \|y\|} = \frac{y}{\|y\|}, \text{ da } \lambda/\mu = |\lambda/\mu|, \text{ weil } \lambda, \mu > 0. \quad \square$$

2.5 Satz

Sei $E \neq \{0\}$ ein normierter linearer Raum und $y \neq 0$ ein Vektor aus E . x sei ein beliebiger Punkt aus E , dann enthält jede ε -Kugel um x einen Vektor, der der linearen Hülle der Menge $\{x, y\}$ angehört.

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann leistet $x + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{y}{\|y\|}$ das Gewünschte. \square

2.6 Folgerung

Sei $B \subseteq A \subseteq E$, wobei A einem Unterraum U von E der Kodimension eins ähnlich gelagert ist (1.3(1)), so gilt $B^{\circ} = \emptyset$.

Beweis.

Da bei topologischen Selbstabbildungen eines topologischen Raumes das Innere jeder Menge in das Innere der Bildmenge übergeführt wird, genügt es den Satz für den Fall, daß U ein Unterraum der Kodimension eins ist, zu beweisen.

Es gibt eine Hamelbasis M von U , welche sich zu einer Basis von ganz E erweitern läßt (Heuser, 4.1, p.38); da $\text{codim } U = 1$ genügt hierzu ein einziger Vektor $b \neq 0$, der ein Basisvektor des Komplementärraumes U' von U ist. Sei x aus U . Wäre x innerer Punkt von U , so müßte eine ε -Kugel um x ganz in U enthalten sein, etwa $K = K_{\varepsilon_0}(x) \subseteq U$. Nun haben wir aber, daß $z = x + (\varepsilon_0/2) \frac{b}{\|b\|}$ in K enthalten ist, b sich jedoch aus M , der Basis von U , nicht linear kombinieren läßt. Da z sich somit aus M nicht linear kombinieren läßt, kann z auch nicht in der linearen Hülle von M , welche ja U ist, liegen.

Da U keine inneren Punkte besitzt und somit dasselbe auch von A gilt, kann auch B als Teilmenge von A keine inneren Punkte besitzen.

2.7 Folgerungen

- (1) Jede abgeschlossene Teilmenge R einer Menge A , welche die Voraussetzung von 2.6 erfüllt, ist nirgendsdicht in E .
($R^{\circ} = (\bar{R})^{\circ} \subseteq A^{\circ} = \emptyset$.)
- (2) Jeder echte Unterraum U eines normierten linearen Raumes E besitzt keine inneren Punkte, da er in einem Unterraum der Kodimension eins enthalten ist. Somit ist jeder abgeschlossene echte Unterraum nirgendsdicht, insbesondere auch jeder echte endlichdimensionale Unterraum, da nach Heuser 10.5, p. 70, jeder endlichdimensionale Unterraum abgeschlossen ist.
- (3) Keine Menge mit inneren Punkten kann somit völlig in einem echten Unterraum enthalten sein und jede Teilmenge eines echten Unterräumen besitzt keine inneren Punkte.

2.8 Satz, Definition

Sei E ein normierter linearer Raum über K mit der Norm $\|\cdot\|$. Falls $\|\cdot\|_1$ eine weitere Norm auf E ist und p, p_1 die Projektionen von $E \setminus \{0\}$ auf die Einheitssphäre bzgl. $\|\cdot\|$ bzw. $\|\cdot\|_1$ bedeuten (2.1), so leistet

$$f: \begin{cases} E \rightarrow E \\ 0 \rightarrow 0 \\ y \neq 0 \rightarrow \|y\|_1 \cdot p(y) \end{cases} \quad \text{eine bijektive Selbstabbildung von } E,$$

dergestalt, daß für alle y aus E $\|f(y)\| = \|y\|_1$ und $\|f(y)\| = a$ genau dann, wenn $\|y\|_1 = a$ gilt. Ihre Umkehrabbildung ist

$$\bar{f}: \begin{cases} E \rightarrow E \\ 0 \rightarrow 0 \\ y \neq 0 \rightarrow \|y\| \cdot p_1(y) \end{cases}$$

f werde der kanonische Isonormismus zwischen $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$, \bar{f} derjenige zwischen $(E, \|\cdot\|)$ und $(E, \|\cdot\|_1)$ genannt.

Beweis.

$$\|f(y)\| = \left\| \|y\|_1 \cdot p(y) \right\| = \|y\|_1 \cdot \|p(y)\| = \|y\|_1.$$

$$\|f(y)\| = a \Leftrightarrow \left\| \|y\|_1 \cdot p(y) \right\| = a \Leftrightarrow \|y\|_1 \cdot \|p(y)\| = a \Leftrightarrow \|y\|_1 = a.$$

f ist surjektiv!

Sei z aus E , dann gilt $z = f\left(\frac{\|z\|}{\|z\|_1} z\right)$.

f ist injektiv!

Sei $f(x) = f(y)$. Falls $f(x) = f(y) = 0$, so muß $x = y = 0$ gelten, da jedes

von 0 verschiedene z aus E auf ein Element aus $E \setminus \{0\}$ abgebildet wird.

Sei also $f(x) = f(y) \neq 0$. Dann muß nach dem obigen $x, y \neq 0$ gelten, somit haben wir: $f(x) = \|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1} = \|y\|_1 \cdot \frac{y}{\|y\|_1} = f(y)$. Nach 2.4

gilt dann aber, da $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_1}, \frac{\|y\|_1}{\|y\|_1} > 0$, $\frac{x}{\|x\|_1} = \frac{y}{\|y\|_1}$, woraus nach

2.2(2) $\frac{x}{\|x\|_1} = \frac{y}{\|y\|_1}$ folgt. Wäre $y \neq x$, so müßte somit $\|y\|_1 \neq$

$\|x\|_1$ sein und somit $f(x) = \|y\|_1 \cdot \frac{y}{\|y\|_1} \neq \|x\|_1 \cdot \frac{y}{\|y\|_1} = \|x\|_1 \cdot \frac{x}{\|x\|_1} =$

$f(x)$. $f\left(\frac{\|y\|_1}{\|y\|_1} y\right) = y = f(\bar{f}(y))$, also ist \bar{f} die Umkehrabbildung von f . □

2.9 Bemerkungen

Durch f werden die abgeschlossenen (offenen) Kugeln in $\|\cdot\|_1$ um den Nullpunkt mit Radius $r \geq 0$ in die abgeschlossenen (offenen) Kugeln in $\|\cdot\|$ transformiert, f ist somit im Nullpunkt stetig. Ebenso werden die Punkte gleichen Abstands $r \geq 0$ vom Nullpunkt in $\|\cdot\|_1$ durch f auf die Punkte mit Abstand $r \geq 0$ vom Nullpunkt in $\|\cdot\|$ abgebildet. Dasselbe gilt mutatis mutandis von \bar{f} , welches somit auch im Nullpunkt stetig ist.

Es erhebt sich die Frage, unter welchen Bedingungen an $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|$ f bzw. \bar{f} stetig sind. Eine Antwort darauf gibt der folgende Satz:

2.10 Satz

Sei f der kanonische Isonormismus zwischen $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$. Falls $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|$ ist (siehe Heuser 7.5, 7.6, p. 57), ist f stetig.

Beweis.

Wir müssen zeigen: $\|f(y_n) - f(y)\| \rightarrow 0$ falls $\|y_n - y\|_1 \rightarrow 0$.

Da f aufgrund der vorigen Bemerkung im Nullpunkt stetig ist, können wir $y \neq 0$ und somit o.B.d.A. $y_n \neq 0$ annehmen, da fast alle y_n in einer den Nullpunkt nicht enthaltenden ε -Kugel um y enthalten sein müssen.

Da $\|y_n - y\|_1 \rightarrow 0$, gilt nach Heuser, 6.1, p. 52, $\|y_n\|_1 \rightarrow \|y\|_1$, und, da $\|\cdot\|_1$ stärker ist als $\|\cdot\|$, folgt aus $\|y_n - y\|_1 \rightarrow 0$ auch $\|y_n - y\| \rightarrow 0$. Somit gilt nach 2.2(3): $p(y_n) \rightarrow p(y)$ und daher $f(y_n) = \|y_n\|_1 \cdot p(y_n) \rightarrow \|y\|_1 \cdot p(y) = f(y)$ gemäß loc. cit. □

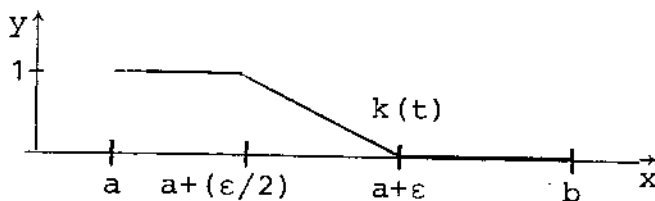
2.11 Folgerungen, Definitionen, Bemerkungen

- (1) Falls auch $\|\cdot\|$ stärker als $\|\cdot\|_1$ ist, $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ somit äquivalent sind, folgt, daß auch \bar{f} , der kanonische Isonormismus zwischen $(E, \|\cdot\|)$ und $(E, \|\cdot\|_1)$, stetig ist. Da $\bar{f}=f^{-1}$, vermittelt dann f einen Homöomorphismus zwischen $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$; er werde der kanonische Homöoisonormismus genannt.
- (2) Seien $(E, \|\cdot\|)$ und $(E_1, \|\cdot\|_1)$ zwei normierte lineare Räume und $f: E \rightarrow E_1$ ein Homöomorphismus dergestalt, daß $\|f(y)\|_1 = \|y\|$ für alle y aus E , f somit ein Homöoisonormismus, dann wollen wir E und E_1 zueinander homöoisonorm nennen. Nach (1) sind also $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$ zueinander homöoisonorm, falls $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|$ einander äquivalent sind.
- (3) Da in einem endlichdimensionalen normierten linearen Raum E alle Normen einander äquivalent sind (Heuser 10.2, P. 69), sind $(E, \|\cdot\|)$ und $(E, \|\cdot\|_1)$ für alle möglichen Wahlen von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ zueinander homöoisonorm, falls $\dim E < \infty$.

(4) Es gibt durchaus Fälle, wo der kanonische Isonormismus k zwischen $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$ stetig, seine Umkehrabbildung \bar{k} aber *nicht* stetig ist. Beispielsweise sei $E=C[a,b]$, der Raum aller auf $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ stetigen Funktionen;

$$\|\cdot\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|, \|\cdot\| = \int_a^b |f(t)| dt; \text{ sicherlich ist } \|\cdot\|_1 \text{ stärker als } \|\cdot\|, \text{ da aus } \|\bar{f}_n - f\|_1 \rightarrow 0 \int_a^b |\bar{f}_n(t) - f(t)| dt \leq \leq \varepsilon |a-b| \text{ folgt für alle } n, \text{ für welche } \|\bar{f}_n - f\|_1 \leq \varepsilon \text{ gilt.}$$

Somit ist k nach dem obigen Theorem stetig. \bar{k} , die Umkehrabbildung von k , kann aber unmöglich stetig sein, da hieraus sofort folgte, daß $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|)$ zueinander homöomorph sind. $(E, \|\cdot\|_1)$ ist aber vollständig und somit von zweiter Kategorie, während $(E, \|\cdot\|)$ mager ist. Magerkeit ist aber eine topologische Invariante. Zum Beweis, daß $(E, \|\cdot\|)$ mager ist, siehe Oxtoby, Measure and Category, p. 43; der dortige Beweis ist zwar für $R[a,b]$ durchgeführt, falls wir aber $g = f \circ + 2(2M+1)k$, k die unten skizzierte Funktion, setzen, gilt $\|f \circ - g\| \geq (2M+1)\varepsilon$,



und der Rest des Beweises läuft wörtlich weiter.

2.12 Satz

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein NLR und V ein Vektorraum über demselben Skalarkörper K wie E ; ferner vermittele $k:V \rightarrow E$ eine injektive und lineare Abbildung von V nach E . Dann ist für x aus V durch $\|x\|_k := \|k(x)\|$ eine Norm erklärt. Falls k noch zusätzlich surjektiv ist, vermittelt k einen Normisomorphismus zwischen $(V, \|\cdot\|_k)$ und $(E, \|\cdot\|)$.

Beweis.

$$\|x\|_k = \|k(x)\| \geq 0.$$

$$\|x\|_k = 0 \sim \|k(x)\| = 0 \sim k(x) = 0 \sim x = 0, \text{ da } k \text{ injektiv.}$$

$$x = 0 \sim k(x) = 0, \text{ da } k \text{ linear, } \sim 0 = \|k(x)\| = \|x\|_k.$$

Sei $\lambda \in K$.

$$\|\lambda x\|_k = \|k(\lambda x)\| = \|\lambda k(x)\| = |\lambda| \cdot \|k(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|_k.$$

(Linearität von k , Homogenität von $\|\cdot\|$).

$$\|x+y\|_k = \|k(x+y)\| = \|k(x)+k(y)\| \leq \|k(x)\| + \|k(y)\| = \|x\|_k + \|y\|_k. \text{ (Linearität von } k, \text{ Dreiecksungleichung für } \|\cdot\|).$$



2.13 Definition

Sei $V = V^n$ ein n -dimensionaler Vektorraum über $K, K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Da V n -dimensional ist, existiert eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, derart, daß jedes x aus V sich *eindeutig*

in der Form $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \alpha_i \in K, i = 1, \dots, n$, darstellen läßt.

Wir definieren eine Abbildung k von V^n nach $K^n := K \times \dots \times K$ wie folgt:

$$k: \begin{cases} V^n \rightarrow K^n \\ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \mapsto k(x) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{cases}$$

k ist offensichtlich eine isomorphe Abbildung zwischen V^n und K^n ; k werde der kanonische Isomorphismus zwischen V^n und K^n bezüglich der Basis B von V^n genannt.

2.14 Folgerung

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf K , so wird K^n durch

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_s := \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\| \quad \text{ein normierter linearer Raum.}$$

Vermöge des kanonischen Isomorphismus k zwischen K^n und V^n wird dann V^n ein normierter linearer Raum mit der von $\|\cdot\|_s$

auf \mathbb{K}^n mittels k induzierten Norm $\|\cdot\|_k$.

Falls $\|\cdot\|_1$ eine weitere Norm auf V^n ist, so ist $(V^n, \|\cdot\|_1)$ zu $(V^n, \|\cdot\|_k)$ nach 2.11(1) homöoisomorph; $(V^n, \|\cdot\|_k)$ ist aber zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_s)$ vermöge k homöoisomorph, und falls $\|\cdot\|_0$ eine weitere Norm auf \mathbb{K}^n ist, ist wiederum nach loc. cit. $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_0)$ zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_s)$ homöoisomorph, und da die Homöoisomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Menge der normierten linearen Räume definiert, ist $(V^n, \|\cdot\|_1)$ mit beliebigem $\|\cdot\|_1$ zu $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_0)$ mit beliebigem $\|\cdot\|_0$ homöoisomorph; insbesondere geht bei einem Homöoisomorphismus f zwischen den beiden letzt erwähnten Räumen die Menge aller Punkte aus \mathbb{K}^n , welche vom Nullpunkt in \mathbb{K}^n denselben Abstand $r \geq 0$ besitzen, in diejenigen Punkte von V^n über, welche in V^n vom Nullpunkt in V^n bezüglich $\|\cdot\|_1$ denselben Abstand r besitzen.

2.15 Bemerkungen zu dem Fall, daß $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$, V^n somit ein Vektorraum über \mathbb{C} ist.

$$\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1 + i \cdot y_1, \dots, x_n + i \cdot y_n) \rightarrow f(z) := \\ \quad := (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \end{cases}$$

vermittelt eine isometrische Abbildung zwischen \mathbb{C}^n , versehen mit der euklidischen Metrik und \mathbb{R}^{2n} , versehen mit der euklidischen Metrik.

$$d(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i^{(1)} - z_i^{(2)}|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2 + (y_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2} = d(f(z^{(1)}), f(z^{(2)})).$$

\mathbb{C}^n , versehen mit der euklidischen Norm und \mathbb{R}^{2n} , ebenfalls versehen mit der euklidischen Norm, sind somit homöoisomorph, und deshalb ist jeder n -dimensionale Vektorraum über den komplexen Zahlen, mit einer beliebigen Norm versehen, zu \mathbb{R}^{2n} , mit der euklidischen Norm versehen, homöoisomorph.

Wir benötigen auch noch einige Aussagen über den Zusammenhang in normierten linearen Räumen; wir wollen nun diese bereitstellen:

2.16 Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Skalkörper, welcher die reellen Zahlen enthält. Seien x, y zwei beliebige Punkte aus E . Unter der Verbindungsstrecke von x und y , bezeichnet \overline{xy} , wollen wir folgende Teilmenge von V verstehen:

$$\overline{xy} := \{z = z(\lambda) \in V \mid z = x + \lambda(y-x), \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

$x = z(0)$ heiÙe der Anfangspunkt von \overline{xy} , $y = z(1)$ der Endpunkt.

2.17 Satz

Die Verbindungsstrecke \overline{xy} zweier Punkte eines normierten linearen Raumes E ist ein Bogen, im Falle $x \neq y$ ist sie sogar ein JORDANbogen.

Für die Bezeichnungen "Bogen, "Jordanbogen", siehe: Kuhn, 2.3(1), p. 124.

Beweis.

Wir müssen zeigen, daß \overline{xy} das Bild in E einer geeigneten, auf $I = [0, 1]$ definierten stetigen Abbildung f von I nach E ist.

Wir setzen $f(t) = x + t(y-x)$ und erhalten, falls $t_n \rightarrow t$,
 $\|f(t_n) - f(t)\| = \|x + t_n(y-x) - (x + t(y-x))\| = \|(t_n - t)(y-x)\| = |t_n - t| \cdot \|y-x\| \rightarrow 0$, falls $t_n \rightarrow t$.

Sei $y \neq x$, also $y-x \neq 0$, ferner sei $f(t_1) = f(t_2)$, dann gilt:
 $x + t_1(y-x) = x + t_2(y-x) \sim t_1(y-x) = t_2(y-x) \sim$
 $\sim 0 = (t_1 - t_2)(y-x)$; wäre $t_1 - t_2 \neq 0$, so hätten wir: $0 = y-x$, also $y=x$, im Widerspruch zur Voraussetzung; somit muß $t_1 = t_2$ gelten, und f ist daher injektiv. □

2.18 Hilfssatz

Sei V ein Vektorraum, U ein echter Unterraum und U' der Komplementärraum von V .

$p: E \rightarrow U$ sei der Projektor parallel zu U' ;

$p': E \rightarrow U'$ sei der Projektor parallel zu U .

Dann gilt:

$$x \in U \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow p'(x) = 0.$$

Beweis:

$V = U \oplus U'$. Für alle x aus V gilt: $x = x_U + x_{U'}$, $x_U = p(x) \in U$, $x_{U'} = p'(x) \in U'$, wobei $x_U, x_{U'}$ eindeutig bestimmt sind.

$p(x) = x \sim x \in U \sim x_{U'} = x - x_U \in U$; andererseits: $x_{U'} \in U'$, also $p'(x) = x_{U'} \in U \cap U' = \{0\}$; somit: $p'(x) = 0$.

Sei umgekehrt $p'(x) = 0 \sim x_{U'} = p'(x) = 0 \sim x = x_U = p(x) \in U$. □

2.19 Hilfssatz

Sei U ein echter Unterraum des Vektorraums V , dessen Skalar-
körper die reellen Zahlen umfaßt. Sei $x \in U$, $y \notin U$, dann gilt:
 $\overline{yx} \setminus \{x\} = \overline{xy} \setminus \{x\} \subseteq U$.

Beweis.

$\overline{xy} \setminus \{x\} := M := \{z \in V \mid z = (1-\lambda)x + \lambda y, 0 < \lambda \leq 1\}$.

U' sei der Komplementärraum von U und p beziehungsweise p'
die Projektionen parallel U bzw. U' .

$x \in U \sim p'(x) = 0$ (2.18).

$y \notin U \sim p'(y) \neq 0$ (2.18).

Für alle $z \in M$ gilt:

$p'(z) = p'(y + (1-\lambda)x) = p'(y) + (1-\lambda)p'(x) = \lambda p'(y) \neq 0$,
da $\lambda > 0 \sim$ Behauptung. □

2.20 Satz

Sei E ein normierter linearer Raum, dessen Dimension größer
gleich zwei ist. U sei ein echter Unterraum von E und A eine
Teilmenge von U . Dann gilt:

- (1) Falls die Kodimension von U gleich eins ist, U somit eine
Hyperebene von E ist, und A eine echte Teilmenge von U
ist, ist $[A$ bogenzusammenhängend.
- (2) Falls die Kodimension von U größer gleich zwei ist, ist
für jede Teilmenge A von U , $[A$ bogenzusammenhängend.

Beweis.

(1) Seien $x, y \in [A \cap U$, so gibt es, da U ein echter Unterraum
von E ist, ein z aus $E \setminus U$. Nach Hilfssatz 2.19 gilt:

$\overline{xz} \setminus \{x\}, \overline{zy} \setminus \{y\} \subseteq U \subseteq [A$. Da $x, y \in [A$, gilt:

$\overline{xz} \cup \overline{zy} \subseteq [A$; $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ ist aber ein in $[A$ verlaufender Bogen, der
 x mit y verbindet, da der Endpunkt z von \overline{xz} mit dem Anfangspunkt
von \overline{zy} übereinstimmt.

Falls $x \in [A \cap U$, $y \in [A \cap U$, so verläuft wiederum $\overline{xy} \setminus \{x\}$ ganz
in $[U \subseteq [A$, und somit \overline{xy} ganz in $[A$, da $x \in [A$.

Falls $x, y \in [A \setminus U$, muß es mindestens einen Punkt $z \in [A \cap U$ geben,
da A eine echte Teilmenge von U ist; wiederum gilt:

$\overline{xz} \setminus \{z\}, \overline{zy} \setminus \{z\} \subseteq U \subseteq [A$ und somit $\overline{xz} \cup \overline{zy} \subseteq [A$; $\overline{xz} \cup \overline{zy}$ ist
wiederum ein x mit y verbindender Bogen (s.o.).

(2) Da jeder Teilraum U' mit $\text{codim } U' \geq 2$ echte Teilmenge
eines Teilraumes U der Kodimension eins ist, folgt die Behaup-
tung aus (1), wegen $A \subseteq U' \subset U$, $\text{codim } U = 1$. □

2.21 Bemerkungen

- (1) Falls E ein NLR über \mathbb{C} ist, kann E in kanonischer Weise als Vektorraum $E_{\mathbb{R}}$ über den reellen Zahlen aufgefaßt werden. (Heuser, Aufgabe 2, p. 40.) Falls $B = \{x_{\lambda}, \lambda \in A\}$ eine Hamelbasis von E als Vektorraum über \mathbb{C} ist, gilt, daß $\{x_{\lambda}, \lambda \in A\} \cup \{ix_{\lambda}, \lambda \in A\}$ eine Basis von $E_{\mathbb{R}}$ als Vektorraum über den reellen Zahlen bildet. Die Aussagen gelten dann schon, falls die Menge A eine echte Teilmenge einer Hyperebene von $E_{\mathbb{R}}$ bzw. beliebige Teilmenge eines Unterraums U von $E_{\mathbb{R}}$ mit $\text{codim } U \geq 2$ ist, da die Verbindungsstrecke \overline{xy} zweier Punkte aus E durch den Übergang zu $E_{\mathbb{R}}$ nicht verändert wird; (bei der Bildung von \overline{xy} treten nur reelle Skalare auf!).
- (2) Jeder NLR E mit $\dim E \geq 2$ ist zerlegungspunktfrei und für alle x aus E ist $E \setminus \{x\}$ bogenzusammenhängend, da $\{0\}$ echte Teilmenge jedes eindimensionalen Unterraums, $\{x \neq 0\}$ echte Teilmenge des eindimensionalen Unterraums $[x] =$ lineare Hülle von x ist. Das soeben Gesagte gilt für alle NLRs E über \mathbb{C} , da nach dem in (1) Ausgeführten $\dim E_{\mathbb{R}} \geq 2$.
- (3) Im Falle, daß E ein NLR über \mathbb{R} , ist die Voraussetzung $\dim E \geq 2$ in 2.20 notwendig, da E , falls $\dim E = 1$, homöomorph zu \mathbb{R} ist. Da jeder Punkt von \mathbb{R} Zerlegungspunkt von \mathbb{R} ist und somit jeder Punkt von E Zerlegungspunkt von E ist, $\{0\}$ jedoch der einzige echte Unterraum von E ist, hängt $E \setminus \{0\}$ nicht zusammen.
- (4) In Teilaussage (1) von Satz 2.20 kann auf die Forderung, daß A echte Teilmenge der Hyperebene U ist, nicht verzichtet werden, da jede Hyperebene des \mathbb{R}^n diesen zerlegt. ("Man braucht immer einen Punkt, um durch eine Hyperebene schlüpfen zu können.")

2.22 Hilfssatz

Sei E ein NLR, dann ist für jedes x aus E $K_{\epsilon}(x) = \{y \in E \mid \|x-y\| < \epsilon\}$ konvex.

Beweis:

Seien $u, v \in K_{\epsilon}(x)$. Dann gilt für jedes $z = z(\lambda)$ aus \overline{uv} :

$$\begin{aligned} \|z-x\| &= \|u + \lambda(v-u) - x\| = \|(1-\lambda)u - (1-\lambda)x + \lambda v - \lambda x\| \leq \\ &\leq |1-\lambda| \cdot \|u-x\| + |\lambda| \cdot \|v-x\| = (1-\lambda)\|u-x\| + \lambda\|v-x\|, \text{ da } 0 \leq \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

Darüberhinaus haben wir: $\|u-x\|, \|v-x\| < \epsilon$ und deswegen gilt:

$$\|z-x\| \leq (1-\lambda)\|u-x\| + \lambda\|v-x\| < (1-\lambda)\epsilon + \lambda\epsilon = \epsilon. \quad \square$$

2.23 Folgerung

- (1) Da die $K_\epsilon(x)$ für jedes x aus E eine Umgebungsbasis bilden, und jede $K_\epsilon(x)$ somit bogenzusammenhängend ist, haben wir, daß jeder normierte lineare Raum lokal bogenzusammenhängend und damit a fortiori lokal zusammenhängend ist, so daß die Aussagen der Sätze 4.3, Kuhn, p. 134 und 4.11, Kuhn, p. 136 in jedem NLR E gelten. Die Komponenten jeder offenen Menge sind somit Gebiete, und eine offene Menge hängt genau dann zusammen, wenn sie bogenzusammenhängend ist.
- (2) Jeder NLR E ist konvex, da für alle x, y aus E $\overline{xy} \subseteq E$ gilt; somit ist jeder NLR E bogenzusammenhängend und damit zusammenhängend.

2.24 Definition

Sei E ein NLR über K und $\lambda \neq 0$ aus K .

$s_\lambda: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto s_\lambda(x) = \lambda x \end{cases}$ werde Streckung von E um λ , λ werde

der Streckungsfaktor genannt. Offenkundig vermittelt s_λ eine topologische Selbstabbildung von E .

2.25 Satz

Sei E ein NLR über \mathbb{R} mit $\dim E \geq 2$ oder ein beliebiger NLR $\neq \{0\}$ über \mathbb{C} .

$+K_r := \{y \in E \mid \|y\| > r \geq 0\}$ ist für jedes $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ bogenzusammenhängend.

Beweis:

Sei $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. $S_a := \{y \in E \mid \|y\| = a\}$. S_a ist das Bild der nach 2.3 bogenzusammenhängenden Menge S_1 unter der Streckung mit dem Faktor a , somit ebenfalls bogenzusammenhängend.

Seien nun x, y aus $+K_r$:

1. Fall: $\|x\| = \|y\| = b > r$. Dann liegen x und y in der bogenzusammenhängenden Menge S_b und wir sind fertig.

2. Fall: $\|x\| < \|y\|$, o.B.d.A. . Dann liegen alle Punkte aus \overline{xz} , wobei $z = \|y\|x$ in $+K_r$ und z, y sind in der bogenzusammenhängenden Menge $S_{\|y\|}$ enthalten, es gibt somit einen Bogen B , der z mit y verbindet und in $S_{\|y\|}$ enthalten ist; $\overline{xz} \cup B$ ist dann der gewünschte, ganz in $+K_r$ enthaltene Bogen, der x mit y verbindet.

□

3. Einiges über die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung

Bei der Durchführung der Arbeit haben wir es häufig mit Z^p , der ALEXANDROFFSchen Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, zu tun. Wir stellen daher im folgenden einige Tatsachen über die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung beliebiger topologischer Räume im allgemeinen und des \mathbb{R}^p im besonderen zusammen.

3.1 Definition und Satz

Sei (X, \mathcal{X}) ein beliebiger topologischer Raum und $w \in X$ ein neues Element.

$$X_w := X \cup \{w\}.$$

Auf X_w wird durch $\mathcal{X}_w := \{A \subseteq X_w \mid A \subseteq X \text{ und } A \text{ offen in } X, \text{ bzw. } A = \{w\} \cup G, G \subseteq X, G \text{ offen in } X, X \setminus G \text{ kompakt in } X\}$ eine Topologie erklärt. (Kuhn, 3.3, p. 106; beim dortigen Beweis wurde nirgends die vorausgesetzte Nichtkompaktheit von X benutzt!)

Jede in X offene Menge G , für welche $X \setminus G$ kompakt ist, wollen wir eine punktierte Umgebung von w in X_w nennen. Jede in X_w offene Menge, die w enthält, läßt sich somit als Vereinigung von $\{w\}$ und einer punktierten Umgebung von w darstellen.

\mathcal{X}_w wollen wir die ALEXANDROFFSche Topologie von X auf X_w nennen. (X_w, \mathcal{X}_w) sei die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von (X, \mathcal{X}) ; abgekürzt AEP. Alle Punkte aus X wollen wir "endliche" Punkte von X_w , w den "unendlichen" oder "uneigentlichen" Punkt von X_w nennen.

3.2 Satz

$\{w\} \in \mathcal{X}_w \Leftrightarrow X$ ist kompakt.

Beweis:

Sei $\{w\} \in \mathcal{X}_w \sim \{w\} = \{w\} \cup H$, H offen in X , $X \setminus H$ kompakt; offensichtlich ist $H = \emptyset$ die einzige in X offene Menge für die $\{w\} = \{w\} \cup H$ gelten kann, da für jedes $\emptyset \neq H \subseteq X$, $\{w\} \subset \{w\} \cup H$ gilt; also muß $X \setminus \emptyset = X$ kompakt sein.

Sei nun X kompakt; da $\{w\} = \{w\} \cup \emptyset$, \emptyset offen in X , $X \setminus \emptyset = X$ kompakt, haben wir $\{w\} \in \mathcal{X}_w$. □

Da die ALEXANDROFFSche Topologie hauptsächlich eingeführt wurde, um nichtkompakte Räume zu kompaktifizieren, wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß X ein nichtkompakter topologischer Raum ist, und somit $\{w\} \notin \mathcal{X}_w$ gilt. In Zukunft werden also nur noch nichtkompakte topologische Räume X betrachtet. wir haben dann nach Kuhn, 3.3, p. 106, daß X ein

Teilraum von X_w , X dicht in X_w und X_w ein kompakter topologischer Raum ist. Aus der Tatsache, daß X ein Teilraum von X_w ist, ergibt sich wegen der Absolutheit von Kompaktheit, Zusammenhang und Bogenzusammenhang:

3.3 Satz

$A \subseteq X$ ist genau dann in X kompakt bzw. (bogen-)zusammenhängend, wenn A als Teilmenge von X_w kompakt bzw. (bogen-)zusammenhängend ist.

3.4 Satz

Sei (X, X) ein topologischer Raum, (X_w, X_w) seine ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung.

Für $x \in X$ bilden die in X offenen Mengen, welche x enthalten, eine Umgebungsbasis von x bzgl. X_w .

Beweis:

Sei U eine Umgebung von x in X_w , dann gilt $U \supseteq O \ni x$, O offen in X_w . O ist dann entweder in O offen, oder es gilt: $O = O' \cup \{w\}$, O' in X offen; da $x \neq w$ muß $x \in O'$ gelten und wir haben, daß U auf alle Fälle eine in X offene Menge A mit $x \in A$ umfaßt. \square

3.5 Satz

Falls x in X eine Umgebungsbasis aus kompakten bzw. (bogen-)zusammenhängenden Mengen besitzt, so besitzt x ebenfalls eine Basis aus kompakten bzw. (bogen-)zusammenhängenden Mengen in X_w .

Beweis:

Jede Umgebung von x in X_w umfaßt nach 3.4 eine in X offene Menge O mit $x \in O$. O umfaßt somit als Umgebung von x nach der Voraussetzung eine in X kompakte bzw. (bogen-)zusammenhängende Menge, welche wegen der Absolutheit dieser Eigenschaften auch in X_w diese Eigenschaften besitzt. \square

3.6 Folgerung

Falls X lokal (bogen-)zusammenhängend ist, muß zum Nachweis, daß X_w lokal (bogen-)zusammenhängend ist, nur noch gezeigt werden, daß w eine Umgebungsbasis aus (bogen-)zusammenhängenden Mengen besitzt. (Kuhn, 4.1, p. 131, 4.3, p. 135.)

3.7 Bemerkungen und Definitionen

(1) Sei X ein topologischer Raum, X_w seine ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung und $A \subseteq X$; unter \bar{A} verstehen wir die abgeschlossene Hülle von A in X , unter \bar{A}_w die abge-

geschlossene Hülle von A in X_w . (Falls $B \subseteq X_w$, bezeichne \bar{B}_w die Abschließung von B in X_w !)

- (2) Wir nennen eine Teilmenge A von X präkompakt in X , falls \bar{A} , ihre abgeschlossene Hülle in X , kompakt in X ist.
- (3) Die Vereinigung zweier präkompakter Teilmengen A, B von X ist wiederum präkompakt, denn $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, \bar{A}, \bar{B} kompakt, und $\bar{A} \cup \bar{B}$ ist als Vereinigung zweier kompakter Mengen selbst kompakt; durch vollständige Induktion ergibt sich sofort, daß jede endliche Vereinigung präkompakter Mengen präkompakt ist.
- (4) Falls X nicht kompakt ist, kann für *jede* Teilmenge A von X höchstens eine der beiden Mengen $A, X \setminus A$ präkompakt sein, da ja sonst $X = \bar{X} = \overline{A \cup X \setminus A}$, X somit kompakt sein müßte; das Komplement jeder präkompakten Teilmenge B von X ist somit nicht präkompakt.
- (5) Jede Teilmenge C einer präkompakten Menge $A \subseteq X$ ist selbst präkompakt, da $\bar{C} \subseteq \bar{A}$, \bar{A} kompakt und \bar{C} somit als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge \bar{A} selbst kompakt sein muß. (Kuhn, 1.4, p. 98.)
- (6) In einem topologischen Raum X , in welchem alle kompakten Mengen abgeschlossen sind, HAUSDORFFräume sind beispielsweise solche Räume, ist jede kompakte Menge präkompakt.
- (7) Jede einpunktige Teilmenge $\{x\}$ eines topologischen Raumes X ist als endliche Teilmenge kompakt und somit nach (6) präkompakt, falls $\{x\}$ in X abgeschlossen ist.
- (7) In einem endlichdimensionalen NLR E ist eine Teilmenge A genau dann präkompakt, wenn sie beschränkt ist; denn falls \bar{A} kompakt, so gilt $A \subseteq \bar{A}$, \bar{A} ist als kompakte Menge beschränkt und somit muß wegen der Erbllichkeit der Beschränktheit auch A beschränkt sein. Falls nun A beschränkt ist, gibt es eine geeignete Kugel $K_r(0)$ um den Nullpunkt, welche A enthält, also $A \subseteq K_r(0)$, woraus $\overline{A \subseteq K_r(0)} \subseteq K_{r+1}(0)$ folgt. $\overline{K_r(0)}$ ist als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines endlichdimensionalen NLRs kompakt und somit auch \bar{A} als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge.
- (8) Trivialerweise ist in einem kompakten Raum X jede Teilmenge A präkompakt, da $A \subseteq \bar{A} \subseteq X$, \bar{A} als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X kompakt.

Die Frage, wann eine in X offene Menge A in X_w offen ist, besitzt aufgrund der Definition der ALEXANDROFFschen Topologie die triviale Antwort, daß jede in X offene Menge auch in X_w offen ist; etwas

verzwickter wird die Antwort auf die Frage, unter welchen Umständen eine in X abgeschlossene Menge in X_w abgeschlossen ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $A \subseteq X$ in X_w abgeschlossen ist, gibt der folgende Satz:

3.8 Satz

Sei $A \subseteq X$ beliebig, X nicht kompakt.

$$\bar{A}_w = \begin{cases} \bar{A}, & \text{falls } A \text{ präkompakt in } X \\ \bar{A} \cup \{w\}, & \text{falls } A \text{ nicht präkompakt in } X \end{cases}$$

Beweis:

Da X ein Teilraum von X_w gilt nach Kuhn, 7.5, p.44:

(1) $\bar{A} = \bar{A}_w \cap X \subseteq \bar{A}_w$.

$$\bar{A}_w = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \subseteq X_w, F \text{ abgeschlossen in } X_w}} F$$

Sei nun \bar{A} kompakt in X:

$X_w \setminus \bar{A} = \{w\} \cup (X \setminus \bar{A})$, $X \setminus \bar{A}$ offen in X, $X \setminus (X \setminus \bar{A}) = \bar{A}$, kompakt in X, somit $X_w \setminus \bar{A}$ offen in X_w $\sim \bar{A}$ abgeschlossen in X_w $\sim \bar{A} \supseteq \bar{A}_w$ \sim Beh.

Sei nun \bar{A} nicht kompakt in X. Dann enthält jede in X_w abgeschlossene Menge F, welche A umfaßt, den Punkt w; gäbe es nämlich eine in X_w abgeschlossene Teilmenge F_1 mit $A \subseteq F_1$, $w \notin F_1$, so wäre F_1 als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X_w selbst kompakt und somit hätten wir $\bar{A} \subseteq \overline{F_1} = F_1$, \bar{A} kompakt als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge F_1 ; Widerspruch zur Voraussetzung!

(2) Somit muß $w \in \bar{A}_w$ gelten.

Andererseits ist aber die Vereinigung jeder in X abgeschlossenen Menge F mit w in X_w abgeschlossen, denn $X_w \setminus (F \cup \{w\}) = X \setminus F$, offen in X und somit offen in X_w .

Also gilt: $A \subseteq \bar{A} \cup \{w\}$, $\bar{A} \cup \{w\}$ abgeschlossen in X_w , somit $\bar{A}_w \subseteq \bar{A} \cup \{w\}$; da aber $w \in \bar{A}_w$ ((2)) und $\bar{A} \subseteq \bar{A}_w$ ((1)), muß $\bar{A} \cup \{w\} \subseteq \bar{A}_w \cup \{w\} = \bar{A}_w$ gelten, woraus die Behauptung folgt. □

3.8.1 Satz

Sei X ein topologischer Raum, X_w seine AEP, $A \subseteq X$.

(1) Falls A in X_w abgeschlossen ist, ist A in X kompakt.

(2) Falls A in X kompakt und abgeschlossen ist, ist A in X_w abgeschlossen.

Beweis:

(1) A ist als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X_w in X_w kompakt und somit als Teilmenge von X in X kompakt. (3.3 1)

(2) A in X kompakt und abgeschlossen $\sim A$ in X präkompakt $\sim \bar{A}_w = A$ (3.8). □

3.8.2 Bemerkungen

Falls X ein topologischer HAUSDORFFraum ist (z. B. $\mathbb{R}^p, \mathbb{Z}^p$), folgt in (1), daß A auch als in X kompakte Menge in X abgeschlossen ist; in (2) ist dann nur die Voraussetzung A in X kompakt erforderlich, da in topologischen HAUSDORFFräumen kompakte Teilmenge abgeschlossen sind. (Kuhn, 1.6, p. 99.)

3.9 Satz

Sei X ein nichtkompakter topologischer Raum, X_w seine Einpunktkompaktifizierung und $A \subseteq X$.

(1) $\bar{A} = \bar{A}_w \Leftrightarrow A$ ist präkompakt $\Leftrightarrow w \notin \bar{A}_w$.

(2) Sei $A \subseteq X$, A nicht präkompakt und zusammenhängend in X , ferner sei $B \subseteq X_w$ und es gelte: $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, dann ist $B \cup \{w\}$ zusammenhängend in X_w .

(3) Seien C_1, C_2 zwei Teilmengen von X , welche die Voraussetzungen an B in (2) erfüllen. Dann hängt $C_1 \cup C_2 \cup \{w\}$ in X_w zusammen.

(4) Falls X zusammenhängend ist, hängt auch X_w zusammen.

(5) Falls $A \subseteq X$ in X nirgendsdicht ist, gilt: auch \bar{A}_w , die Abschließung von A in X_w , besitzt in X_w keine inneren Punkte.

Beweis:

(1) A präkompakt $\sim \bar{A} = \bar{A}_w \sim w \notin \bar{A}_w = \bar{A} \subseteq X$.

A nicht präkompakt $\sim \bar{A}_w = \bar{A} \cup \{w\} \sim w \in \bar{A}_w$.

(2) $A \subseteq B \cup \{w\} \subseteq \bar{A} \cup \{w\} = \bar{A}_w$; Kuhn 1.7, p. 119, liefert dann die Behauptung, da A auch in X_w zusammenhängt.

(3) $C_1 \cup C_2 \cup \{w\} = (C_1 \cup \{w\}) \cup (C_2 \cup \{w\})$, nach (2) ist $C_i \cup \{w\}$, $i=1,2$, zusammenhängend; Kuhn, 1.11, p. 120, liefert dann die Behauptung, da $\{w\} \subseteq (C_1 \cup \{w\}) \cap (C_2 \cup \{w\})$.

(4) $\bar{X}_w = X_w = X \cup \{w\}$; (2) liefert dann die Behauptung.

(5) A nirgendsdicht in X bedeutet: $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. Somit gibt es keine in X offene Menge G , welche in \bar{A} enthalten ist. $\bar{A}_w \subseteq \bar{A} \cup \{w\}$ (3.8); gäbe es eine in X_w offene Menge G , welche in \bar{A}_w ent-

halten ist, so kann G keine in X enthaltene in X offene Menge sein, da aus $G \subseteq \bar{A}_w$ sofort $G \subseteq \bar{A}$ folgt. Da X nicht kompakt ist, ist $\{w\}$ nicht offen in X_w (3.2) und jede in X_w offene Menge G , welche w enthält, muß daher von der Form $G = G' \cup \{w\}$, $G' \neq \emptyset$, offen in X , $X \setminus G'$ kompakt, sein. Wäre $G \subseteq \bar{A}_w$, so folgte wiederum $G' \subseteq \bar{A}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit kann überhaupt keine in X_w offene Menge in \bar{A}_w enthalten sein, woraus die Behauptung folgt. □

3.10 Satz

Sei X ein nicht kompakter topologischer Raum und C eine prä-kompakte Teilmenge mit der Eigenschaft, daß $X \setminus C$ zusammenhängend ist.

Dann ist auch $(X \setminus C) \cup \{w\}$ in X_w zusammenhängend.

Beweis:

Nach 3.7(4) ist $X \setminus C$ als Komplement einer präkompakten Teilmenge selbst nicht präkompakt. Teilaussage (2) des vorigen Satzes 3.9 liefert dann die Behauptung. □

3.11 Satz

Sei X ein nichtkompakter topologischer T_1 -Raum und X_w seine Einpunktkompaktifizierung. Sei x aus X beliebig. Falls $X \setminus \{x\}$ in X zusammenhängt, dann hängt auch $X_w \setminus \{x\}$ in X_w zusammen.

Beweis:

Da X ein T_1 -Raum ist, ist jede einpunktige Menge abgeschlossen, also auch $\{x\}$. Nach 3.7(4)(7) ist dann $\{x\}$ präkompakt und $X \setminus \{x\}$ nicht präkompakt. Der vorige Satz 3.10 liefert dann die Behauptung. □

3.12 Folgerung

- (1) Falls X ein nicht kompakter, zerlegungspunktfreier topologischer T_1 -Raum ist, ist kein endlicher Punkt Zerlegungspunkt von X_w .
- (2) w kann nur dann Zerlegungspunkt von X_w sein, wenn X nicht zusammenhängt und somit erhalten wir aus (1) und 3.9(4): Die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung eines nicht-kompakten, zusammenhängenden, zerlegungspunktfreien T_1 -Raumes X ist zusammenhängend und zerlegungspunktfrei.
- (3) Da jeder normierte lineare Raum E über \mathbb{R} , mit $\dim E \geq 2$, bzw. jeder NLR E über \mathbb{C} nach 2.21(2) zusammenhängend, zerlegungspunktfrei und als metrischer Raum ein HAUSDORFFraum,

halten ist, so kann G keine in X enthaltene in X offene Menge sein, da aus $G \subseteq \bar{A}_w$ sofort $G \subseteq \bar{A}$ folgt. Da X nicht kompakt ist, ist $\{w\}$ nicht offen in X_w (3.2) und jede in X_w offene Menge G , welche w enthält, muß daher von der Form $G = G' \cup \{w\}$, $G' \neq \emptyset$, offen in X , $X \setminus G'$ kompakt, sein. Wäre $G \subseteq \bar{A}_w$, so folgte wiederum $G' \subseteq \bar{A}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit kann überhaupt keine in X_w offene Menge in \bar{A}_w enthalten sein, woraus die Behauptung folgt. □

3.10 Satz

Sei X ein nicht kompakter topologischer Raum und C eine prä-kompakte Teilmenge mit der Eigenschaft, daß $X \setminus C$ zusammenhängend ist.

Dann ist auch $(X \setminus C) \cup \{w\}$ in X_w zusammenhängend.

Beweis:

Nach 3.7(4) ist $X \setminus C$ als Komplement einer präkompakten Teilmenge selbst nicht präkompakt. Teilaussage (2) des vorigen Satzes 3.9 liefert dann die Behauptung. □

3.11 Satz

Sei X ein nichtkompakter topologischer T_1 -Raum und X_w seine Einpunktkompaktifizierung. Sei x aus X beliebig. Falls $X \setminus \{x\}$ in X zusammenhängt, dann hängt auch $X_w \setminus \{x\}$ in X_w zusammen.

Beweis:

Da X ein T_1 -Raum ist, ist jede einpunktige Menge abgeschlossen, also auch $\{x\}$. Nach 3.7(4)(7) ist dann $\{x\}$ präkompakt und $X \setminus \{x\}$ nicht präkompakt. Der vorige Satz 3.10 liefert dann die Behauptung. □

3.12 Folgerung

- (1) Falls X ein nicht kompakter, zerlegungspunktfreier topologischer T_1 -Raum ist, ist kein endlicher Punkt Zerlegungspunkt von X_w .
- (2) w kann nur dann Zerlegungspunkt von X_w sein, wenn X nicht zusammenhängt und somit erhalten wir aus (1) und 3.9(4): Die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung eines nicht-kompakten, zusammenhängenden, zerlegungspunktfreien T_1 -Raumes X ist zusammenhängend und zerlegungspunktfrei.
- (3) Da jeder normierte lineare Raum E über \mathbb{R} , mit $\dim E \geq 2$, bzw. jeder NLR E über \mathbb{C} nach 2.21(2) zusammenhängend, zerlegungspunktfrei und als metrischer Raum ein HAUSDORFFraum,

somit a fortiori ein T_1 -Raum ist, ist E_w , die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von E , falls E die oben genannten Voraussetzungen erfüllt, zerlegungspunktfrei und zusammenhängend, insbesondere somit Z^P , die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^p , $p \geq 2$.

3.13 Satz

Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus zwischen den beiden topologischen Räumen X, Y . X_w bzw. Y_w seien deren ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierungen.

Dann ist $\bar{f}: \begin{cases} X_w \rightarrow Y_w, \\ x \mapsto f(x), \quad x \in X \\ w \mapsto w' \end{cases}$ ein Homöomorphismus zwischen X_w und Y_w .

Beweis:

Offenkundig ist \bar{f} eine bijektive Abbildung.

Sei $O \subseteq Y_w$ eine offene Menge.

1. Fall: $w' \notin O \rightsquigarrow \bar{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O)$, offen in X , somit offen in X_w .

2. Fall: $w' \in O \rightsquigarrow O = \{w'\} \cup O'$, O' offen in Y , $Y \setminus O'$ kompakt, also $\bar{f}^{-1}(O) = \bar{f}^{-1}(\{w'\} \cup O') = \bar{f}^{-1}(w') \cup \bar{f}^{-1}(O') = \{w\} \cup f^{-1}(O)$, $f^{-1}(O)$ offen in X , $\bar{f}^{-1}(Y \setminus O') = f^{-1}(Y \setminus O') = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(O') = X \setminus f^{-1}(O')$, kompakt in X , da $Y \setminus O'$ kompakt in Y , somit

$\{w\} \cup f^{-1}(O) = \bar{f}^{-1}(O)$ offen in X_w ; also ist \bar{f} stetig.

Nun zur Offenheit von \bar{f} :

Sei $O \subseteq X_w$ offen in X_w .

1. Fall: $O \subseteq X \quad \bar{f}(O) = f(O)$, offen in Y , somit offen in Y_w .

2. Fall: $w \in O \rightsquigarrow O = \{w\} \cup O'$, O' offen in X , $X \setminus O'$ kompakt.

$\bar{f}(O) = \bar{f}(O' \cup \{w\}) = \bar{f}(O') \cup \bar{f}(w) = f(O') \cup \{w'\}$, $f(O')$ offen in Y ; $f(X \setminus O') = f(X) \setminus f(O') = Y \setminus f(O')$ kompakt, da $X \setminus O'$ kompakt, also ist $\bar{f}(O)$ offen in Y_w .

\bar{f} ist somit offen und stetig, also ein Homöomorphismus. \square

3.14 Satz

Sei X ein nichtkompakter topologischer Raum, in welchem jede kompakte Teilmenge abgeschlossen ist, und A eine abgeschlossene Teilmenge von X . A_w sei $A \cup \{w\}$. Dann stimmt die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von A , A als Teilraum von X aufgefaßt, mit der Spur auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w überein.

Beweis:

Sei C in der ALEXANDROFFSchen Einpunktkompaktifizierung von A offen. Dann gilt es, zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $C \subseteq A$.

Wir haben dann, daß C in A offen ist, es somit eine in X und daher auch in X_w offene Menge O mit $O \cap A = C$ geben muß; da $w \notin C$ gilt: $C = A_w \cap O$ und C gehört somit zur Spurtopologie auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w .

2. Fall: $w \in C$, dann muß es eine in A offene Menge C' , für welche $A \setminus C'$ in A und somit in X kompakt ist, geben, so daß $C = C' \cup \{w\}$ gilt. Da $A \setminus C'$ kompakt und als in X kompakte Teilmenge nach Voraussetzung in X abgeschlossen ist, ist

$O = X \setminus (A \setminus C') = (X \setminus A) \cup C'$ in X offen, und da $X \setminus O = A \setminus C'$ kompakt in X , gilt, daß $O' = O \cup \{w\}$ in X_w offen ist. $O' \cap A_w =$

$= ((X \setminus A) \cup C' \cup \{w\}) \cap (A \cup \{w\}) = C' \cup \{w\} = C$. C gehört somit

zur Spur auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w und wir haben bisher gezeigt, daß die ALEXANDROFFSche Topologie auf A_w gröber als die Spur auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w ist.

Sei nun C ein Element von A_w , der Spur auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w . Wiederum sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $C \subseteq A$.

Dann gilt: $C = O \cap A_w$, O in X_w offen. Da $w \notin C$ gilt $w \notin O$ (wäre $w \in O$, so müßte $w \in C$ sein, da w ebenfalls zu A_w gehört), somit haben wir: O ist in X offen und deshalb muß C in A offen sein, da $C = O \cap (A \cup \{w\}) = O \cap A$.

2. Fall: $w \in C$.

Wiederum haben wir: $C = O \cap A_w$, O offen in X_w . Da $w \in C$, muß auch $w \in O$ gelten; $O' := O \setminus \{w\} \cap X \setminus O'$ kompakt in X , O' offen in X . $C' := C \setminus \{w\}$, somit: $C' = O' \cap A$, also C' offen in A . $A \setminus C' = A \setminus (A \cap O') = A \cap (X \setminus (A \cap O')) = A \cap ((X \setminus A) \cup (X \setminus O')) = A \cap (X \setminus O')$. Da A abgeschlossen, $(X \setminus O')$ kompakt in X und somit voraussetzungsgemäß abgeschlossen in X ist, gilt, daß $A \setminus C' = A \cap (X \setminus O') \subseteq X \setminus O'$ als in X abgeschlossene Teilmenge der in X kompakten Menge $X \setminus O'$ in X und somit als Teilmenge von A in A kompakt ist. Wir haben also, daß C zur ALEXANDROFFSchen Topologie von A_w , A als Teilraum von X aufgefaßt, gehört. Somit muß die Spur auf A_w der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w gröber als die ALEXANDROFFSche Topologie auf A_w sein, woraus mit dem oben gezeigten die Behauptung folgt. □

3.15 Satz

Die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung E_w jedes NLR E über \mathbb{R} , mit $\dim E \geq 1$, ist bogenzusammenhängend.

Beweis.

Je zwei endliche Punkte eines NLR E sind durch ihre Verbindungsstrecke \overline{xy} verbindbar, welche nach 2.17 ein Bogen in E , und da E ein Teilraum von E_w , ein Bogen in E_w ist.

Sei nun x aus $E \setminus \{0\}$. $h(x) = \{y \in E \mid y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}, 1 \leq \lambda < \infty\}$ wird der von x ausgehende positive Halbstrahl genannt. $h(x)$ ist in E abgeschlossen. Da $h(x)$ und E alle Voraussetzungen des vorigen Satzes 3.14 erfüllen (in E als HAUSDORFFraum sind alle kompakten Teilmengen abgeschlossen), ist die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von $h(x)$ gleich $h(x) \cup \{w\}$ und ein Teilraum von E_w , der ALEXANDROFFSchen Einpunktkompaktifizierung von E . Aufgrund des kanonischen Isonormismus (2.8) ist $h(x)$ zu $[1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ homöomorph. Da die Voraussetzungen des vorigen Satzes 3.14 wiederum für $[1, \infty)$, als Teilmenge A und \mathbb{R} als Raum X betrachtet, erfüllt sind, ist die ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung von $[1, \infty)$, welche nach 3.13 zur AEP von $h(x)$ homöomorph ist, gerade $C := s([1, \infty) \cup \{(0, 1)\})$, s , die in Kuhn, p. 105 angegebene stereographische Projektion der x -Achse auf S^1 , die Einheitskreislinie des \mathbb{R}^2 . Offenkundig ist C ein abgeschlossener und zusammenhängender Kreisbogen $B \subset S^1$, welcher $s(1)$, in mathematisch positivem Drehsinne fortschreitend, mit $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$, dem "Nordpol" von S^1 , verbindet. Da $h(x) \cup \{w\}$ zum Kreisbogen B homöomorph ist, ist somit $h(x) \cup \{w\}$ ein Bogen in E_w , welcher x mit w verbindet. Somit läßt sich jeder endliche Punkt aus E_w mit w durch einen Bogen verbinden, da die Null sich mit jedem Punkt $x \neq 0$ aus E durch $\overline{0x}$ verbinden läßt, $\overline{0x} \cup (h(x) \cup \{w\})$ somit ein Bogen ist, der die Null mit w verbindet.

3.16 Folgerungen

- (1) Jeder endlichdimensionale NLR $E \neq \{0\}$ über \mathbb{R} besitzt eine lokalbogenzusammenhängende ALEXANDROFFSche Einpunktkompaktifizierung E_w .
- (2) Jeder endlichdimensionale NLR $E \neq \{0\}$ über \mathbb{C} besitzt eben-

falls eine lokalbogenzusammenhängende AEP E_w .

- (3) In E_w , der AEP eines endlichdimensionalen NLR E über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ist eine offene Menge genau dann zusammenhängend, wenn sie bogenzusammenhängend ist. Die Bogenkomponenten jeder offenen Menge stimmen mit den Komponenten jeder offenen Menge überein; die Komponenten jeder offenen Menge sind Gebiete.

Beweis:

(1) Nach 2.23(1) ist jeder NLR E lokalbogenzusammenhängend, also besitzt nach 3.6 jeder endliche Punkt in E_w eine lokalbogenzusammenhängende Umgebungsbasis. Die Mengen, welche von der Form $\{w\} \cup (E \setminus \overline{K_r(0)})$, $\overline{K_r(0)}$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r um den Nullpunkt sind, bilden eine Umgebungsbasis von w in E_w , da $\overline{K_r(0)}$ in E kompakt (E endlichdimensional!) und jedes Kompaktum K in einem geeigneten $\overline{K_r(0)}$ enthalten ist; für jede in E_w offene und w enthaltende Menge O gilt: $O = O' \setminus \{w\}$, $E \setminus O'$ kompakt, $O' \subseteq E$ offen, somit $E \setminus O' \subseteq \overline{K_r(0)}$ für ein geeignetes $r > 0$, woraus $E \setminus \overline{K_r(0)} \subseteq E \setminus (E \setminus O') = O'$ und $E \setminus \overline{K_r(0)} \cup \{w\} \subseteq O' \cup \{w\}$ folgt. Außerdem verläuft der von einem beliebigen $x \in E \setminus \overline{K_r(0)}$ ausgehende Halbstrahl $h(x)$, der im vorigen Satz 3.15 betrachtet wurde, ganz in $E \setminus \overline{K_r(0)}$, da $\|x\| > r$ und somit $\|y\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \lambda \|x\| \geq \|x\| > r$, für jedes $\lambda \geq 1$, und somit für jedes y aus $h(x)$ gilt. Wir haben somit, daß $h(x) \cup \{w\}$, der x mit w verbindende Bogen, für jedes x aus $E \setminus \overline{K_r(0)}$ ganz in $\{w\} \cup (E \setminus \overline{K_r(0)})$ verläuft; diese Mengen sind somit bogenzusammenhängend.

(2) Falls $\dim = n > 0$, so ist gemäß 2.15, E homöomorph zu \mathbb{R}^{2n} , und somit E_w , gemäß 3.13, homöomorph zu \mathbb{Z}^{2n} , der AEP von \mathbb{R}^{2n} , welche wiederum nach (1) lokalbogenzusammenhängend ist; die Behauptung folgt dann aus der topologischen Invarianz des lokalen Bogenzusammenhangs.

(3) Die Behauptung folgt aus (1), (2) und daraus, daß lokaler Bogenzusammenhang lokalen Zusammenhang impliziert, sowie aus Kuhn, 4.11, p. 136, 4.3, p. 134.

Da eine der zentralen Aussagen der JORDANSchen Kurvensatzes diejenige ist, daß die JORDANKurve Rand *beider* Komplementärgebiete ist, wir die Verallgemeinerung dieses Satzes zunächst aber nur in \mathbb{Z}^p , der AEP von \mathbb{R}^p zur Verfügung haben, müssen wir uns, um den Kurvensatz sozusagen aus \mathbb{Z}^p in den \mathbb{R}^p "herunterholen" zu können, noch etwas mit Rändern in X_w befassen.

3.17 Satz

Sei X ein nicht kompakter topologischer Raum, X_w seine AEP.

Sei $A \subseteq X_w$, mit $Rd_w A := \overline{A}_w \cap \overline{(X_w \setminus A)}_w \subseteq X$.

Dann gilt:

- (1) Falls B diejenige der beiden Mengen, $A, X_w \setminus A$ bezeichnet, welche w nicht enthält, so ist B in X präkompakt.
- (2) $Rd B = Rd_w A = Rd(X \setminus B)$ ($Rd B = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$).

Beweis:

(1) Trivialerweise kann nur eine der beiden Mengen $A, X_w \setminus A$ den Punkt w enthalten. Falls nun B nicht präkompakt wäre, so gälte nach 3.8, daß $\overline{B}_w = \overline{B} \cup \{w\}$. Da aber $w \in E_w \setminus B \subseteq \overline{(E_w \setminus B)}_w$ müßte w in $Rd_w B$ liegen. Dann könnte aber $Rd_w B$ nicht in $X = X_w \setminus \{w\}$ enthalten sein.

(2) Da B präkompakt ist, kann $X \setminus B$ nicht präkompakt sein, wegen der Nichtkompaktheit von X und 3.7(4). Es gilt somit: $\overline{(X \setminus B)}_w = \overline{X \setminus B} \cup \{w\}$ (3.8). Da B präkompakt ist gilt ebenfalls nach 3.8: $\overline{B}_w = \overline{B}$, $w \notin \overline{B}$ (3.9(1)). $Rd_w A = Rd_w B = \overline{B}_w \cap \overline{(X_w \setminus B)}_w = \overline{B} \cap \overline{(\{X_w \setminus \{w\} \setminus B\} \cup \{w\})}_w = \overline{B} \cap \left[\overline{(X \setminus B)}_w \cup \{w\} \right] = \overline{B} \cap \overline{(X \setminus B) \cup \{w\}} = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B} = Rd B = Rd(X \setminus B)$. □

3.18 Folgerung

Falls $X = E \neq \{0\}$ ein NLR, E_w seine AEP, dann muß, falls es ein $A \subseteq E_w$ mit $Rd_w A \subseteq E$ gibt, eine der beiden Mengen $A, E_w \setminus A$ beschränkt sein. Falls o.B.d.A. A beschränkt ist, gilt: $Rd_w A = Rd A = Rd(E \setminus A)$.

Beweis:

3.17 und die Tatsache, daß nur beschränkte Teilmengen metrischer Räume präkompakt sein können!

3.18.1 Satz

Sei X ein topologischer Raum und X_w seine AEP. $A \subseteq X$ sei kompakt und abgeschlossen, dann gilt: $Rd A = Rd_w A$.

Beweis:

$\overline{A} = \overline{A}_w = \overline{A}_w$ (3.8). $\overline{X \setminus A} \subseteq \overline{(X \setminus A)}_w \subseteq \overline{(X_w \setminus A)}_w$, somit $Rd A \subseteq Rd_w A$.

Außerdem gilt: $\overline{(X_w \setminus A)}_w \subseteq \overline{X \setminus A} \cup \{w\}$ (nach 3.8), somit haben wir:

$Rd_w A = \overline{A}_w \cap \overline{(X_w \setminus A)}_w \subseteq \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A) \cup \{w\}} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = Rd A$, woraus die Behauptung wird. □

3.18.2 Bemerkungen

Falls in 3.18.1 X ein topologischer HAUSDORFFraum ist, somit jede kompakte Teilmenge von X abgeschlossen ist, genügt in 3.18.1 schon die Voraussetzung, daß A kompakt ist.

$\mathbb{R}^p, \mathbb{Z}^p$ sind als metrische Räume topologische HAUSDORFFräume bzw. \mathbb{Z}^p, E_w^p als AEPen der lokalkompakten \mathbb{R}^p, E^p , somit gilt die Aussage von 3.18.1 für jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^p, E^p, \mathbb{Z}^p, E_w^p$.

Wir benötigen einige Tatsachen über die stereographische Projektion: In den beiden nächsten Sätzen 3.19, 3.20 seien Kugeln im \mathbb{R}^{n+1} bzw. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, immer Kugeln bezüglich der euklidischen Metrik!

3.19 Satz

S^n sei die Oberfläche der Einheitskugel des $\mathbb{R}^{n+1}, n \geq 1$, $w = (0,0,\dots,0,1)$ ihr Nordpol, $U_\xi(w)$ die offene Kugel um w mit Radius $\xi > 0$.

Dann gilt: $S := S^n \setminus U_\xi(w) = S^n \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_{n+1} \leq 1 - \frac{\xi^2}{2} \right\} := S^n \cap h$.

Beweis:

$S = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1, \sum_{i=1}^n y_i^2 + (1-y_{n+1})^2 \geq \xi^2 \right\}$, also gilt

für alle $y \in S$: $1 - y_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq \xi^2 - (1-y_{n+1})^2 =$

$= \xi^2 - 1 + 2y_{n+1} - y_{n+1}^2 \approx 2 - \xi^2 \geq 2y_{n+1} \approx y_{n+1} \leq 1 - \frac{\xi^2}{2} \approx$

$\approx S \subseteq h \approx S = S \cap S^n \subseteq h \cap S^n$.

Sei nun $y \in h \cap S^n \approx y_{n+1} \leq 1 - \frac{\xi^2}{2}, \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1$, somit $2y_{n+1} \leq$

$\leq 2 - \xi^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 - \xi^2 \approx -y_{n+1}^2 + 2y_{n+1} - 1 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 - \xi^2 \approx$

$\approx -(1-y_{n+1})^2 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 - \xi^2 \approx \xi^2 \leq \sum_{i=1}^n y_i^2 + (1-y_{n+1})^2 \approx$

$\approx y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus U_\xi(w)$, und da $y \in S^n, y \in S^n \cap (\mathbb{R}^{n+1} \setminus U_\xi(w)) = S^n \setminus U_\xi(w)$. □

3.19.1 Bemerkung

Falls $\xi > 2$, gilt: $S^n \cap h = \emptyset$, da $S^n \subseteq U_\xi(w)$ und somit $S^n \cap h = S^n \setminus U_\xi(w) = \emptyset$ ($S^n \subseteq U_\xi(w)$, da $w \in S^n$ und der Durchmesser von S^n gleich zwei ist).

3.20 Satz

Mit den Bezeichnungen des vorigen Satzes 3.19 gilt, falls s die stereographische Projektion von $S^n \setminus \{w\}$ nach \mathbb{R}^n bezeichnet (siehe: Kuhn, Topologie, p. 105), daß

$$s(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{4}{\varepsilon^2} - 1 \right\} := K.$$

Beweis:

Sei $y \in S \setminus \{w\} \leadsto -1 \leq y_{n+1} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$. Sei also $-1 \leq y_{n+1} = \delta \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} < 1$. Dann gilt, daß $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 - \delta^2$, $1 - y_{n+1} = 1 - \delta \leadsto$

$$\leadsto \|s(y)\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{(1-\delta)^2} = \frac{1-\delta^2}{(1-\delta)^2} = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad f(\delta) = \frac{1+\delta}{1-\delta} \text{ ist}$$

aber streng monoton wachsend für $\delta < 1$, da $f'(\delta) = \frac{2}{(1-\delta)^2} > 0$.

Somit gilt, da $\delta \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} < 1$, $\frac{1+\delta}{1-\delta} \leq \frac{1 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}}{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{4}{\varepsilon^2} - 1 \leadsto$
 $\leadsto s(S) \subseteq K.$

Sei $x \in \mathbb{R}^n \leadsto s^{-1}(x)$ hat die $(n+1)$ -te Koordinate $\frac{r^2-1}{r^2+1}$, wo-

bei $r^2 = \|x\|^2$. Sei also $r^2 = \|x\|^2 \leq \frac{4}{\varepsilon^2} - 1$, x somit aus K , so

$$\text{gilt: } r^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} \leq 2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \leadsto 0 \leq -r^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + 1 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \leadsto r^2 - 1 \leq$$

$$\leq r^2 + 1 - r^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} = r^2 - 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(r^2+1) = (r^2+1) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \leadsto$$

$$\leadsto \frac{r^2-1}{r^2+1} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{ und somit gilt: } s^{-1}(x) \in S^n \cap h = S^n \setminus U_\varepsilon(w).$$

Wir haben also: $s(S) \subseteq K$, $s^{-1}(K) \subseteq S$ und somit, da s bijektiv ist: $s(s^{-1}(K)) = K \subseteq s(S) \subseteq K.$

□

3.21 Folgerung

(1) Aus dem vorigen Satz 3.20 ergibt sich, daß $S^n \setminus U_{\sqrt{2}}(w) = S^n \cap \{y \mid y_{n+1} \leq 0\}$, die untere Halbkugel mitsamt dem

Äquator, durch die stereographische Projektion auf die abgeschlossene Einheitskugel des \mathbb{R}^n homöomorph abgebildet wird.

(2) Allgemein ist $S^n \setminus U_\varepsilon(w)$, $\varepsilon < 2$, zur abgeschlossenen Kugel um den Nullpunkt mit Radius $\frac{4}{\varepsilon^2} - 1$ des \mathbb{R}^n homöomorph,

welche wiederum nach 2.11(3) zu einem geeigneten Würfel um den Nullpunkt homöomorph ist. Später wird sich zeigen, daß jeder Würfel sich in einem geeigneten Gitter als n -Zelle auffassen läßt (II 1.28(2)). Wir haben somit: $S^n \setminus U_\varepsilon(w)$, $\varepsilon < 2$, ist ein n -Element des \mathbb{R}^{n+1} (II. 4.4(11)).

Wir benötigen später häufig die Tatsache, daß jede echte Teilmenge von Z^p , der ALEXANDROFFSchen Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^p , $p \geq 1$, ähnlichgelagert mit einer Teilmenge von \mathbb{R}^p ist; diese Tatsache begründet sich dadurch, daß je zwei verschiedene Punkte von S^p , der Oberfläche der Einheitskugel bzgl. der euklidischen Metrik in \mathbb{R}^{p+1} , welche ja zu Z^p homöomorph ist, durch eine isometrische Selbstabbildung von S^p ineinander übergeführt werden können.

3.22 Satz

Seien x, y aus S^p , $p \geq 1$, $x \neq y$. Dann gibt es eine isometrische Selbstabbildung $f: S^p \rightarrow S^p$, welche x in y überführt.

Beweis:

Falls $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, x, y linear abhängig, so gilt offenkundig $x = -y$. Dann leistet aber $f(x) = -x$ das gewünschte.

Seien nun x und y linear unabhängig. Dann spannen sie eine Ebene E des \mathbb{R}^{p+1} auf. Nach dem SCHMIDT'schen Orthonormalisierungsverfahren kann, wenn man $e_1 = x$ setzt, ein zu e_1 orthogonaler Einheitsvektor e_2 gefunden werden, so daß e_1 und e_2 eine Basis von E bilden. Diese kann zu einer Orthonormalbasis von ganz \mathbb{R}^{p+1} erweitert werden. y läßt sich nun in der Form $y_1 e_1 + y_2 e_2$, mit $y_1^2 + y_2^2 = 1$ darstellen. Falls $y_2 < 0$, so kann

durch $g(y) = Ay$, wobei A die Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ ist, y iso-

metrisch auf einen Punkt mit nicht negativer zweiter Koordinate abgebildet werden ($x = e_1$ ist Fixpunkt von f , S^p wird durch g auf sich selbst abgebildet). Dann gibt es einen wohlbestimmten Wert φ aus dem Intervall $[0, \pi]$, dergestalt, daß $y_1 = \cos \varphi$, $y_2 = \sin \varphi$.

$f(z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} z$ bildet offensichtlich \mathbb{R}^{p+1} isomet-

risch auf sich ab, S^p ist invariant unter f und $f(x) = e_1 = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2 = y$. □

3.24 Bemerkung

Falls $G \subset Z^p$ und $w \in G$, so können wir G isometrisch auf eine Menge abbilden, welche w nicht enthält. ($G \subset Z^p \sim Z^p \setminus G \neq \emptyset \sim \sim$ Es gibt einen Punkt $x \in Z^p \setminus G$. Drehe nun S^p so, daß x auf w zu liegen kommt.)

3.25 Satz

Sei $E \neq \{0\}$ endlichdimensional, entweder ein NLR über \mathbb{R} , mit $\dim E \geq 2$, oder ein beliebiger NLR über \mathbb{C} , E_w seine AEP.

- (1) Sei $G \subseteq E$ ein Gebiet und $x \in G$; dann ist auch $G \setminus \{x\}$ ein Gebiet. Gebiete in E sind somit zerlegungspunktfrei.
- (2) Aussage (1) gilt auch, falls G ein in E_w enthaltenes Gebiet ist.

Beweis:

(1) Nach 2.21(2) ist E homöomorph zu einem geeigneten \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. G ist somit homöomorph zu einem geeigneten Gebiet G' dieses geeigneten \mathbb{R}^n . Nach Kuhn, 2.11, p. 126 wird der Zusammenhang eines Gebietes in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, nicht einmal durch das Entfernen einer abzählbaren Menge zerstört, somit ist $G' \setminus \{x'\}$, wobei x' der Bildpunkt von x unter dem Isomorphismus zwischen E und \mathbb{R}^n ist, zusammenhängend, und somit auch $G \setminus \{x\}$. Außerdem ist $G \setminus \{x\} = G \cap E \setminus \{x\}$, offen, da jeder NLR als HAUSDORFF-Raum a fortiori ein T_1 -Raum, $E \setminus \{x\}$ somit offen ist.

(2) Falls E homöomorph zu \mathbb{R}^n ist, so ist nach 3.13 E_w homöomorph zu \mathbb{Z}^n , \mathbb{Z}^n ist aber wiederum homöomorph zu S^n , der Oberfläche der Einheitskugel des \mathbb{R}^{n+1} . Wir können somit unsere Betrachtungen genau so gut auf S^n durchführen. Falls $G = S^n$, so drehen wir gemäß 3.22 x auf den Nordpol w von S^n . $S^n \setminus \{w\}$ ist zu \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^n ist aber ein Gebiet, homöomorph. Falls $G \subset S^n$, so haben wir wiederum nach 3.24, daß G zu einem Gebiet G' des S^n , welches den Nordpol nicht enthält, homöomorph ist, und erhalten die Aussage aus (1), wenn wir G' in den \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, hinunterprojizieren. □

3.26 Satz

Die AEP X_w eines nichtkompakten T_1 -Raumes X ist ein T_1 -Raum.

Beweis:

w ist in X_w abgeschlossen, da $X_w \setminus \{w\} = X$ in X_w offen ist. Sei x ein endlicher Punkt von X_w . Dann ist $X_w \setminus \{x\} = \{w\} \cup (X \setminus \{x\})$. $X \setminus \{x\}$ ist wegen der Abgeschlossenheit von $\{x\}$ in X offen und $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$ ist als einpunktige Menge kompakt. Somit ist $X_w \setminus \{x\}$ in X_w offen, $\{x\}$ daher in X_w abgeschlossen. □

3.27 Satz

Sei X ein topologischer Raum und X_w sein AEP. Falls $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Basis der Topologie von X ist, so ist $\mathcal{B} \cup \{w\}$ eine Basis der ALEXANDROFFSchen Topologie von X_w .

Beweis:

Jede in X offene Menge läßt sich voraussetzungsgemäß als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} darstellen. Jede in X_w offene Menge, die w enthält, läßt sich als Vereinigung gewisser in X offener Mengen mit w darstellen. Offensichtlich läßt sich somit jede in X_w enthaltene, w umfassende, offene Menge als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B} \cup \{w\}$ darstellen.

3.28 Folgerungen

- (1) Z^p , die AEP von \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}$, ist ein A_2 -Raum, da \mathbb{R}^p ein A_2 -Raum ist (Kuhn, 2.2, p. 74). Die Vereinigung einer abzählbaren Menge mit $\{w\}$ bleibt aber abzählbar, somit besitzt auch Z^p eine abzählbare Basis. Z^p, \mathbb{R}^p sind somit auch separabel (Kuhn, 3.4, p. 77).
- (2) Da Z^p als AEP des T_1 -Raumes \mathbb{R}^p , gemäß 3.26 selbst ein T_1 -Raum ist, sind nach Kuhn, 4.8(1)(2), p. 112, in Z^p die Begriffe kompakt, abzählbarkompakt und folgenkompakt äquivalent, da Z^p gemäß 3.28(1) ein A_2 -Raum und somit nach Kuhn, 2.3, p. 74 auch ein A_1 -Raum ist.
- (3) Da E_w , die AEP eines endlichdimensionalen NLRs E über $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, zu einem geeigneten Z^p homöomorph ist und die Eigenschaften " X ist ein T_1 -, A_1 -, A_2 -Raum" topologisch invariant sind, gilt auch in E_w , daß die Begriffe kompakt, abzählbarkompakt und folgenkompakt zueinander äquivalent sind.

II Homologie (modulo 2) in Z^p , der ALEXANDROFFschen Einpunkt-
kompaktifizierung des \mathbb{R}^p .

Der JORDANSche Kurvensatz im \mathbb{R}^2 wird durch Verwendung der Hilfsmittel Gitter, Zellen und Ketten bewiesen. Es erhebt sich nun die Frage, wieweit besagte Gitter, Zellen und Ketten auch in höhere Dimensionen als zwei übertragen werden können. Es stellt sich heraus, daß der Begriff des Gitters auf den Raum \mathbb{R}^p verallgemeinerbar ist; es empfiehlt sich aber, nicht mit beschränkten Gittern zu arbeiten, sondern im zweidimensionalen Fall, die horizontalen und vertikalen Strecken zu Geraden auszuziehen, im p -dimensionalen Fall statt Geraden, affine Unterräume der Dimension $(p-1)$ zu verwenden. Nach der etwas aufwendigeren Einführung der Zellen lassen sich dann Ketten, Zyklen, algebraischer Rand etc. ganz analog wie im zweidimensionalen Fall einführen. Um Komplikationen mit beschränkten und unbeschränkten Zellen zu vermeiden, ist es besser, die Gitter in Z^p , der ALEXANDROFFschen Einpunktkompaktifizierung von \mathbb{R}^p , zu betrachten; es bereitet kein großen Schwierigkeiten, die Verallgemeinerung des JORDANSchen Kurvensatzes, welche ja zunächst nur für Z^p gilt, auch in \mathbb{R}^p als gültig zu erweisen.

Betrachten wir also zunächst Gitter und Zellen in \mathbb{R}^p .

1. Gitter, Zellen, Ketten

Unseren Betrachtungen legen wir zunächst den Raum \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}$, zugrunde; für die folgende Definition erinnern wir an die Tatsache, daß jeder Punkt x aus \mathbb{R}^p sich eindeutig in der Form: $x = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$, x_i aus \mathbb{R} , $i=1, \dots, p$, darstellen läßt; x_i heißt die Projektion von x auf die i -te Koordinatenachse, oder die i -te Koordinate von x .

Ferner vereinbaren wir noch folgende Bezeichnungsweisen: der Buchstabe i soll durch die ganze Arbeit hindurch *immer* eine natürliche Zahl nicht kleiner als eins und nicht größer als p bezeichnen; k, j, n bezeichnen *immer* natürliche Zahlen; griechische Buchstaben, eventuell indiziert, bedeuten *immer* reelle Zahlen, der Buchstabe h bezeichne *immer* einen der gleich einzuführenden Prinzipale.

1.1 Definition, Bemerkungen

(1) $h = h_i^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i = \alpha\}$ heie ein Prinzipal, senkrecht zur i-ten Koordinatenachse;

i ist die h zugeordnete Bestimmungsrichtung, i heie auch Richtungsindex von h , bezeichnet als $r(h)$. $r(h) = i$, genau dann, wenn $h = h_i^\alpha$, α aus \mathbb{R} beliebig. Die i -te Koordinatenachse heie die h zugeordnete Bestimmungsachse.

α ist die h zugeordnete Bestimmungszahl, oder der Bestimmungsindex von h , bezeichnet mit $b(h)$. $b(h_i^\alpha) = \alpha$ für alle i . Seien h, h' zwei Prinzipale; wir sagen h und h' sind zueinander parallel, bezeichnet $h \parallel h'$, genau dann, wenn h und h' denselben Richtungsindex besitzen.

$+h = +h_i^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq \alpha\}$ heie der h zugeordnete (assoziierte) obere oder positive Halbraum;

$-h = -h_i^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^p \mid x_i \leq \alpha\}$ heie der h zugeordnete (assoziierte) untere oder negative Halbraum.

$+$ bzw. $-$ nennen wir das Vorzeichen des Halbraums (" $+h$ ist der Halbraum mit positivem, $-h$ derjenige mit negativem Vorzeichen"). h heie der Bestimmungsprinzipal von $+h$ bzw. $-h$; $+h, -h$ nennen wir die von h bestimmten Halbräume; die für Prinzipale entwickelte Terminologie überträgt sich ohne weiteres vom Bestimmungsprinzipal h auf die durch h bestimmten Halbräume $+h, -h$. Offenkundig gilt:

$$h = +h \cap -h \subset +h, -h; +h \cup -h = \mathbb{R}^p.$$

(2) $h_i^\alpha = h_i^0 + \alpha e_i$, e_i der positive Einheitsvektor der i -ten Koordinatenachse; somit geht h_i^α aus h_i^0 durch Translation um αe_i hervor; da h_i^0 die Hyperebene $\{x_i = 0\}$ ist, ist h_i^α in der Sprache der linearen Algebra ein $(p-1)$ -dimensionaler affiner Unterraum von \mathbb{R}^p ; die oben eingeführte Sprechweise für Parallelität von Prinzipalen ist mit der aus der linearen Algebra bekannten für Parallelität affiner Unterräume eines gegebenen affinen Raumes verträglich, da $h \parallel h'$ genau dann, wenn h und h' dieselbe Hyperebene h_i^0 als Unterraum zugeordnet ist.

Jeder Prinzipal h ist durch seinen Richtungsindex $r(h)$ und seinen Bestimmungsindex $b(h)$ eindeutig bestimmt; zwei Prinzipale h, h' mit gleichem Richtungsindex fallen entweder zusammen oder sind disjunkt; im ersten Fall stimmen ihre Bestimmungsindices überein, im zweiten Fall sind sie voneinander verschieden.

Offenkundig sind Prinzipale unbeschränkt.

Jeder Prinzipal $h = h_i^\alpha$ ist als Bild unter der Translation um αe_i - diese Translation ist offenkundig eine isometrische Selbstabbildung des \mathbb{R}^p - der abgeschlossenen Hyperebene h_i^0 selbst abgeschlossen und besitzt daher ebensowenig innere Punkte wie h_i^0 (I 2.7(2)), ist somit ebenfalls nirgendsdicht in \mathbb{R}^p ; außerdem sind Prinzipale offensichtlich konvex und somit (bogen-)zusammenhängend.

h^α bezeichnet einen Prinzipal mit beliebigem Richtungsindex und Bestimmungsindex α , h_i einen Prinzipal mit Richtungsindex i , aber unbestimmtem Bestimmungsindex; falls keine Zweideutigkeiten zu befürchten sind, lassen wir den Richtungs- bzw. den Bestimmungsindex weg.

- (3) Offenkundig sind $+h$, $-h$, die $h = h_i^\alpha$ zugeordneten Halbräume unbeschränkt, *konvex* und *abgeschlossen*.
- (4) Sei $\alpha < \beta$, $A \subseteq -h_i^\alpha$, $B \subseteq +h_i^\beta$, dann ist offenkundig $A \cap B = \emptyset$.
- (5) Aus $\alpha > \beta$ folgt, daß $h_i^\alpha \cap h_i^\beta = \emptyset$, da o.B.d.A. $\alpha < \beta$ und $h_i^\alpha \subseteq -h_i^\alpha$, $h_i^\beta \subseteq +h_i^\beta$, die Behauptung folgt dann aus (4).
- (6) Falls $\alpha < \beta$ gilt offenkundig:
- $+h_i^\alpha \supset +h_i^\beta$, $-h_i^\alpha \subset -h_i^\beta$;
 - $+h_i^\alpha \cup +h_i^\beta = +h_i^\alpha$, $+h_i^\alpha \cap +h_i^\beta = +h_i^\beta$;
 - $-h_i^\alpha \cup -h_i^\beta = -h_i^\beta$, $-h_i^\alpha \cap -h_i^\beta = -h_i^\alpha$.
- (7) Aus $A \subseteq -h_i^\alpha$, $B \subseteq +h_i^\beta$ folgt $\emptyset \subseteq A \cap B \subseteq -h_i^\alpha \cap +h_i^\beta = h_i^\alpha$.
- (8) Falls $\alpha < \beta$, gilt offensichtlich:
- $h_i^\beta \subset +h_i^\alpha$, $h_i^\alpha \subset -h_i^\beta$;
 - $h_i^\beta \cap -h_i^\alpha = \emptyset = h_i^\alpha \cap +h_i^\beta$;
 - $h_i^\beta = h_i^\beta \cap +h_i^\alpha$, $h_i^\alpha = h_i^\alpha \cap -h_i^\beta$.
- (9) Seien h_{i_1}, \dots, h_{i_n} , $n \leq p$ paarweise nichtparallele Prinzipale, dann gilt $\bigcap_{j=1}^n h_{i_j} \neq \emptyset$! Denn seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die Bestimmungszahlen der h_{i_j} , so liegt jedes x aus \mathbb{R}^p , dessen i_j -te Koordinate gleich α_j ist im Durchschnitt aller h_{i_j} .
- Die Voraussetzung $n \leq p$ ist wesentlich! Unter $n > p$ Prinzipalen treten nämlich *mindestens* zwei zueinander parallele auf, deren Schnitt leer ist.

1.2 Definition

- (1) Sei $M = \left\{ h_i^{\alpha_k} \mid 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N} \text{ beliebig} \right\}$ eine endliche Menge von Prinzipalen in \mathbb{R}^p . M ist ein rechtwinkliges Gitter im \mathbb{R}^p , wenn jede Koordinatenachse des \mathbb{R}^p als Bestimmungssachse mindestens eines Prinzipals aus M auftritt. G bezeichne künftig immer Gitter im \mathbb{R}^p (\mathbb{Z}^p).

$G = \left\{ h_1^{\alpha_1}, h_2^{\alpha_2}, \dots, h_i^{\alpha_i}, \dots, h_p^{\alpha_p} \right\}$ ist somit ein Gitter einfachsten Typs.

- (2) Zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir noch folgendes vereinbaren:

G_i sei die Menge aller Prinzipale aus G , welche von der i -ten Koordinatenachse bestimmt werden; wir wollen G_i das i -te Teilgitter von G nennen.

$n_i = n_i(G) \in \mathbb{N}$ bezeichne die Anzahl der Prinzipale in G_i ; nach Definition eines Gitters ist $n_i = n_i(G) \geq 1$ für alle $i=1, \dots, p$.

$B_i(G) = B_i$ sei die Menge der Bestimmungsindizes der Prinzipale aus G_i . B_i heiÙe die Bestimmungsmenge von G_i oder die i -te Bestimmungsmenge von G ; B_i wollen wir uns immer dergestalt durch die Zahlen $I_i := \{1, 2, \dots, n_i\} \subseteq \mathbb{N}$ indiziert denken, daÙ $\alpha_1 = \min B_i$, $\alpha_{n_i} = \max B_i$, α_2 die zweitkleinste Zahl aus B_i , α_{n_i-1} die zweitgrößte Zahl aus B_i ist, usw.; den Index, welcher der Zahl α aus B_i bei dieser Indizierung zugewiesen wird, wollen wir den Ordnungsindex von α in B_i nennen, bezeichnet mit $o(\alpha)$, $o(\alpha)=k$, genau dann, wenn α in der oben beschriebenen Indizierung von B_i mit dem Index k versehen wird, α somit die "kat-kleinste" Zahl von B_i ist.

Offenkundig ist die soeben beschriebene Indizierung der Menge B_i ein Ordnungsisomorphismus zwischen B_i und der oben eingeführten Menge $I_i = \{1, 2, \dots, n_i\}$. I_i wollen wir die Indexmenge von B_i nennen; es gilt somit für α, β aus B_i $\alpha \leq \beta$ ($\alpha < \beta$) genau dann, wenn $j=o(\alpha) \leq k=o(\beta)$ ($j < k$); aus $\alpha_j \leq \alpha_k$ ($\alpha_j < \alpha_k$) folgt $j \leq k$ ($j < k$) und umgekehrt.

Sei $\alpha = \alpha_j$ aus B_i , $j > 1$. Alle β aus B_i , deren Ordnungsindex kleiner als j sind, wollen wir als die Vorgänger bzgl. B_i von α bezeichnen, α_{j-1} werde der unmittelbare Vorgänger in B_i von α genannt. Offenkundig besitzt α_1 überhaupt keinen Vorgänger, und falls $1 < n_i$ sind alle von α_{n_i} verschiedenen β aus B_i Vorgänger von α_{n_i} .

Entsprechend haben wir, falls $\alpha = \alpha_j$ aus B_i , $j < n_i$, daß alle β aus B_i , deren Ordnungsindex echt größer als j ist, Nachfolger bzgl. B_i von α heißen. α_{j+1} ist der unmittelbare Nachfolger in B_i von α ; offenkundig besitzt α_{n_i} keine Nachfolger. Im Falle $1 < n_i$ sind alle von α_1 verschiedenen β aus B_i Nachfolger von α_1 .

$h = h_i^k$ bezeichne denjenigen Prinzipal aus G_i , dessen Bestimmungszahl den Ordnungsindex k besitzt. k heiße dann Ordnungsindex von h in G_i , bezeichnet mit $o(h) = o(h_i^k)$. Wir wollen h_i^k auch den k -ten Prinzipal von G_i , oder den k -ten Prinzipal von G der Richtung i nennen.

- (3) Unter dem Träger eines Gitters G , bezeichnet mit $|G|$, wollen wir die Vereinigung aller Prinzipale aus G verstehen, $|G|$ ist somit eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^p , da je zwei *nicht* parallele Prinzipale sich schneiden (sei $h_1 = h_i^k$, $h_2 = h_j^l$, $i \neq j$, so besteht $h_1 \cap h_2$ aus allen x mit $x_i = \alpha$, $x_j = \beta$).

$$|G| \subseteq \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus |G| = \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid x_i \notin B_i, i \in \{1, 2, \dots, p\} \right\} \neq \emptyset;$$

$|G|$ ist als endliche Vereinigung der nirgendsdichten Prinzipale aus G selbst nirgendsdicht (I 1.40).

1.3 Einführung der Zellen

- (1) Sei G ein Gitter im \mathbb{R}^p .

Jedem Prinzipal h_i^k aus G wird ein Zellenbaustein P_i^k , P_i^k werde der zu h_i^k gehörige genannt, dergestalt zugeordnet, daß P_i^k entweder gleich h_i^k oder gleich $+h_i^k$ oder gleich $-h_i^k$ ist. Es gilt somit immer $h_i^j \subseteq P_i^j$, $P_i^j \subseteq +h_i^j$ oder $P_i^j \subseteq -h_i^j$. Die Verneinung von $P_i^j \subseteq +h_i^j$ ist somit $P_i^j = -h_i^j$, diejenige von $P_i^j = -h_i^j$ ist $P_i^j \subseteq +h_i^j$; entsprechend ist $P_i^j = +h_i^j$ die Verneinung von $P_i^j \subseteq -h_i^j$ und umgekehrt.

- (2) Sei nun eine Zellenbausteinzuordnung der oben beschriebenen Art für die Prinzipale aus G gegeben.

$Q = Q_i = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_i^k$ werde die i -te Zellenkomponente dieser Zellen-

bausteinzuordnung genannt. Falls $Q_i \neq \emptyset$ werde Q_i eine i -te Zellenkomponente auf G oder kurz eine Zellenkomponente auf G genannt; i ist wiederum der Richtungsindex dieser Zellenkomponente, bezeichnet mit $r(Q)$, $r(Q_i) = i$. Zwei Zellenkomponenten auf G sollen genau dann zueinander parallel heißen, wenn

ihre Richtungsindizes übereinstimmen. Der Buchstabe Q soll fürderhin für Zellenkomponenten reserviert bleiben.

Alle P_i^k , $i=1, \dots, p$, $k=1, \dots, n_i$, sind abgeschlossen und konvex, da $P_i^k = h_i^k, \pm h_i^k$, somit sind auch alle Zellenkomponenten Q_i auf G abgeschlossen und konvex, da Durchschnitte abgeschlossener (konvexer) Mengen abgeschlossen (konvex) sind.

Bei der Einführung der Q_i , $Q_i = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_i^k$, können "überflüssige" Faktoren unter den P_i^j auftreten. Falls etwa $P_i^1 = h_i^1$, $P_i^2 = -h_i^2$, so gilt, gleichgültig wie die P_i^j , $j > 2$, gewählt werden, $Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = P_i^1 \cap P_i^2 \cap \bigcap_{j=3}^{n_i} P_i^j = P_i^1 \cap \bigcap_{j=3}^{n_i} P_i^j$, P_i^2 ist somit in diesem Fall "überflüssig". Der Formalismus wird jedoch durch die Beibehaltung dieser "überflüssigen" Faktoren sehr vereinfacht, da, wie sich gleich zeigen wird, bei der Definition jeder Zelle genau ein Faktor, der eindeutig einem Prinzipal aus G zugeordnet ist, auftritt.

Seien nun Q_i , $i=1, \dots, p$, p i -te Zellenkomponenten auf G , ($Q_i \neq \emptyset$!), dann wird

$$c = \bigcap_{i=1}^p Q_i = \bigcap_{i=1}^p \left(\bigcap_{k=1}^{n_i} P_i^k \right), \text{ die von den } Q_i, i=1, \dots, p,$$

erzeugte Zelle des Gitters G (auf G) genannt.

Da alle Q_i abgeschlossen und konvex sind, ist, wie oben, jede Zelle abgeschlossen und konvex, somit (bogen-)zusammenhängend. Die Zellen sind nicht leer (siehe 1.12.1).

c bezeichne durchweg Zellen. c_1, c_2, \dots, c_n werden als verschieden angenommen, falls die Indizes verschieden sind. Aussagen, wie $c_1 = c_2$, $c_1 \neq c_2$, $x \in c$, $A \subseteq c$, $c \subseteq A$, $A \cap c \neq \emptyset$ etc., haben den üblichen Sinn.

Zur Klärung der wichtigen Frage, unter welchen Bedingungen $Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j \neq \emptyset$ ist, benötigen wir zunächst

1.4 Definition

Sei G ein Gitter im \mathbb{R}^p . Jedem Prinzipal h_i^k aus G sei, wie in 1.3 beschrieben, ein Zellenbaustein P_i^k zugeordnet. Sei G_i die Menge der durch die i -te Koordinatenachse bestimmten Prinzipale von G .

$$+I_i := \left\{ k \in I_i \mid P_i^k \subseteq +h_i^k; \text{ somit: entweder } P_i^k = h_i^k, \text{ oder } P_i^k = +h_i^k \right\};$$

$-I_i := \left\{ k \in I_i \mid P_i^k \subseteq -h_i^k, \text{ somit: entweder } P_i^k = h_i^k \text{ oder } P_i^k = -h_i^k \right\}$.

Die beiden Mengen $+I_i, -I_i$ nennen wir die charakteristischen Mengen der Zellenbausteinzuordnung für das i -te Teilgitter G_i . Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir den unteren Index weglassen und nur $+I, -I, I$ schreiben.

Da entweder $P_i^k = h_i^k \subseteq +h_i^k, -h_i^k$ oder $P_i^k = +h_i^k$ oder $P_i^k = -h_i^k$, liegt jedes Element aus I_i in $+I_i$ oder in $-I_i$.

Offenkundig gilt:

$$\begin{aligned} j \in +I_i \cap -I_i &\Leftrightarrow P_i^j = h_i^j; \\ j \notin -I_i &\Leftrightarrow P_i^j = +h_i^j; \\ j \notin +I_i &\Leftrightarrow P_i^j = -h_i^j. \end{aligned}$$

Falls $+I_i \neq \emptyset$, so existiert $+m_i = \min +I_i, +M_i = \max +I_i$, da

$+I_i$ eine nichtleere endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist; ebenso existieren, falls $-I_i \neq \emptyset$, $-m_i = \min -I_i,$

$-M_i = \max -I_i$. Offenkundig haben wir:

$$P_i^{+M} \subseteq +h_i^{+M}, \text{ falls } +M \text{ existiert;}$$

$$P_i^{-m} \subseteq -h_i^{-m}, \text{ falls } -m \text{ existiert.}$$

Der eilige Leser mag getrost zum Satz 1.12, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $Q_i \neq \emptyset$ angibt, vorblättern!

1.5 Satz (Lemma über Zellenbausteine)

Seien $j, k \in I_i = I$.

(1) Sei k aus $I, P_i^k \subseteq -h_i^k$ und gelte für alle j aus I mit $k < j$:

$$P_i^j = -h_i^j, \text{ so gilt: } P_i^k = \bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j.$$

(2) Sei k aus $I, P_i^k \subseteq +h_i^k$, und gelte für alle j aus I mit $j < k$:

$$P_i^j = +h_i^j, \text{ so gilt: } P_i^k = \bigcap_{j=1}^k P_i^j.$$

(3) Falls $P_i^k \subseteq +h_i^k$ und für alle j aus I mit $j > k$ $P_i^j = -h_i^j$ ist,

so gilt: $P_i^k \cap P_i^j \neq \emptyset$ und $P_i^k \cap P_i^j$ ist kein Prinzipal, falls $P_i^k = +h_i^k$.

$$P_i^k \cap P_i^j = h_i^k, \text{ falls } P_i^k = h_i^k.$$

(4) Falls $P_i^k \subseteq -h_i^k$ und für alle j aus I mit $j < k$ $P_i^j = -h_i^j$ ist,

gilt $\emptyset \neq P_i^k \cap P_i^j$ und $P_i^k \cap P_i^j$ ist kein Prinzipal, falls

$$P_i^k = -h_i^k. P_i^k \cap P_i^j = h_i^k, \text{ falls } P_i^k = h_i^k.$$

(5) Falls $P_i^k \subseteq +h_i^k$ und für ein $j > k$ $P_i^j \subseteq -h_i^j$ ist,
so gilt: $P_i^k \cap P_i^j = \emptyset$.

(6) Falls $P_i^k \subseteq -h_i^k$ und für ein $j > k$ $P_i^j \subseteq +h_i^j$ ist,
so gilt: $P_i^k \cap P_i^j = \emptyset$.

(7) Falls für ein $j, j \neq k$, $P_i^j \cap P_i^k = \emptyset$, so gilt:

$$Q_i = \bigcap_{s=1}^{n_i} P_i^s = \emptyset.$$

(8) Es gilt für jedes j : $j \leq +M$ oder $j \geq -m$.

(9) Falls $+M \leq -m$, so gilt entweder $+M = -m$, oder
 $(+M) + 1 = -m$.

Beweis:

(1) $\bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j \subseteq P_i^k$; für $x \in P_i^k$ gilt $x_i \leq \alpha_k < \alpha_j$ für alle
 $j > k$. Somit ist $x \in P_i^j$ für alle $j \geq k \leadsto x \in \bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j$, also
gilt auch $P_i^k \subseteq \bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j$.

(2) Der Beweis verläuft ganz analog wie der Beweis von (1).
Ersetze überall "<" durch ">" und lasse in den Durchschnitten
den Index j zwischen 1 und k variieren.

(3) Sei $P_i^k = +h_i^k$. Alle x mit $x_i = \frac{\alpha_k + \alpha_j}{2}$ liegen in $P_i^k \cap P_i^j$,
da $\alpha_k < \frac{\alpha_k + \alpha_j}{2} < \alpha_j$. Hieraus geht auch hervor, daß $P_i^k \cap P_i^j$
kein Prinzipal sein kann, da auch alle x mit $x_i = \alpha_k$ in $P_i^k \cap P_i^j$
liegen, x_i somit nicht konstant für alle $x \in P_i^k \cap P_i^j$ ist.

Falls $P_i^k = h_i^k$, so gilt für alle $x \in P_i^k$:

$x_i = \alpha_k < \alpha_j$, somit liegt x in P_i^j . Also gilt: $P_i^k \subseteq P_i^j$. Deshalb
gilt: $h_i^k = P_i^k = P_i^k \cap P_i^j$.

(4) Man muß im Beweis von (3) nur überall "<" durch ">" erset-
zen.

(5) Für kein x aus \mathbb{R}^p kann $x_i \leq \alpha_j < \alpha_k \leq x_i$ gelten!

(6) Vertausche im Beweis von (5) j und k .

(7) $\emptyset = P_i^j \cap P_i^k \supseteq \bigcap_{s=1}^{n_i} P_i^s \supseteq \emptyset$.

(8) Gäbe es ein j mit $+M < j < -m$, so hätten wir, da $j \in +I_i$ oder $j \in -I_i$,

$+M < j \leq +M$, falls $j \in +I_i$.
 $-m \leq j < -m$, falls $j \in -I_i$.
Dies ergibt auf jeden Fall einen Widerspruch, da j immer in $+I_i$ oder in $-I_i$ liegt (1.4).

(9) Es genügt, den Fall $+M < -m$ zu betrachten.

Für jede Zahl s von I_i , die von n_i verschieden ist, gilt: $s+1 \in I_i$.

$+M < -m \leq -M \leq n_i$. Somit $+M \neq n_i$. Also $n_i := (+M)+1 \in I_i$. Wäre $n_i \neq -m$, so gälte $+M < n_i < -m$, im Widerspruch zu (8).

$n_i > -m$ kann nicht gelten, da sonst $+M = n_i - 1 \geq -m > +M!$ □

Nun können wir bequem Bedingungen dafür, daß $Q_i \neq \emptyset$ ist, finden:

1.6 Satz

Falls $-I \neq \emptyset$, $j \in I$, gilt:

- (1) Aus $j < -m$ folgt: $p^j = +h^j$.
- (2) Aus $j > -M$ folgt: $p^j = +h^j$.
- (3) $Q = Q_i = \emptyset$, falls $-m < j$ und $p^j \subseteq +h^j$.
- (4) $Q_i = \emptyset$, falls $-M_i < n_i$.

Beweis:

(1), (2) folgen sofort aus den Definitionen von $-I$, $-m$ und $-M$.

(3) folgt aus 1.5(5).

(4) folgt aus (2) und (3), da $n_i > -M_i \geq -m$, somit $p^{n_i} = +h^{n_i}$. □

1.7 Satz

Falls $+I \neq \emptyset$, $j \in I$, gilt:

- (1) Aus $j < +m$ folgt: $p^j = -h^j$.
- (2) Aus $j > +M$ folgt: $p^j = -h^j$.
- (3) $Q_i = Q = \emptyset$, falls $+M > j$ und $p^j \subseteq -h^j$.
- (4) $Q_i = Q = \emptyset$, falls $1 < +m$.

Beweis:

(1) und (2) folgen wiederum sofort aus den Definitionen von $+I$, $+m$ und $+M$.

(3) folgt aus 1.5(6).

(4) folgt aus (1) und (3), da $1 < +m \leq +M$. Somit: $p^1 = -h^1$. □

1.8 Satz

Sei $Q_i \neq \emptyset$. Falls zusätzlich $+I_i = +I \neq \emptyset$, so gelten die Aussagen (1a), (2), (5b).

Falls zusätzlich $-I \neq \emptyset$ gelten die Aussagen (1b), (2), (5b).

Falls $+I, -I \neq \emptyset$ gelten die Aussagen (4), (8), (9), (10).

(1) a) $+m = 1$; b) $-M = n_i$.

(2) $P^k = -h^k$ für $k > -m$, d.h. alle $k > -m$ liegen nicht in $+I$.

(3) $P^k = +h^k$ für $k < +M$, d.h. alle $k < +M$ liegen nicht in $-I$.

(4) $+M \leq -m, +I \leq -I$.

(5) a) Für $k \leq +M$ ist $\bigcap_{j=1}^k P^j = P^k$;

b) für $k \geq -m$ ist $\bigcap_{j=k}^{n_i} P^j = P^k$.

(6) a) Falls $I = +I$, so gilt: $Q_i = Q = P^{n_i}$;

b) falls $I = -I$, so gilt $Q_i = Q = P^1$.

(7) Unter den P^k tritt höchstens ein Prinzipal auf; im Fall $P^k = h^k$ gilt: $Q_i = Q = h^k = P^k$.

(8) $Q_i = Q = P^k = h^k \iff k = +M = -m \iff +I \cap -I \supseteq \{k\} \iff +I = -I \neq \emptyset$.

(9) $Q_i = Q = +h^{+M} \cap -h^{-m}$.

(10) $Q_i = Q$ ist kein Prinzipal $\iff +I \cap -I = \emptyset \iff (+M)+1 = -m \iff +I < -I$.

In diesem Falle ist $P^{+M} = +h^{+M}, P^{-m} = -h^{-m}$.

(11) $Q_i = Q = -h^1$, kein Prinzipal $\iff I = -I, P^1 = -h^1$.

(12) $Q_i = Q = +h^{n_i}$, kein Prinzipal $\iff I = +I, P^{n_i} = +h^{n_i}$.

Beweis:

(1) folgt sofort aus $Q \neq \emptyset$ und 1.6(4), 1.7(4).

(2) folgt aus 1.6(3).

(3) folgt aus 1.7(3).

(4) Falls $+M > -m$, ergäbe sich ein Widerspruch zu (2).

$+I \leq -I$ ist offensichtlich nur eine andere Möglichkeit, den Sachverhalt $+M \leq -m$ auszudrücken.

(5) a) Nach (3) ist für alle $j < k$ $P^j = +h^k$. Hieraus ergibt

sich $\bigcap_{j=1}^k P^j = P^k$ sofort aus 1.5(2).

Die Aussage b) wird ganz analog bewiesen!

(6) a) ist eine unmittelbare Folgerung aus $+M=n_i$ und (5a).

b) ist eine unmittelbare Folgerung aus $-m=1$ und (5b).

(7) Angenommen, $P^k=h^k$, $P^j=h^j$, $j \neq k$, o.B.d.A. $j < k$. Nach 1.5(5) folgt hieraus sofort $P^k \cap P^j = \emptyset$. Dies hat jedoch gemäß 1.5(7) $Q_i = Q = \emptyset$ zur Folge.

Falls $+I, -I \neq \emptyset$ folgt aus $P^k=h^k$: $k \in +I \cap -I$. Somit haben wir:

$$-m \leq k \leq +M. \quad (5) \text{ liefert dann: } \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = Q_i = \bigcap_{j=1}^k P_i^j \cap \bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j = P_i^k \cap P_i^k = h_i^k.$$

Falls $I=+I$, folgt $Q_i=h_i^{n_i}$, da $+M=n_i$. Somit gilt nach (5a):

$$Q_i = \bigcap_{k=1}^{n_i} P_i^k = \bigcap_{k=1}^{+M} P_i^k = P_i^{+M}. \text{ Nach (3) gilt für alle } k < +M=n_i:$$

$P_i^k = +h_i^k$, kein Prinzipal. Somit muß der voraussetzungsgemäß unter den P_i^k , $k=1,2,\dots,n_i$, auftretende Prinzipal gleich h_i^{+M} sein. $P_i^{+M} = h_i^{+M} = Q_i$ (siehe oben).

Der Fall $I = -I$ wird völlig analog erledigt!

(8) Sei $Q_i=P_i^k=h_i^k \sim k \in +I \cap -I$, da $h_i^k \subseteq +h_i^k, -h_i^k$.

$k \in +I \sim k \leq -I$ ((4)) $\sim k=-m$, da $k \in -I$. Ebenso zeigen wir $k = +M$.

Sei nun $k=+M=-m \sim +I \cap -I \supseteq \{k\} \sim +I \cap -I \neq \emptyset$.

Sei nun umgekehrt $k \in +I \cap -I$. Wie soeben folgt auch hier $k=+M=-m$.

Aus $k = +M = -m$ folgt nach (5) sofort:

$$Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = \bigcap_{j=1}^k P_i^j \cap \bigcap_{j=k}^{n_i} P_i^j = P_i^k \cap P_i^k = P_i^k.$$

$$k \in +I \cap -I \sim h_i^k \subseteq P_i^k \subseteq -h_i^k, +h_i^k \sim h_i^k \subseteq P_i^k \subseteq -h_i^k \cap +h_i^k = h_i^k.$$

$$(9) Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = \bigcap_{j=1}^{+M} P_i^j \cap \bigcap_{j=-m}^{n_i} P_i^j = P_i^{+M} \cap P_i^{-m} \text{ gemäß (5).}$$

Falls $P_i^{+M} = +h_i^{+M}$ und $P_i^{-m} = -h_i^{-m}$, so sind wir fertig.

Sei nun $P_i^{+M} = +h_i^{+M}$ oder $P_i^{-m} = h_i^{-m}$. Nach (7) und (8) folgt:

$$+M = -m, Q_i = P_i^{+M} = P_i^{-m} = h_i^{-m} = h_i^{+M} = +h_i^{+M} \cap -h_i^{+M} = h_i^{+M} \cap -h_i^{-m}.$$

(10) Sei Q_i kein Prinzipal $\sim +I \cap -I = \emptyset$ nach (7) und (8) $\sim \sim (+M)+1=-m$, da nach (4) $+I \leq -I$ ist und $+M=-m$ $+I \cap -I \neq \emptyset$ zur Folge hätte.

Sei nun umgekehrt $(+M) + 1 = -m$. Hieraus folgt $+I \leq +M < -m \leq -I$. Somit gilt: $+I < -I \sim +I \cap -I = \emptyset \sim Q_i$ ist kein Prinzipal nach Teilaussage (8).

Wäre etwa $P_i^{+M} = h_i^{+M}$, so wäre $+M \in -I$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(11) $Q_i = -h_i^1 \sim 1 = -m \sim$ für alle $k > -m=1$ ist $P_i^k = -h_i^k$ gemäß (2). Somit liegen alle $k > 1$ in $-I$. $P_i^1 = h_i^1$ hätte nach (5b) $Q_i = h_i^1$ zur Folge.

Sei nun $I = -I$, $P_i^1 = -h_i^1 \sim Q_i = -h_i^1$ gemäß (5b), da $-m=1$.

(12) Der Beweis verläuft ganz analog wie derjenige von Aussage (11). □

1.11 Satz

Sei \mathbb{G} ein Gitter im \mathbb{R}^P . Jedem Prinzipal aus \mathbb{G} sei gemäß der in 1.3 beschriebenen Art und Weise ein Zellenbaustein zugeordnet.

\mathbb{G}_i sei die Menge der Prinzipale aus \mathbb{G} , welche von der i -ten Koordinatenachse bestimmt werden. Die in 1.4 definierten Mengen $+I$, $-I$ mögen einer der folgenden Bedingungen genügen:

(1) $I = -I$, d.h. für alle $j > 1$ ist $P_i^j = -h_i^j$.

(2) $I = +I$, d.h. für alle $j < n_i$ ist $P_i^j = +h_i^j$.

(3) $+I \neq \emptyset$, $-I \neq \emptyset$. Hieraus folgt nach 1.8(1) $+m=1$, $-M=n_i$ und nach 1.8(4) $+M \leq -m$ ($+I \leq -I$); somit ist in diesem Fall für alle $j < +M$ $P_i^j = +h_i^j$ und für alle $j > -m$ $P_i^j = -h_i^j$.

Dann ist $Q_i \neq \emptyset$ und zwar gilt im Falle

(1) $Q_i = P_i^1 \subseteq -h_i^1$, da $1 \in -I$;

(2) $Q_i = P_i^{n_i} \subseteq +h_i^{n_i}$, da $n_i \in +I$;

(3) $Q_i = +h_i^{+M} \cap -h_i^{-m}$, wobei Q_i genau dann ein Prinzipal ist, falls $+M = -m$.

Beweis:

(1) $Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = P_i^1$ nach 1.5(1).

(2) $Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = P_i^{n_i}$ nach 1.5(2).

(3) $Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j = \bigcap_{j=1}^{+M} P_i^j \cap \bigcap_{j=-m}^{n_i} P_i^j$ (weil $+M \leq -m$, gilt nach

1.5(9) $+M = -m$ oder $(+M)+1 = -m$). Nach 1.5(1), (2) gilt $\bigcap_{j=1}^{+M} P_i^j = P_i^{+M}$,

$\bigcap_{j=-m}^{n_i} P_i^j = P_i^{-m}$. Somit haben wir: $Q_i = P_i^{+M} \cap P_i^{-m}$, $P_i^{+M} \subseteq +h_i^{+M}$, $P_i^{-m} \subseteq -h_i^{-m}$.

1. Fall: $P_i^{+M} = +h_i^{+M}$, $P_i^{-m} = -h_i^{-m}$. Dann gilt $Q_i \neq \emptyset$, da alle $x \in \mathbb{R}^P$ mit $x_i = \delta_{+M} \leq \delta_{-m}$ in $P_i^{+M} \cap P_i^{-m}$ liegen.

2. Fall: Sei entweder a) $P_i^{+M} = h_i^{+M}$ oder b) $P_i^{-m} = h_i^{-m}$. Es genügt, den Fall a) zu betrachten.

$h_i^{+M} \subseteq -h_i^{+M}$. Somit $+M \in -I \leadsto -m \leq +M \leq -m \leadsto +M = -m$. Deshalb gilt: $Q_i = P_i^{+M} \cap P_i^{-m} = h_i^{+M} = +h_i^{+M} \cap -h_i^{-m} \neq \emptyset$.

Die Aussage, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen Q_i ein Prinzipal ist, folgt sofort aus 1.8(8), da $Q_i, +I, -I \neq \emptyset$. □

Aus 1.8, 1.9, 1.10 und 1.11 ergibt sich

1.12 Satz (Kriterium für nichtleere Zellenkomponenten Q_i)

$$Q_i = \bigcap_{j=1}^{n_i} P_i^j \neq \emptyset \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } I_i = -I_i, \text{ d.h. für alle } j > 1 \text{ ist} \\ P_i^j = -h_i^j; \text{ in diesem Falle ist} \\ Q_i = P_i^{-m_i}. \\ \text{b) } I_i = +I_i, \text{ d.h. für alle } j < n_i \text{ ist} \\ P_i^j = +h_i^j; \text{ in diesem Falle ist} \\ Q_i = P_i^{+M_i}. \\ \text{c) } +I_i, -I_i \neq \emptyset, +m=1, -M=n_i, +M \leq -n. \\ \text{Für } j < +M \text{ ist } P_i^j = +h_i^j, \text{ für} \\ j > -m \text{ ist } P_i^j = -h_i^j; \text{ in diesem} \\ \text{Falle gilt: } Q_i = +h_i^{+M_i} \cap -h_i^{-m_i}; \\ \text{falls } Q_i \text{ kein Prinzipal ist, gilt:} \\ -m = (+M) + 1; \\ Q_i \text{ ist ein Prinzipal genau dann,} \\ \text{wenn } +M_i = -m_i. \end{array} \right.$$

Beweis:

Die Richtung " $Q_i \neq \emptyset \leadsto$ entweder a) oder b) oder c)" ergibt sich aus 1.9 im Falle a), aus 1.10 im Falle b), aus 1.8(2), (3), (4), (7), (8), (9) im Falle c).

Die Richtung "Entweder a) oder b) oder c) $\leadsto Q_i \neq \emptyset$ " ergibt sich für a) aus 1.11(1), für b) aus 1.11(2) und für c) aus 1.11(3).

1.12.1 Folgerung

Aus 1.12.1 geht hervor, daß jedes $Q_i \neq \emptyset$, $i=1, \dots, p$, mindestens einen Prinzipal h_i der Richtung i umfaßt. Hieraus folgt nach

1.1(9), daß $c = \bigcap_{i=1}^p Q_i \supseteq \bigcap_{i=1}^p h_i \neq \emptyset$ ist.

1.13 Definition, Bemerkungen

(1) Sei G ein Gitter im \mathbb{R}^p . Wie in 1.3 beschrieben werde jedem Prinzipal h_i^j aus G ein Zellenbaustein P_i^j zugeordnet. Diese Zuordnung heie zellenermglichend, wenn für jedes $i=1, \dots, p$, $+I_i$, $-I_i$, die in 1.4 eingeführten charakteristischen Mengen dieser Zuordnung für das i -te Teilgitter G_i , eine der drei notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß $Q_i \neq \emptyset$ ist, des Satzes 1.12 erfüllen.

(2) Sei $Q_i \neq \emptyset$.

Wir sagen Q_i ist eine reguläre Zellenkomponente (Q_i ist regulär), wenn Q_i kein Prinzipal ist. Andernfalls sagen wir, Q_i ist eine Prinzipal- oder Defektkomponente (Q_i ist defekt); falls c eine Zelle ist, die Q_i als Zellenkomponente besitzt, sagen wir " c ist in der i -ten Koordinate regulär bzw. defekt", je nachdem, ob Q_i regulär oder defekt ist; die i -te Koordinatenachse heie dann je nach dem Regularitäts- bzw. Defektachse von c .

Falls Q_i eine Prinzipalkomponente ist, gilt $Q_i = h_i^j$. λ_j , die Bestimmungszahl von h_i^j , wollen wir auch die von Q_i bestimmte i -te Koordinate jedes Punktes x einer Zelle von G , bei deren Bildung Q_i auftritt, nennen, oder kurz die i -te Koordinate jeder Zelle c , bei deren Bildung Q_i auftritt. Falls künftig von der i -ten Koordinate einer Zelle c die Rede ist, wird durch diese Sprechweise immer impliziert, daß die i -te Komponente Q_i von c eine Prinzipalkomponente ist, somit die i -te Koordinate jedes Punktes x aus c gleich der Bestimmungszahl λ der Prinzipalkomponente sein muß.

Falls Q_i regulär ist, gilt nach 1.8(11), (10), (12) entweder $Q_i = -h_i^1$ oder $Q_i = +h_i^{n_i}$ oder $Q_i = +h_i^{+M} \cap -h_i^{-m}$, $+M < -m$, je nachdem, ob $I = -I$, $+I$ oder $+I$, $-I$ I ; im ersten Falle wollen wir Q_i nach oben beschränkt nennen; h_i^1 heie der obere Beschrnkungsprinzipal von Q_i ; im zweiten Fall heie Q_i nach unten beschränkt, $h_i^{n_i}$ der untere Beschrnkungsprinzipal von Q_i ;

im dritten Fall wollen wir Q_i beschränkt, $+h_i^{+M}$ den Unterprinzipal, $h_i^{-m_i}$ den Oberprinzipal von Q_i nennen.

Obere (untere) Beschränkungs-, Ober- bzw. Unterprinzipale werden wir zusammenfassend als obere (untere) Randprinzipale von Q_i , oder, falls die Unterscheidung von oberen bzw. unteren Randprinzipalen unwesentlich ist, kurz, als Randprinzipale von Q_i , bezeichnen. Die Randprinzipale einer regulären Zellenkomponente Q_i bilden gerade den topologischen Rand von Q_i bzgl. \mathbb{R}^P .

Falls im Zusammenhang mit Zellenkomponenten von einem oberen (unteren) Beschränkungsprinzipal bzw. einem Ober- oder Unterprinzipal die Rede ist, soll damit immer impliziert werden, daß Q_i regulär ist und gerade aus denjenigen x aus \mathbb{R}^P bestehen soll, deren i -te Koordinate entweder im Intervall $(-\varrho, \beta_1]$, (β_2, ∞) oder $[\beta_3, \beta_4]$, $\beta_3 < \beta_4$ variiert, wobei β_1 die Bestimmungszahl des oberen Beschränkungsprinzipals ist; β_1 werde dann obere Beschränkungszahl von Q_i genannt; β_2 ist dann entsprechend die Bestimmungszahl des unteren Beschränkungsprinzipals und werde untere Beschränkungszahl von Q_i genannt; β_3 , β_4 sind die Bestimmungszahlen des Ober- bzw. Unterprinzipals von Q_i und sollen obere bzw. untere Bestimmungszahl von Q_i heißen; die Intervalle $(-\varrho, \beta_1]$, $[\beta_2, \varrho)$ bzw. $[\beta_3, \beta_4]$ wollen wir die Variationsintervalle von Q_i , bezeichnet mit $V_i = V(Q_i)$, nennen. Im Falle, daß Q_i eine Defektkomponente ist, artet das Variationsintervall $V_i = V(Q_i)$ zu dem Punktintervall $[\varrho, \varrho]$, ϱ der Bestimmungsindex von Q_i , aus. $V_i = V(Q_i)$ wollen wir auch das i -te Koordinatenintervall jeder Zelle c nennen, bei deren Bildung Q_i als i -te Zellenkomponente auftritt. Offenkundig folgt aus $\varrho \in V_i = V(Q_i)$, daß $h_i^\varrho \subseteq Q_i$ ist. Denn, falls etwa $Q_i = -h_i^1$, oder $= +h_i^{n_i}$, muß $+M \leq \varrho \leq -m$ sein. Offensichtlich ist bei regulärem Q_i der untere Randpunkt von $V_i = V(Q_i)$ Bestimmungszahl des unteren Randprinzipals von Q_i , der obere Randpunkt von $V_i = V(Q_i)$ Bestimmungszahl der oberen Randprinzipals von Q_i .

Die Redeweise " ϱ ist obere (untere) Beschränkungszahl bzw. obere (untere) Bestimmungszahl von Q_i " soll immer implizieren, daß das Variationsintervall von Q_i entweder von der Form $(-\varrho, \varrho]$ bzw. $[\varrho, \varrho)$ oder, daß $\beta_1 > \varrho$ bzw. $\varrho > \beta_2$ existieren, derart, daß $V_i = V(Q_i) = [\varrho, \beta_1]$ bzw. $V_i = [\beta_2, \varrho]$ gilt.

Eigentlich ist es ungenau im Zusammenhang mit Zellenkomponenten,

Beschränktheitsbegriffe zu gebrauchen, da ja jede Zellenkomponente Q_i , als Teilmenge von \mathbb{R}^p , unbeschränkt ist; da jedoch die Beschränktheitsbegriffe für die Zellenkomponenten dergestalt eingeführt werden, daß die Aussage "die Zellenkomponente Q_i erfüllt bezüglich der Beschränktheit die Aussage p" äquivalent zu der Aussage "das Variationsintervall von Q_i erfüllt als Teilmenge der reellen Zahlen bezüglich der Beschränktheit die Aussage p" ist, wollen wir uns diesen abus de langage (BOURBAKI dixit) gestatten.

Sei Q_i eine reguläre Zellenkomponente eines beliebigen Gitters \mathbb{G} und h_j^a ein beliebiger Prinzipal des \mathbb{R}^p . Dann kann $Q_i \subseteq h_j^a$ nicht gelten, da sonst $(Q_i)^o \subseteq (h_j^a)^o = \emptyset$ (1.1(2)) gelten müßte, welche Aussage aber offenkundig falsch ist. Insbesondere ist somit jede reguläre Zellenkomponente von jedem Prinzipal verschieden.

(3) Satz 1.12 gibt Veranlassung zu folgender Festsetzung:

Sei \mathbb{G} ein Gitter des \mathbb{R}^p und \mathbb{G}_i sein i -tes Teilgitter; ferner sei h_i^j aus \mathbb{G}_i .

$Q_i^j := h_i^j$ heiße die h_i^j zugeordnete Prinzipalkomponente; die Bezeichnungsweise " Q_i^j " soll fernerhin immer für Prinzipalkomponenten reserviert bleiben.

Falls $1 < j < n_i$, nennen wir $-Q_i^j := +h_i^{j-1} \cap -h_i^j$, die h_i^j , bezüglich \mathbb{G} , zugeordnete untere (negative) Zellenkomponente,

$+Q_i^j := +h_i^j \cap -h_i^{j+1}$, die h_i^j , bezüglich \mathbb{G} , zugeordnete obere (positive) Zellenkomponente;

falls $n_i = 1$, sei $-Q_i^1 := -h_i^1$, $+Q_i^1 := +h_i^1$;

falls $1 < n_i$, sei $-Q_i^1 := -h_i^1$, $+Q_i^1 := +h_i^1 \cap -h_i^2$,

$$-Q_i^{n_i} := +h_i^{n_i-1} \cap -h_i^{n_i}, \quad +Q_i^{n_i} := +h_i^{n_i}.$$

Die Benennungen für $Q_i^1, \pm Q_i^{n_i}$ übertragen sich sinngemäß aus dem Fall $1 < j < n_i$.

+ bzw. - nennen wir die Vorzeichen der Zellenkomponenten (" $+Q_i^j$ ist die h_i^j , bezüglich \mathbb{G} , zugeordnete Zellenkomponente mit positivem Vorzeichen" etc.). Untere (negative), obere (positive) Zellenkomponenten sind somit ex definitione regulär; daher wollen wir auch $+Q_i^j, -Q_i^j$ die h_i^j bezüglich \mathbb{G} zugeordneten regulären Zellenkomponenten nennen.

Wiederum sei j der $Q_i^j, \pm Q_i^j$ zugeordnete Ordnungsindex aus I_i , bezeichnet mit $o(Q) = o(Q_i)$; $o(Q_i) = j$ genau dann, wenn $Q_i =$

$= Q_i^j, -Q_i^j$. i ist wiederum der Richtungsindex, $r(Q) = r(Q_i)$,
 der $Q_i^j, \pm Q_i^j$.

Offenkundig gelten folgende Beziehungen:

$h_i^j = Q_i^j \subset +Q_i^j, -Q_i^j$; $h_i^j = -Q_i^j \cap +Q_i^j$; $+Q_i^j \subseteq +h_i^j$,
 $+Q_i^j = +h_i^j$ genau dann, wenn $j = n_i$; $-Q_i^j \subseteq -h_i^j$, $-Q_i^j = -h_i^j$
 genau dann, wenn $j=1$.

Falls $j > 1$, ist $+Q_i^{j-1} = -Q_i^j \cap +h_i^{j-1}$, da $j-1 < n_i$;

falls $j < n_i$, gilt $-Q_i^{j+1} = +Q_i^j \subseteq -h_i^{j+1}$, in der letzten
 Inklusion gilt die Gleichheit genau dann, wenn $j=1$; h_i^1
 ist oberer Randprinzipal von $-Q_i^1$, $h_i^{n_i}$ unterer Randprinzi-
 pal von $+Q_i^{n_i}$; falls $j > 1$ ist h_i^{j-1} unterer Randprinzipal
 von $-Q_i^j$, falls $j < n_i$ ist h_i^{j+1} oberer Randprinzipal von $+Q_i^j$.
 $+Q_i^j \not\subseteq -Q_i^j$, somit $+Q_i^j \neq -Q_i^j$.

Wir wollen noch folgende Übereinkunft treffen:

Falls ein Gitter \mathbb{G} des \mathbb{R}^p gegeben ist und $\alpha \in B_i(\mathbb{G})$, somit
 $h_i^\alpha \in \mathbb{G}$ ist, soll $+Q_i^\alpha$ entweder $+h_i^\alpha$ im Falle $\alpha = \alpha_{n_i}$ oder
 $+h_i^\alpha \cap -h_i^\beta$, falls $\alpha = \alpha_j$, $j < n_i$, wobei $\beta = \alpha_{j+1}$; die Bedeutung
 von $-Q_i^\alpha$ ergibt sich ganz analog.

1.14 Bemerkungen

1.13(3) legt es sehr nahe, die Zellen etwas einfacher, als
 NEWMAN dies auf Seite 129 seines Büchleins tut, einzuführen:
 Ausgehend von einem Gitter \mathbb{G} , kann man jedem Prinzipal h_i^j von
 \mathbb{G} , sich selbst und $+Q_i^j, -Q_i^j$, seine regulären Zellenkomponenten,
 als die von h_i^j erzeugten Zellenkomponenten zuordnen. Zellen
 werden dann als *zulässige* Schnitte der so erklärten Zellenkom-
 ponenten definiert; in einem zulässigen Schnitt von Zellenkom-
 ponenten *muß* für jedes Teilgitter \mathbb{G}_i *mindestens* eine von einem
 Prinzipal h_i aus \mathbb{G}_i bestimmte Zellenkomponente auftreten; ander-
 seits *darf* in einem zulässigen Schnitt von Zellenkomponenten
höchstens eine von einem Prinzipal h_i aus \mathbb{G}_i bestimmte Zellen-
 komponente auftreten; somme toute werden also in einem zuläs-
 sigen Schnitt von Zellenkomponenten, p Zellenkomponenten Q_i ,
 deren Richtungsindizes *paarweise verschieden* sind, miteinander
 geschnitten.

Satz 1.12 besagt ja im Grunde nichts anderes, als daß eine à
 la NEWMAN definierte Zellenkomponente Q_i , genau dann nicht

leer ist, wenn Q_i entweder ein Prinzipal h_i aus G_i , oder eine h_i zugeordnete reguläre Zellenkomponente im Sinne von 1.13(3) ist.

Wir wollen uns in Zukunft die Zellenkomponenten Q_i auf die eben beschriebene Art und Weise eingeführt denken; die bisher für Zellenkomponenten entwickelte Terminologie wird durch diese etwas andere Art und Weise der Einführung besagter Zellenkomponenten nicht berührt und kann daher unverändert übernommen werden.

Im Grunde genommen ist der hier beschriebene Vorgang der Zellenkomponentenzuordnung von dem in 1.3 beschriebenen Vorgang der Zellenbausteinzuzuordnung gar nicht sehr verschieden; wir ordnen dem Prinzipal h_i^j im Falle $j=1$, n_i seine Zellenbausteine $-h_i^1$ bzw. $+h_i^{n_i}$ als seine unteren bzw. oberen Zellenkomponenten zu, während im Falle $j > 1$ bzw. $j < n_i$, h_i^j nicht der ganze untere bzw. der ganze obere Halbraum zugeordnet wird, sondern z.B. nur der Schnitt zwischen seinem unteren Halbraum und dem oberen Halbraum des Prinzipals mit nächstkleinerem Ordnungsindex; obendrein ersparen wir uns die langweiligen und ermüdenden Überlegungen, ob Q_i nicht leer ist.

Die dermaßen eingeführten Zellenkomponenten sind ebenfalls entweder Prinzipale und daher konvex und abgeschlossen, oder nichtleere Schnitte zwischen zwei Halbräumen; als solche sind sie ebenfalls konvex und abgeschlossen, da ja jeder Halbraum konvex und abgeschlossen ist; somit sind die durch zulässige Schnitte von Zellenkomponenten gebildeten Zellen ebenfalls abgeschlossen und konvex, also (bogen-)zusammenhängend.

Nach diesen Ausführungen, die, wie ich hoffem den Leser nicht allzusehr ermüdet haben, wollen wir einige Hilfssätze beweisen, die uns gute Dienste leisten werden, die Aussage I 1.3(2) der KUHNschen Vorlesung über den JORDANSchen Kurvensatz ("zwei verschiedene 2-zellen treffen sich höchstens in gemeinsamen randpunkten; zwei verschiedene 1-zellen treffen sich höchstens in einem gemeinsamen endpunkt") auf die später einzuführenden k -Zellen c^k eines Gitters G zu verallgemeinern.

1.13(2) gibt Veranlassung, für die $(\pm)Q_i^j$ eine den P_i^j aus 1.3 vergleichbare Bezeichnungsweise einzuführen.

1.15 Definition, Bemerkungen

Sei h_i^j ein Prinzipal des Gitters G im \mathbb{R}^p . $Z = z_i^j$ bezeichne in analogiam zu den P_i^j aus 1.3 entweder $h_i^j = Q_i^j$ oder $+Q_i^j$ oder $-Q_i^j$, also genau eine der durch h_i^j erzeugten Zellenkomponenten.

Offensichtlich gilt: $h_i^j = Q_i^j \subseteq z_i^j \subseteq -Q_i^j \cup +Q_i^j$; die Verneinung von $z_i^j \subseteq -Q_i^j$ ist $z_i^j = +Q_i^j$, diejenige von $z_i^j \subseteq +Q_i^j$ ist $z_i^j = -Q_i^j$.

Jede Zelle läßt sich nun in der Form $c = \bigcap_{i=1}^p z_i^j = \bigcap_{i=1}^p z_i(c)$, $z_i(c) = z_i^j$, darstellen; $z_i(c) = z_i^j$ heie die i-te Zellenkomponente von c . i ist wiederum der Richtungsindex der Z , j ihr Ordnungsindex; auch die übrige für Prinzipale entwickelte Terminologie, wie Parallelität etc., läßt sich ohne weiteres auf die $Z=z_i^j$ übertragen.

Wir wollen nun Kriterien für Disjunkt- bzw. Nichtdisjunktheit paralleler z_i^j aufstellen; (falls $Z=z_i^j$, $\bar{Z}=\bar{z}_k^r$, Z und \bar{Z} nicht parallel, gilt: $Z \cap \bar{Z} \neq \emptyset$, da $Z \supseteq h_i^j$, $\bar{Z} \supseteq h_k^r$, $h_i^j \cap h_k^r \neq \emptyset$ nach 1,1(9)).

1.16 Hilfssatz

Mit den Bezeichnungen der vorigen Definition 1.15 gilt:

(1) Falls $j > k+2$, ist $z_i^j \cap z_i^k = \emptyset$.

(2) Falls $j = k+2$, ist $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset$ genau dann, wenn $z_i^k = +Q_i^k$ und $z_i^j = -Q_i^j$.

In diesem Falle haben wir: $z_i^k \cap z_i^j = h_i^{j-1} = h_i^{k+1}$, h_i^{k+1} ist oberer Randprinzipal von $+Q_i^k$ und unterer Randprinzipal von $-Q_i^j$.

(3) Sei $j = k+1$.

Aus $z_i^k = +Q_i^k$ folgt $z_i^k \cap z_i^j \supseteq h_i^j$ für jede mögliche Wahl von z_i^j ; falls $z_i^j = -Q_i^j$ haben wir $z_i^j \cap z_i^k = +Q_i^k = -Q_i^j$; falls $z_i^j \subseteq +Q_i^j$ ist $z_i^j \cap z_i^k = h_i^j = h_i^{k+1}$, h_i^{k+1} ist oberer Randprinzipal von $+Q_i^j$.

(4) Sei $j = k+1$.

Aus $z_i^j = -Q_i^j$ folgt $z_i^j \cap z_i^k \supseteq h_i^k = h_i^{j-1}$, für jede mögliche Wahl von z_i^k ; falls $z_i^k = +Q_i^k$, haben wir $z_i^j \cap z_i^k = +Q_i^k = -Q_i^j$; falls $z_i^k \subseteq -Q_i^k$, gilt: $z_i^j \cap z_i^k = h_i^k$, h_i^k ist unterer Randprinzipal von $-Q_i^j$, oberer Randprinzipal von $-Q_i^k$.

(5) Sei $j = k+1$, $z_i^k \subseteq -Q_i^k$.

Dann gilt: $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset \Leftrightarrow z_i^j = -Q_i^j$; in diesem Falle ist $z_i^j \cap z_i^k = h_i^k$; h_i^k ist oberer Randprinzipal von $-Q_i^k$ und unterer Randprinzipal von $-Q_i^j$.

(6) Sei $j = k+1$, $z_i^j \subseteq +Q_i^j$.

Dann gilt: $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset \Leftrightarrow z_i^k = +Q_i^k$; in diesem Falle ist dann $z_i^j \cap z_i^k = h_i^j$; h_i^j ist oberer Randprinzipal von $+Q_i^k$, unterer Randprinzipal von $+Q_i^j$.

(7) Aus $j = k+1$ folgt: $z_i^j \cap z_i^k = \emptyset$ genau dann, wenn

a) $z_i^k = +Q_i^k$ und b) $z_i^j \subseteq +Q_i^j$.

(8) Aus $j = k+1$ folgt: $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset$ genau dann, wenn

a) $z_i^k = +Q_i^k$ oder b) $z_i^j = -Q_i^j$;

im Falle a) gilt für $z_i^j \cap z_i^k$ das unter (3) Gesagte, im Falle b) das unter (4) Gesagte.

Beweis:

(1) $j > k+2 \Leftrightarrow j-1 > k+1 \Leftrightarrow \downarrow_{j-1} > \downarrow_{k+1}$; $z_i^k \subseteq -Q_i^k \cup +Q_i^k \subseteq -h_i^k \cup -h_i^{k+1} = -h_i^{k+1}$ gemäß 1.1(6c), 1.13(3); ebenso zeigt man: $z_i^j \subseteq +h_i^{j-1}$; 1.1(4) liefert dann die Behauptung.

(2) Sei $z_i^k \cap z_i^j \neq \emptyset$; falls $z_i^k \subseteq -Q_i^k \subseteq -h_i^k$, haben wir:

$z_i^j \subseteq -Q_i^j \cup +Q_i^j \subseteq +h_i^{j-1} \cup +h_i^j = +h_i^{j-1}$ nach 1.1(6c); 1.1(4) liefert dann $z_i^k \cap z_i^j = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung; der Fall

$z_i^j \subseteq +Q_i^j$ wird völlig analog behandelt.

Sei nun $z_i^k = +Q_i^k$ und $z_i^j = -Q_i^j$: $z_i^k \cap z_i^j = +Q_i^k \cap -Q_i^j =$

$= (+h_i^k \cap -h_i^{k+1}) \cap (+h_i^{j-1} \cap -h_i^j) = +h_i^k \cap -h_i^j \cap (-h_i^{k+1} \cap +h_i^{j-1}) =$

$= +h_i^k \cap -h_i^j \cap h_i^{k+1} = h_i^{k+1}$ nach 1.1(8).

(3) $z_i^k = +Q_i^k = +h_i^k \cap -h_i^{k+1} = +h_i^k \cap -h_i^j \supseteq h_i^j \subseteq z_i^j$, somit $h_i^j \subseteq z_i^k \cap z_i^j$. Falls $z_i^j = -Q_i^j$, so gilt: $z_i^j = -Q_i^j = +Q_i^k \cap -Q_i^j = z_i^k \cap z_i^j$.

Sei nun $z_i^j \subseteq +Q_i^j$, so gilt: $h_i^j \subseteq z_i^k \cap z_i^j = +Q_i^k \cap z_i^j \subseteq +Q_i^k \cap +Q_i^j = -Q_i^j \cap +Q_i^j = h_i^j$.

(4) wird ganz analog wie (3) bewiesen.

(5) $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset \Leftrightarrow -Q_i^k \cap z_i^j \neq \emptyset$; im Falle $z_i^j \subseteq +Q_i^j$ folgt aus 1.1(4):

$z_i^j \cap z_i^k = \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $z_i^j = -Q_i^j \Leftrightarrow h_i^k \subseteq z_i^k \cap +Q_i^k = z_i^k \cap z_i^j \subseteq -Q_i^k \cap +Q_i^k = h_i^k$.

(6) wird ganz analog wie (5) bewiesen.

(7) Sei $z_i^j \cap z_i^k = \emptyset$; wäre $z_i^k = +Q_i^k$ oder $z_i^j = -Q_i^j$, so lieferten (3) und (4): $z_i^j \cap z_i^k \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus $z_i^k \subseteq -Q_i^k$ und $z_i^j \subseteq +Q_i^j$ folgt nach 1.1(4) sofort $z_i^k \cap z_i^j = \emptyset$.

(8) folgt sofort aus (7), da $z_i^k = +Q_i^k$ oder $z_i^j = -Q_i^j$ die Negation der Aussage von (7) ist. □

1.17 Folgerung

Seien z^j, z^k zwei parallele Zellenkomponenten des Gitters G ; aus $z^j \cap z^k \neq \emptyset, z^j \neq z^k$ und $k \leq j$ folgt:

- (1) Mindestens eine der beiden Zellenkomponenten z^j, z^k ist regulär.
- (2) $j \leq k+2$. Offensichtlich sind wegen $k \leq j$ nur drei Fälle möglich: $j = k, j = k+1, j = k+2$.
- (3) $z^j \cap z^k = h^s, r(h^s) = r(z^j) = r(z^k) = i, k \leq s \leq k+1, j-1 \leq s \leq j$.
 Falls z^k regulär ist, ist h^s oberer Randprinzipal von z^k ;
 falls z^j regulär ist, ist h^s unterer Randprinzipal von z^j .

("Zwei parallele, aber voneinander verschiedene Zellenkomponenten desselben Gitters G , schneiden sich höchstens in einem gemeinsamen Randprinzipal; falls sie nichtleeren Durchschnitt besitzen, ist mindestens eine von ihnen regulär; falls die Ordnungsindizes der beiden Zellenkomponenten verschieden sind, ist der gemeinsame Prinzipal oberer Randprinzipal derjenigen mit kleinerem Ordnungsindex, sofern diese regulär ist, unterer Randprinzipal derjenigen mit größerem Ordnungsindex, sofern jene regulär ist.")

Beweis:

- (1) Angenommen $z^j = h_i^j, z^k = h_i^k \sim j \neq k$, da $z^j \neq z^k$, somit $z^j \cap z^k = \emptyset$ nach 1.1(5).
- (2) folgt aus $z^j \cap z^k \neq \emptyset, j \leq k$ und 1.16(1).
- (3) Falls $z^k \subseteq -Q_i^k$, so gilt nach 1.16(5): $z_i^k \cap z_i^j = h_i^k, h_i^k$ ist oberer Randprinzipal von $-Q_i^k$, unterer von $-Q_i^j$; falls $z^k = +Q_i^k$, so muß, da $z^k \neq z^j$ ist, $z^j \subseteq +Q_i^j$ gelten. 1.16(6) liefert in diesem Fall: $z_i^k \cap z_i^j = h_i^j, h_i^j$ ist oberer Randprinzipal von $+Q_i^k$, unterer von $+Q_i^j$; ganz analog werden die Fälle $z^j \subseteq +Q_i^j, z^j = -Q_i^j$ erledigt. □

1.17.1 Hilfssatz

Seien Z^j, Z^k zwei parallele Zellenkomponenten desselben Gitters G .

- (1) Aus $Z^j \subseteq Z^k$, und Z^j ist regulär, folgt: $Z^j = Z^k$.
- (2) Aus $Z^j \subseteq Z^k$, und Z^k ist eine Prinzipalkomponente, folgt:
 $Z^j = Z^k$.

Beweis:

(1) $Z^j \subseteq Z^k \sim \emptyset \neq Z^j = Z^j \cap Z^k$. Wäre $Z^k \neq Z^j$, so lieferte 1.17(3): $Z^j = Z^k \cap Z^j = h$. h ist aber nicht regulär! Dies widerspricht der vorausgesetzten Regularität von Z^j .

(2) $Z^j \subseteq Z^k \sim \emptyset \neq Z^j = Z^j \cap Z^k$. Da $Z^j \subseteq Z^k$, muß Z^j eine Prinzipalkomponente sein; (keine reguläre Zellenkomponente kann in einem Prinzipal enthalten sein, gemäß 1.13(2)). Wäre $Z^j \neq Z^k$, müßte nach 1.17(1) mindestens eine von ihnen regulär sein; dies widerspricht aber der Tatsache, daß sowohl Z^j , wie auch Z^k Prinzipale sind. Somit muß $Z^j = Z^k$ gelten. □

Wir wollen uns nun der Klärung der Frage, unter welchen Voraussetzungen $c_1 \subseteq c_2$ gilt, zuwenden.

1.18 Hilfssatz

Aus $h_i^\alpha \cap Z_i^j \neq \emptyset$ folgt: $h_i \subseteq Z_i^j$; insbesondere gilt, falls $Z_i^j = h_i^j$:
 $h_i^\alpha = h_i^j, \alpha = \alpha_j, \alpha_j$ die Bestimmungszahl von h_i^j .

Beweis:

1. Fall: $Z_i^j = h_i^j$. Wäre $\alpha \neq \alpha_j$, so gälte: $h_i^j \cap h_i^\alpha = \emptyset$. Da zwei parallele Prinzipale entweder zusammenfallen oder disjunkt sind, gilt somit:
 $h_i^j = h_i^{\alpha_j} = h_i^\alpha$.

2. Fall: Sei o.B.d.A. $Z_i^j = +Q_i^j$. x sei aus $h_i^\alpha \cap +Q_i^j \sim x_i = \alpha \geq \alpha_j$, α_j die Bestimmungszahl von h_i^j . Ebenso gilt für alle y aus h_i^α :
 $y_i = \alpha \geq \alpha_j$. Somit haben wir: $h_i^\alpha \subseteq +h_i^j$; falls $j = n_i$ sind wir fertig, da $+Q_i^{n_i} = +h_i^{n_i}$; falls $j < n_i$, wird ganz analog, wie eben, gezeigt:
 $h_i^\alpha \subseteq -h_i^{j+1}$, also: $h_i^\alpha \subseteq +h_i^j, -h_i^{j+1} \sim h_i^\alpha \subseteq +h_i^j \cap -h_i^{j+1} = +Q_i^j$. □

1.19 Definition

Sei c eine Zelle des Gitters G im \mathbb{R}^p : $c = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c)$.

$V_i(c)$ sei das Variationsintervall von $Z_i(c)$; (siehe 1.13(2)).

Wir wollen $V_i(c)$ auch das i -te Koordinatenintervall von c nennen, bezeichnet mit $K_i(c)$; $K_i(c) := V(Z_i(c))$.

1.20 Hilfssatz

Sei c eine Zelle des Gitters G im \mathbb{R}^p , $K_i(c)$ ihr i -tes Koordinatenintervall und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\alpha \in K_i(c) \Leftrightarrow \alpha \in V_i(c) \Leftrightarrow h_i^\alpha \cap Z_i(c) \neq \emptyset \Leftrightarrow h_i^\alpha \subseteq Z_i(c).$$

Beweis:

$\alpha \in K_i(c) \Leftrightarrow \alpha \in V_i(c)$ ist klar, aufgrund der Definition von $V_i(c)$ und $K_i(c)$.

Sei $\alpha \in V_i(c)$; falls $V_i(c)$ ein Punktintervall ist, etwa $V_i(c) = [\beta, \beta]$, so muß $\alpha = \beta$ und somit $h_i^\alpha = h_i^\beta$ gelten; damit sind alle Äquivalenzen bewiesen. Sei nun $V_i(c)$ ein reguläres Intervall.

O.b.d.A. genügt es den Fall, daß $V_i(c)$ beschränkt ist, zu betrachten. Sei also $V_i(c) = [\alpha_j, \alpha_{j+1}]$; $Z_i(c)$ ist dann gleich $+Q_i^j = +h_i^j \cap -h_i^{j-1}$. Somit muß $\alpha_j \leq \alpha \leq \alpha_{j+1}$ gelten. Hieraus

jedoch: $h_i^\alpha \subseteq +h_i^j, -h_i^{j+1}$; somit haben wir: $h_i^\alpha \subseteq h_i^j \cap -h_i^{j+1} = +Q_i^j = Z_i(c)$.

$h_i^\alpha \subseteq Z_i(c) \Leftrightarrow h_i^\alpha \cap Z_i(c) = h_i^\alpha \neq \emptyset$. Die Umkehrung des Schlusses folgt aus 1.18. □

1.20.1 Hilfssatz

$$c \cap h_i^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha \in K_i(c).$$

Beweis:

$$c = \bigcap_{j=1}^p Z_j(c). \text{ Somit gilt: } \emptyset \neq \bigcap_{j=1}^p Z_j(c) \cap h_i^\alpha = \bigcap_{j=1}^{i-1} (Z_j(c) \cap h_i^\alpha)$$

$$\cap Z_i(c) \cap h_i^\alpha \cap \bigcap_{j=i+1}^p (Z_j(c) \cap h_i^\alpha) \subseteq Z_i(c) \cap h_i^\alpha. \text{ Somit gibt es min-}$$

destens einen Punkt in $Z_i(c)$, dessen i -te Koordinate gleich α ist. Hieraus folgt sofort $\alpha \in V_i(c) = V(Z_i(c)) = K_i(c)$.

Sei nun umgekehrt $\alpha \in K_i(c) \Leftrightarrow \alpha \in V_i(c) \Leftrightarrow h_i^\alpha \subseteq Z_i(c)$ gemäß 1.13(2).

Seien $h_j, j=1, \dots, p, j \neq i$, Prinzipale des Gitters, welche die von Z_j verschiedenen $Z_j(c)$ bestimmen. nach 1.1(9) gilt:

$$\emptyset \neq h_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p h_j. \text{ Ganz offenkundig liegt aber jeder Punkt aus}$$

diesem Durchschnitt in $c \cap h_i$. □

1.21 Hilfssatz

Seien c_1, c_2 zwei Zellen des Gitters G im \mathbb{R}^p .

$$c_1 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1), \quad c_2 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_2); \text{ ferner sei } j \in \{1, \dots, p\}.$$

$Z_j(c_1) \subseteq Z_j(c_2)$ zieht $c_1 \subseteq c_2$ nach sich.

Beweis:

$Z_j(c_1) \not\subseteq Z_j(c_2)$ ist gleichbedeutend damit, daß es ein x aus \mathbb{R}^p gibt, welches in $Z_j(c_1)$, aber *nicht* in $Z_j(c_2)$, liegt. α sei die j -te Koordinate von x ; somit gilt: $x \in h_j^\alpha$. Falls es einen Punkt y aus $Z_j(c_2)$ mit $y_j = \alpha$ gäbe, müßte nach 1.18 $x \in h_j^\alpha \subseteq Z_j(c_2)$ gelten, im Widerspruch dazu, daß $x \notin Z_j(c_2)$ (s.o.). Somit gilt: $\alpha \in V_j(c_1), \alpha \notin V_j(c_2)$. Nach 1.20 gibt es somit Punkte aus c_1 , deren j -te Koordinate gleich α ist. Diese Punkte können aber nicht in c_2 liegen, da $\alpha \notin V_j(c_2)$. \square

Aus 1.21 folgt sofort, da $Z_i(c_1) \subseteq Z_i(c_2)$ für alle $i=1, \dots, p$,

$$c_1 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1) \subseteq \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_2) = c_2 \text{ nach sich zieht:}$$

1.22 Satz (Kriterium für Enthaltensein von Zellen)

$$c_1 \subseteq c_2 \iff Z_i(c_1) \subseteq Z_i(c_2) \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, p.$$

1.22.1 Folgerung

$$c_1 = c_2 \iff Z_i(c_1) = Z_i(c_2) \text{ für alle } i=1, \dots, p.$$

Beweis:

" \supseteq " ist klar.

" \supseteq ": $c_1 = c_2 \iff c_1 \subseteq c_2 \iff Z_i(c_1) \subseteq Z_i(c_2)$ für alle $i=1, \dots, p$;

Genauso: $c_1 = c_2 \iff c_2 \subseteq c_1 \iff Z_i(c_2) \subseteq Z_i(c_1)$ für alle $i=1, \dots, p$. \square

1.23 Hilfssatz

Sei $c_1 \subseteq c_2$. Falls für ein $i \in \{1, \dots, p\}$, $Z_i(c_1) \subset Z_i(c_2)$ gilt, haben wir auch: $c_1 \subset c_2$.

Beweis:

Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, welches in $K_i(c_2)$, aber nicht in $K_i(c_1)$ liegt; (siehe den Beweis von 1.21). Somit gibt es Punkte aus c_2 , deren i -te Koordinate gleich α ist; es kann jedoch für *keinen* Punkt aus c_1 die i -te Koordinate gleich α sein, da $\alpha \notin K_i(c_1)$; somit gilt die Behauptung. \square

1.24 Hilfssatz

Notwendig und hinreichend dafür, daß $Z_i(c_1) \subset Z_i(c_2)$ ist, ist, daß $Z_i(c_1)$ eine Prinzipalkomponente, $Z_i(c_2)$ regulär und $Z_i(c_1)$ ein Randprinzipal von $Z_i(c_2)$ ist.

Beweis:

" $Z_i(c_1)$ ist Randprinzipal der regulären Zellenkomponente $Z_i(c_2)$ ", zieht offenkundig sofort $Z_i(c_1) \subset Z_i(c_2)$ nach sich. Da aus $Z_i(c_1) \subset Z_i(c_2)$: $Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2) = Z_i(c_1)$, $Z_i(c_1) \neq Z_i(c_2)$, folgt, erhalten wir die Umkehrung aus 1.17(3). \square

1.25 Folgerung

Aus $c_1 \subset c_2$ folgt, daß c_1 *mindestens* eine Prinzipalkomponente mehr besitzen muß, als c_2 . Denn nach 1.22 gilt: $Z_i(c_1) \subseteq Z_i(c_2)$ für alle $i=1, \dots, p$. Da $c_1 \subset c_2$, muß für mindestens ein $j \in \{1, \dots, p\}$ $Z_j(c_1) \subset Z_j(c_2)$ gelten. Aus " $Z_i(c_2)$ ist eine Prinzipalkomponente" folgt, da $Z_i(c_1) \subseteq Z_i(c_2)$, $Z_i(c_1)$ ist eine Prinzipalkomponente. Somit besitzt c_1 mindestens ebensoviele Prinzipalkomponenten, wie c_2 . Nach 1.24 ist jedoch $Z_j(c_2)$ regulär, während $Z_j(c_1)$ eine Prinzipalkomponente ist.

1.26 Satz

Seien c_1, c_2 zwei Zellen auf G .

$c_1 \cap c_2 \neq \emptyset \iff$ Für $j=1, \dots, p$ ist $Z_j(c_1) \cap Z_j(c_2) \neq \emptyset$.

Beweis:

$$\text{Sei } c_1 \cap c_2 \neq \emptyset \iff \emptyset \neq \underbrace{\bigcap_{j=1}^p Z_j(c_1)}_{=c_1} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^p Z_j(c_2)}_{=c_2} = \bigcap_{j=1}^p Z_j(c_1) \cap Z_j(c_2) \subseteq \subseteq Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2) \text{ für alle } i=1, \dots, p.$$

Sei umgekehrt $Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2) \neq \emptyset$ für alle $i=1, \dots, p$. Da der nichtleere Schnitt zweier paralleler Zellenkomponenten Z_j und \bar{Z}_j immer einen zu Z und \bar{Z} parallelen Prinzipal h_j umfaßt, folgt aus 1.1(9), falls $h_i, i=1, \dots, p$, den im nichtleeren Durchschnitt der $Z_i(c_1)$ und $Z_i(c_2), i=1, \dots, p$, gelegenen Prinzipal bezeichnet,

$$c_1 \cap c_2 = \left(\bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^p Z_i(c_2) \right) = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2) \supseteq \bigcap_{i=1}^p h_i \neq \emptyset.$$

□

1.27 Folgerung

Da nach 1.16, 1.17(3) der nichtleere Durchschnitt zweier Zellenkomponenten eines Gitters G wiederum eine Zellenkomponente von G

ist, folgt im Falle $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$, daß $c_1 \cap c_2 = \left(\bigcap_{j=1}^p Z_j(c_1) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^p Z_j(c_2) \right) = \bigcap_{j=1}^p Z_j(c_1) \cap Z_j(c_2)$ als Durchschnitt der p paarweise verschiedenen

Zellenkomponenten $Z_j(c_1) \cap Z_j(c_2) = Z_j(c)$ wiederum eine Zelle auf G ist.

1.28 Hilfssatz

Seien c_1, c_2 zwei Zellen auf G mit $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$. Dann gilt nach 1.27: $c := c_1 \cap c_2$ ist ebenfalls eine Zelle auf G . Falls $Z_i(c_1)$ ($Z_i(c_2)$) eine Prinzipalkomponente ist, gilt: $Z_i(c_1) = Z_i(c)$ ($Z_i(c_2) = Z_i(c)$).

("Der nichtleere Schnitt c zweier Zellen c_1 und c_2 besitzt mindestens soviele Prinzipalkomponenten, wie jede der beiden Zellen c_1 und c_2 ").

Beweis:

Nach 1.26 gilt: $Z_i(c) = Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2) \neq \emptyset$. Es gibt somit einen Prinzipal h_i mit $h_i \subseteq Z_i(c) \subseteq Z_i(c_1) = h_i'$, $h_i \cap h_i' \neq \emptyset \curvearrowright$
 $h_i = h_i'$ (1.18). □

Wir müssen uns nun an die Einführung der k -Zellen begeben:

1.28 Definitionen, Bemerkungen

(1) Der Regularitätsgrad einer Zelle, bezeichnet mit $R(c)$, gibt an, wieviele reguläre Zellenkomponenten bei der Bildung von c auftreten; eine Zelle c mit $R(c)=p$ heiße total regulär; im Falle $1 \leq R(c) < p$ heiße c teilweise regulär. Offensichtlich gilt: $0 \leq R(c) \leq p$, $R(c) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Statt " c ist eine Zelle vom Regularitätsgrad k , $0 \leq k \leq p$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ " sagen wir kurz: " c ist eine k -Zelle", bezeichnet: $c = c^k$; ein oben links an c angehängter Index bezeichnet somit *immer* den Regularitätsgrad von c . Offensichtlich sind Zellen unterschiedlichen Regularitätsgrades als Teilmengen von \mathbb{R}^p voneinander verschieden. Die p -Zellen sind die einzigen total regulären Zellen auf \mathbb{G} .

$p - R(c) =: D(c)$ wollen wir den Defektheitsgrad der Zelle c nennen; $D(c)$ gibt somit an, wieviele Prinzipalkomponenten c besitzt; falls $D(c)=p$, dies ist offenbar gleichbedeutend mit $R(c)=0$, wollen wir c total defekt nennen; es sind somit genau die 0 -Zellen total defekt; falls $1 \leq D(c) < p$, wollen wir c teilweise defekt nennen; offenkundig ist c^k teilweise regulär *und* teilweise defekt genau dann, wenn $1 \leq k \leq p-1$.

Wir wollen noch einige Bezeichnungsweisen vereinbaren:

Sei c eine Zelle des Gitters \mathbb{G} :

Falls $Z_i(c)$ eine Defektkomponente von c ist, wollen wir die i -te Koordinatenachse eine Defektachse von c und i einen Defektindex von c nennen;

falls $Z_j(c)$ eine reguläre Komponente von c ist, wollen wir die j -te Koordinatenachse eine Regularitätsachse von c und j einen Regularitätsindex von c nennen.

$\text{Def}(c) \subseteq \{1, \dots, p\}$ bezeichne die Menge aller Defektindizes von c ;

$\text{Reg}(c) \subseteq \{1, \dots, p\}$ bezeichne die Menge aller Regularitätsindizes von c .

Offenkundig gilt: $\{1, \dots, p\} = \text{Def}(c) \dot{\cup} \text{Reg}(c)$ für jede Zelle c eines Gitters \mathbb{G} . $\text{card}(\text{Reg}(c)) = p - \text{card}(\text{Def}(c))$; $\text{card}(\text{Reg}(c)) = k$ genau dann, wenn c eine k -Zelle ist. $\text{Def}(c) = \emptyset$ genau dann, wenn c eine p -Zelle ist; $\text{Reg}(c) = \emptyset$ genau dann, wenn c eine 0 -Zelle ist.

Falls c, c' zwei Zellen, welche nicht unbedingt bzgl. desselben Gitters \mathbb{G} gebildet zu sein brauchen, sind, ist offenkundig $\text{Reg}(c') \subseteq \text{Reg}(c)$ gleichbedeutend mit $\text{Def}(c) \subseteq \text{Def}(c')$.

- (2) Sei c eine Zelle auf \mathbb{G} und $K_i = K_i(c)$, $i=1, \dots, p$ das i -te Koordinatenintervall von c (1.19, 1.13(2)):

Offensichtlich gilt: $c = \bigtimes_{i=1}^p K_i(c)$. Falls $R(c)=0$, c somit eine

O-Zelle c^0 ist, sind alle $K_i(c^0)$ Punktintervalle; eine O-Zelle ist daher ein Punkt des \mathbb{R}^p ; wir wollen deshalb die O-Zellen die Gitterpunkte des Gitters \mathbb{G} nennen; eine p -Zelle ist ein reguläres, nicht ausgeartetes Intervall des \mathbb{R}^p . Jede teilweise reguläre und defekte Zelle c^k läßt sich als cartesisches Produkt eines Punktes $x=(x_1, x_2, \dots, x_{p-k})=:x(c^k)$ aus \mathbb{R}^{p-k} und eines nicht ausgearteten (regulären) abgeschlossenen Intervalles $I=I(c^k) \subseteq \mathbb{R}^k$ auffassen; (unter Umständen müssen die Koordinatenachsen geeignet miteinander vertauscht werden); $x(c^k)$ wollen wir den Koordinatenpunkt von c^k in \mathbb{R}^{p-k} , $I(c^k)$ das Modellintervall von c^k in \mathbb{R}^k , nennen.

Jede defekte Zelle c ($k=R(c) \leq p-1$) ist ganz in einem Prinzipal h von \mathbb{G} enthalten, somit als abgeschlossene Teilmenge des nirgendsdichten Prinzipals h selbst abgeschlossen und nirgendsdicht (1.1(2)), und stimmt daher mit ihrem topologischen Rand bzgl. \mathbb{R}^p überein (I 1.37(2)). Jede beliebige Vereinigung defekter Zellen ist somit ganz in $|\mathbb{G}| \subseteq \mathbb{R}^p$ enthalten (1.2(3)), besitzt somit nicht leeres Komplement bzgl. \mathbb{R}^p . Aus dem eben Gesagten ("Jede k -Zelle mit $k \leq p-1$ ist nirgendsdicht") und der weiter oben erwähnten Tatsache, daß jede p -Zelle ein reguläres Intervall im \mathbb{R}^p ist, folgt: das Innere bzgl. \mathbb{R}^p einer Zelle ist genau dann nicht leer, wenn c eine p -Zelle, somit total regulär ist.

$\Omega^k = \Omega^k(\mathbb{G})$ bezeichne die Gesamtheit der k -Zellen des Gitters \mathbb{G} .

- (3) Eine beliebige Zelle c heiße beschränkt, wenn sie als Teilmenge des \mathbb{R}^p beschränkt ist, andernfalls unbeschränkt.

Die Zelle c , ist als abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^p somit genau dann kompakt, wenn sie beschränkt ist. Eine Zelle c ist offensichtlich genau dann beschränkt, wenn ihre sämtlichen Koordinatenintervalle bzw. ihren sämtlichen Komponenten beschränkt sind (1.13(2)); jede O-Zelle ist beschränkt.

(4) Sei $c = \bigcap_{j=1}^p Z_j(c)$.

Wir wollen folgende Sprechweise vereinbaren:

Falls $Z_i(c)$, $i \in \{1, \dots, p\}$, regulär ist, sagen wir:

"c wird in der i-ten Koordinate (der i-ten Koordinatenachse) (nach oben, nach unten) entregularisiert", wenn die Zellenkomponente $Z_i(c)$ durch (den oberen, unteren) einen Randprinzipal ersetzt wird.

$c' = \bigcap_{j=1}^{i-1} Z_j(c) \cap Z_i(c') \cap \bigcap_{j=i+1}^p Z_j(c)$, wobei $Z_i(c')$ (den oberen, unteren) einen Randprinzipal von $Z_i(c)$ bezeichnen soll, ist

eine (die) aus c durch Entregularisierung (nach oben, nach unten) in der i-ten Koordinatenachse hervorgegangene (entstandene) Zelle.

Offenkundig wird bei der Entregularisierung von c nach unten in der i-ten Koordinatenachse, $K_i(c)$, das i-te Koordinatenintervall, durch seinen unteren Randpunkt ersetzt. Im Falle der Entregularisierung nach oben in der i-ten Koordinatenachse, wird $K_i(c)$ durch seinen oberen Randpunkt ersetzt; im Falle der Entregularisierung in der i-ten Koordinatenachse tritt anstelle des i-ten Koordinatenintervalls einer seiner Randpunkte.

Umgekehrt, falls $Z_i(c)$ eine Prinzipalkomponente ist, sagen wir "c wird in der i-ten Koordinate (in der i-ten Koordinatenachse) (nach oben, nach unten) regularisiert", wenn die Zellenkomponente $Z_i(c)$ durch eine (die obere, die untere) der $Z_i(c) = h_i^j$ zugeordneten regulären Zellenkomponenten ersetzt wird.

$c' = \bigcap_{j=1}^{i-1} Z_j(c) \cap Z_i(c') \cap \bigcap_{j=i+1}^p Z_j(c)$, wobei $Z_i(c')$ (die obere, die untere) eine $h_i^j = Z_i(c')$ zugeordnete reguläre Zellenkomponente

bezeichnen soll, ist eine (die) aus c durch Regularisierung (nach oben, nach unten) in der i-ten Koordinate (in der i-ten Koordinatenachse) hervorgegangene (entstandene) Zelle.

Wir sagen: "c' ist aus c durch Entregularisierung hervorgegangen (entstanden)", wenn c' aus c durch Entregularisierungen in voneinander verschiedenen Koordinatenachsen (durch Entregularisierung in einer Koordinate) hervorgeht; c' heiße dann ein Entregularisat von c, bezeichnet: $c' = \text{Ereg}(c)$;

"c' ist aus c durch Regularisierung hervorgegangen (entstanden)", falls c' aus c durch Regularisierungen in voneinander verschiedenen Koordinatenachsen (durch Regularisierung in einer Koordinate) aus c hervorgeht; c' heiße dann eine Regularisat von c, bezeichnet: $c' = \text{Regu}(c)$.

c' ist ein Regularisat von c genau dann, wenn c ein Entregularisat von c' ist. ($c' = \text{Regu}(c) \vee c = \text{Ereg}(c')$.)

Aus $c = \text{Regu}(c')$ folgt: $c \supset c'$ (1.23, 1.25);

aus $c = \text{Ereg}(c')$ folgt: $c' \supset c$ (1.23, 1.25).

Falls $Z_i(c)$ eine reguläre Komponente von c ist, heiÙe c in der i -ten Koordinate (Komponente) entregularisierbar;

falls $Z_i(c)$ eine Prinzipalkomponente ist, heiÙe c in der i -ten Koordinate (Komponente) regularisierbar. Die Begriffe " c ist in der i -ten Koordinate (Komponente) (nach oben, nach unten) (ent-)regularisierbar", " c ist (ent-)regularisierbar" ergeben sich sinngemäß.

Falls c in der i -ten Koordinate

regularisierbar ist, ist c_o , die aus c durch Regularisierung nach oben in der i -ten Koordinatenachse hervorgegangene Zelle, von c_u , der aus c durch Regularisierung nach unten in der i -ten Koordinatenachse hervorgegangenen Zelle, verschieden, da $Z_i(c_o) \neq Z_i(c_u)$ (1.13(3), 1.22.1). Ebenso gilt, falls c in der i -ten Koordinate sowohl nach oben, wie nach unten entregularisierbar ist, daß $c_o \neq c_u$; dabei bezeichne c_o die aus c durch Entregularisierung in der i -ten Koordinate nach oben, c_u die aus c durch Entregularisierung in der i -ten Koordinate nach unten hervorgegangene Zelle.

Offenkundig können p -Zellen nur entregularisiert, 0 -Zellen nur regularisiert werden; beschränkte k -Zellen, mit $1 \leq k \leq p-1$, können in allen Koordinaten, in denen sie entregularisierbar sind, sowohl nach oben, wie nach unten entregularisiert werden; in der i -ten Koordinate regularisierbare Zellen sind offenkundig in der i -ten Koordinate sowohl nach oben, wie nach unten regularisierbar. So sind 0 -Zellen in *sämtlichen* Koordinaten regularisierbar.

Sei $k < p$. Dann geht jede k -Zelle aus einer geeigneten s -Zelle, $p \geq s > k$, durch Entregularisierungen hervor; jede Zelle eines Gitters ist somit in einer geeigneten p -Zelle desselben enthalten.

Wir wollen noch folgende Bezeichnungsweise vereinbaren:

Sei c^k eine k -Zelle des Gitters G und $k \geq 1$. Die i -te Koordinatenachse sei eine Regularitätsachse von c^k . Falls c^k in der i -ten Achse nach unten (nach oben) entregularisierbar ist, bezeichne $-c_i^k$ ($+c_i^k$) die aus c^k durch Entregularisierung nach unten (nach oben) in der i -ten Achse hervorgegangene und in c^k enthaltene $(k-1)$ -Zelle; falls $c^k = c_m^k$, sei $-c_i^k =: -c_{m,i}^k$, $+c_i^k =: +c_{m,i}^k$.

- (5) Mit der in (4) bereitgestellten Sprechweise kann das Kriterium für das echte ineinander Enthaltensein zweier Zellen besonders einprägsam formuliert werden:

Seien c_1, c_2 zwei Zellen des Gitters \mathbb{G} im \mathbb{R}^p .

Es gilt $c_1 \subset c_2$ genau dann, wenn c_1 Entregularisat von c_2 und c_2 Regularisat von c_1 ist (1.22, 1.23 und 1.24(4)).

Hieraus folgt sofort, daß $c_1 \subset c_2 \implies R(c_1) < R(c_2)$ nach sich zieht.

- (6) Sei $c = c^k$ eine k -Zelle des Gitters \mathbb{G} , welche im Prinzipal h_i^j von \mathbb{G} enthalten ist; (also: $k \leq p-1, Z_i(c) = h_i^j$). Dann gibt es genau zwei $(k+1)$ -Zellen c_1^{k+1}, c_2^{k+1} , die c enthalten, aber keine Teilmengen von h_i^j sind; sie gehen aus c durch Regularisierung nach oben bzw. nach unten in der i -ten Koordinate hervor.

Beweis:

Sei $c^{k+1} = c'$ eine $(k+1)$ -Zelle, welche c umfaßt. c' geht dann aus c durch Regularisierung in irgendeiner Defektachse von c hervor. Falls diese Defektachse von der i -ten Koordinatenachse verschieden ist, gilt: $Z_i(c') = h_i^j$, somit $c' \subseteq h_i^j$. Damit also eine c^{k+1} , welche c umfaßt, nicht in h_i^j enthalten ist, muß besagte c^{k+1} aus c durch Regularisierung in der i -ten Koordinatenachse entstehen. c ist aber in der i -ten Koordinatenachse auf genau zwei Weisen regularisierbar, nämlich nach oben und nach unten. Die durch die Regularisationen nach oben bzw. nach unten aus c entstandenen Zellen sind zwei voneinander verschiedene $(k+1)$ -Zellen, welche c umfassen, aber nicht in h_i^j enthalten sind. \square

Insbesondere ist jede $(p-1)$ -Zelle c^{p-1} in genau einem Prinzipal enthalten; daher gibt es genau zwei p -Zellen, die Regularisate von c^{p-1} sind und daher c^{p-1} umfassen.

- (7) Für kein $k \geq 1$ ist eine k -Zelle c^k die Vereinigung der in ihr enthaltenen $(k-1)$ -Zellen.

Alle Punkte x , deren Koordinaten bezüglich der Regularitätsachsen von c^k im Innern der zu den Regularitätsachsen gehörigen Koordinatenintervalle von c^k liegen, können in keiner in c^k enthaltenen $(k-1)$ -Zelle liegen, da jede in c^k enthaltene $(k-1)$ -Zelle c' aus c durch Entregularisierung in einer Regularitätsachse von c hervorgeht. Für jeden Punkt y aus c' muß daher die Koordinate bezüglich dieser zusätzlichen Defektachse mit einem Randpunkt des zu dieser Defektachse von c' gehörigen regulären Koordinatenintervalls von c übereinstimmen.

Dies legt folgende Vereinbarung nahe:

Sei c^k , $k \geq 1$, eine k -Zelle des Gitters \mathbb{G} . Unter dem Inneren von c^k wollen wir die Menge aller x aus c^k verstehen, deren Koordinaten bezüglich der Regularitätsachsen von c im Innern der zu den Regularitätsachsen gehörigen Koordinatenintervalle von c liegen. Punkte x aus c^k der eben beschriebenen Art wollen wir innere Punkte von c^k nennen. Für $k \geq 1$ ist das Innere jeder k -Zelle *nicht* leer. Es ist zu beachten, daß jede k -Zelle mit $k < p$ bezüglich \mathbb{R}^p keine inneren Punkte besitzt. Die neue Sprechweise bietet jedoch kaum Verwechslungsmöglichkeiten und rechtfertigt sich dadurch, daß das Innere jeder Zelle mit dem Inneren bzgl. \mathbb{R}^k des Modellintervalls der Zelle übereinstimmt. Somit fällt das Innere jeder p -Zelle mit ihrem Inneren bzgl. \mathbb{R}^p zusammen.

Wir haben: Das Innere jeder k -Zelle c , $k \geq 1$, hat mit jeder in c enthaltenen $(k-1)$ -Zelle c' leeren Durchschnitt.

1.29 Satz

Seien c_1, c_2 zwei k -Zellen desselben Gitters \mathbb{G} und $k \geq 1$. Wenn jede reguläre Zellenkomponente von c_1 mit einer regulären Zellenkomponente von c_2 übereinstimmt und die beiden Zellen nicht leeren Durchschnitt besitzen, so stimmen sie miteinander überein.

Beweis:

Wenn jede reguläre Zellenkomponente von c_1 mit einer regulären Zellenkomponente von c_2 übereinstimmt, kann c_2 keine weiteren regulären Zellenkomponenten besitzen, da c_2 offensichtlich denselben Regularitätsgrad, wie c_1 besitzt. Somit stimmen die zueinander parallelen, regulären Zellenkomponenten von c_1 und c_2 überein. Stimmen nun zwei zueinander parallele Prinzipalkomponenten von c_1 und c_2 nicht überein, so hätten sie leeren Durchschnitt und nach 1.26 hätten dann aber auch c_1 und c_2 leeren Durchschnitt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit stimmen c_1 und c_2 in allen zueinander parallelen Zellenkomponenten überein und sind deshalb einander gleich. □

Aus 1.29 ergibt sich unmittelbar:

1.30 Folgerung

Seien $c_1 = c_1^k, c_2 = c_2^k, c_1 \neq c_2, (c_1 \cap c_2 \neq \emptyset)$ zwei verschiedene k -Zellen desselben Gitters \mathbb{G} und $k \geq 1$. Dann gibt es mindestens eine reguläre Komponente von c_1 , die mit der zu ihr parallelen Komponente von c_2 nicht übereinstimmt.

1.31 Satz

Seien $c_1 = c_1^k$, $c_2 = c_2^k$, $c_1 \neq c_2$, zwei verschiedene k -Zellen desselben Gitters G , $k \geq 1$.

Aus $c = c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ folgt: c ist eine Zelle von G , deren Regularitätsgrad höchstens gleich $(k-1)$ ist.

("Zwei verschiedene k -Zellen desselben Gitters schneiden sich höchstens in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Zelle.")

Nach 1.28(5) ist c sowohl Entregularisat von c_1 , als auch von c_2 . Zwei voneinander verschiedene 0 -Zellen sind disjunkt, da zwei verschiedene Punkte des \mathbb{R}^p disjunkt sind.

Beweis:

$$c_1 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1), \quad c_2 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_2). \quad \text{Somit: } c = c_1 \cap c_2 = \bigcap_{i=1}^p Z_i(c_1) \cap Z_i(c_2)$$

ist eine Zelle gemäß 1.27. Sei $Z_j(c_1)$ diejenige reguläre Komponente von c_1 , welche nach 1.30 von $Z_j(c_2)$ verschieden ist. Nach 1.17(3) gilt dann, daß $Z_j(c_1) \cap Z_j(c_2)$ eine Prinzipalkomponente ist. Falls $Z_r(c_1)$ eine Prinzipalkomponente ist, gilt: $Z_r(c) = Z_r(c_1)$, $r = 1, \dots, p$, nach 1.28. Somit besitzt c mindestens eine Prinzipalkomponente mehr als c_1 ; somit ist $R(c) \leq k-1$. \square

1.31.1 Folgerung

Sei $k \geq 1$. Das Innere jeder k -Zelle c^k hat mit jeder von c^k verschiedenen k -Zelle desselben Gitters leeren Durchschnitt.

Beweis:

c^k trifft sich mit c_1^k , $c_1^k \neq c^k$, höchstens in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Zelle. Nach 1.28(7) besitzt das Innere von c^k mit jeder in c^k enthaltenen $(k-1)$ -Zelle leeren Durchschnitt. \square

1.31.2 Satz

Seien G, G' zwei Gitter des \mathbb{R}^p . c sei eine Zelle von G , c' eine Zelle von G' . Notwendig dafür, daß $c' \subseteq c$ (c, c' als Punktmenge des \mathbb{R}^p aufgefaßt) ist, daß $\text{Reg}(c') \subseteq \text{Reg}(c)$ oder gleichbedeutend damit, daß $\text{Def}(c) \subseteq \text{Def}(c')$ gilt. Wegen der Bedeutung von $\text{Reg}(c)$, $\text{Def}(c)$ siehe 1.28(1).

Beweis:

Angenommen $\text{Reg}(c') \not\subseteq \text{Reg}(c)$. Dann gibt es ein j , $1 \leq j \leq p$, dergestalt, daß $j \in \text{Reg}(c')$, aber $j \notin \text{Reg}(c)$; die j -te Koordinate x_j jedes Punktes x aus c' kann somit in einem nicht ausgearteten Intervall I variieren, während y_j , die j -te Koordinate jedes Punktes y aus c gleich einer reellen Zahl α sein muß. $I \setminus \{\alpha\}$ ist somit nicht leer und kein Punkt x aus c' mit $x_j \in I \setminus \{\alpha\}$ kann in c enthalten sein. \square

1.32 Gitter im Z^P

Z^P sei die ALEXANDROFFsche Einpunktkompaktifizierung des \mathbb{R}^P , \mathbb{R}^P versehen mit der Normtopologie; (\mathbb{R}^P ist ein endlichdimensionaler normierter linearer Raum, daher sind alle Normen auf \mathbb{R}^P äquivalent, und erzeugen somit dieselbe Topologie.) w bezeichne den nicht zu \mathbb{R}^P gehörigen Punkt, der zu \mathbb{R}^P hinzugenommen Z^P ergibt. (Wir wählen die Bezeichnung w , um Verwechslungen mit $-d, d$, die zu \mathbb{R} hinzugenommen $\bar{\mathbb{R}}$, die abgeschlossene reelle Gerade, ergeben, zu vermeiden.)

Die Elemente eines (rechtwinkligen) Gitters $G=G'_w$ in Z^P sind die Prinzipale eines Gitters G' des \mathbb{R}^P und der Punkt w ; $G=G' \cup \{w\}$. Wir sagen $G=G'_w=G' \cup \{w\}$ werde von G' erzeugt; G' ist das G erzeugende Gitter.

Die ganze Gitter im \mathbb{R}^P betreffende Terminologie überträgt sich ohne weiteres vom G erzeugenden Gitter G' auf G . $|G| = |G' \cup \{w\}$; $|G|$ um faßt somit die abgeschlossene Hülle bzgl. Z^P der Prinzipale aus G' ; $|G|$ läßt sich sogar als die Vereinigung der Abschließungen bzgl. Z^P aller Prinzipale aus G' darstellen und ist deshalb als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ohne innere Punkte (1.1(2), I 3.9(5)) selbst abgeschlossen und ohne innere Punkte, somit nirgendsdicht.

Genau, wie in 1.13(3) werden den Prinzipalen h_i^j aus G die Zellenkomponenten Z_i^j zugeordnet; dem Punkt w werden *keine* Zellenkomponenten zugeordnet.

1.33 Zellen eines Gitters G im Z^P

Sei G ein Gitter im Z^P .

Zunächst vereinbaren wir: w ist eine 0-Zelle von G .

Dann bilden wir alle möglichen Schnitte

$c' = \bigcap_{i=1}^p Z_i^{j_i}$, $1 \leq j_i \leq n_i$. Diese Schnitte nennen wir Präzellen

von G . Falls alle $Z_i^{j_i}$ im Sinne von 1.13(2) beschränkt sind, (also kein $Z_i^{j_i}$ gleich $-h_i^1, +h_i^{n_i}$), nennen wir einen solchen Schnitt eine k -Zelle des Gitters G , falls k der $Z_i^{j_i}$ regulär sind. Falls *mindestens* ein $Z_i^{j_i}$ im Sinne von 1.13(2) unbeschränkt ist (also gleich $-h_i^1, +h_i^{n_i}$ ist), vereinigen wir diesen Schnitt noch

mit dem Punkt w und nennen dann $\bigcap_{i=1}^p Z_i^{j_i} \cup \{w\}$ eine k -Zelle von G , falls wiederum k der $Z_i^{j_i}$ regulär sind; $0 \leq k \leq p$, $k \in \mathbb{Z}$.

Man hätte die k -Zellen auch als die abgeschlossenen Hüllen bzgl. \mathbb{Z}^P der k -Zellen des \mathbb{G} erzeugenden Gitters \mathbb{G}' im \mathbb{R}^P einführen können, wobei w noch zusätzlich als O -Zelle gilt. Die beschränkten Zellen sind kompakt in \mathbb{R}^P , also abgeschlossen in \mathbb{Z}^P , die abgeschlossene Hülle jeder unbeschränkten Zelle c von \mathbb{G}' ist $cv\{w\}$ (I 3.9). Zellen werden auch künftig mit c bezeichnet.

Sei c eine Zelle auf \mathbb{G} , $c \neq w$ und c' ihre Präzelle $\subseteq \mathbb{R}^P$.

Offenkundig gilt: $c = c' \cup c'$ \cap c' ist beschränkt als Teilmenge von \mathbb{R}^P .

$$c = c' \cup \{w\} \supset c \cap c' \text{ ist unbeschränkt als Teilmenge von } \mathbb{R}^P.$$

Die ganze für Zellen eines Gitters \mathbb{G} im \mathbb{R}^P entwickelte Terminologie überträgt sich ohne große Umstände von den Präzellen des Gitters \mathbb{G}' , das \mathbb{G} erzeugt, auf die Zellen von \mathbb{G} , die von w verschieden sind. Insbesondere ist wiederum jede Vereinigung defekter Zellen ganz in $|\mathbb{G}|$ enthalten, also nirgendsdicht als Teilmenge der nirgendsdichten Menge $|\mathbb{G}|$. w wollen wir ebenfalls als total defekt bezeichnen.

Falls $c=c^k$, $k \geq 2$, und etwa $K_1(c) = (-\infty, a]$, so kann c in der i -ten Achse nur nach oben entregularisiert werden; für 1 -Zellen wollen wir jedoch den Entregularisierungssprachgebrauch, wie folgt, festlegen: Falls $c=c^1$ und $K_1(c) = (-\infty, a]$, so bedeutet "c wird in der i -ten Achse nach unten entregularisiert", daß wir c durch die O -Zelle w ersetzen; entsprechende Bedeutung besitzt die Sprechweise "c wird in der i -ten Achse nach oben entregularisiert".

Wir haben aufgrund von I 3.9(2): Die Zellen eines Gitters im \mathbb{Z}^P sind nichtleer, abgeschlossen und zusammenhängend.

1.34 Satz

Sei \mathbb{G} ein Gitter im \mathbb{Z}^P und c_1, c_2 zwei Zellen auf \mathbb{G} , $c_1, c_2 \neq w$, und c'_1, c'_2 seien ihre Präzellen (1.33).

Dann gilt:

$$(1) \quad c_1 = c_2 \cap c'_1 = c'_2;$$

$$(2) \quad c_1 \subset c_2 \cap c'_1 \subset c'_2.$$

Beweis:

\bar{A} bezeichne im folgenden stets die Abschließung einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^P$ bzgl. \mathbb{Z}^P .

(1) $c'_1 = c'_2 \cap \overline{c'_1 = c'_2}$; sei nun $c_1 = c_2$. Falls $w \in c_1 \cap c_2$, $c_1 = c'_1 \cup \{w\}$, $c_2 = c'_2 \cup \{w\}$, somit $c'_1 = c_1 \setminus \{w\} = c_2 \setminus \{w\} = c'_2$. Falls w nicht in c_1 liegt, liegt w auch nicht in c_2 und wir sind fertig, da in diesem Fall $c_1 = c'_1 = c'_2 = c_2$.

(2) $c_1' \subset c_2'$: Falls w nicht in c_1 liegt gilt: $c_1' = c_1 \subset c_2' \subseteq c_2$. Falls w in c_1 liegt, liegt w a fortiori in c_2 und wir haben: $c_1 = c_1' \cup \{w\} \subset c_2' \cup \{w\} = c_2$. Sei umgekehrt $c_1 \subset c_2$; falls w nicht in c_1 liegt sind wir wiederum schnell fertig, da $c_1 = c_1' \subset c_2' \subseteq c_2$. Falls w in c_1 liegt, liegt w wiederum a fortiori in c_2 und wir haben: $c_1 \cup \{w\} = c_1' \subset c_2' = c_2 \cup \{w\}$.

1.35 Folgerung

(1) Satz 1.34 legt folgende Sprechweise nahe:

Seien c_1, c_2 zwei von w verschiedene Zellen des Gitters G im \mathbb{Z}^p . c_1', c_2' seien ihre Präzellen auf G' , dem G erzeugenden Gitter im \mathbb{R}^p .

c_1 heißt (Ent-)Regularisat von c_2 genau dann, wenn c_1' (Ent-)Regularisat von c_2' im Sinne von 1.28(4) ist.

Wir haben somit auch für Zellen c_1, c_2 eines Gitters G im \mathbb{Z}^p die Beziehung 1.28(5):

$c_1 \subset c_2$ genau dann, wenn c_1 Entrégularisat von c_2 und c_2 Regularisat von c_1 ist.

Auch 1.28(6) wird genauso bewiesen, wie im Falle, daß G ein Gitter im \mathbb{R}^p ist.

(2) Offenkundig gilt für jede Zelle $c \neq w$ des Gitters G im \mathbb{Z}^p : $c \supset \{w\} \cap c$ ist unbeschränkt.

Auch zwei k -Zellen, $k \geq 1$, eines Gitters G im \mathbb{Z}^p treffen sich höchstens in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Zelle, da ihre Präzellen sich höchstens in einer gemeinsamen $(k-1)$ -Präzelle treffen. Ist diese beschränkt, so ist sie selbst eine $(k-1)$ -Zelle von G ; ist sie unbeschränkt, so sind auch die beiden k -Zellen a fortiori unbeschränkt und sowohl die $(k-1)$ -Präzelle, als auch die beiden k -Präzellen müssen mit w vereinigt werden, damit eine $(k-1)$ -Zelle bzw. k -Zellen des Gitters G entstehen können. Besagte $(k-1)$ -Zelle ist dann der Schnitt der beiden k -Zellen.

1.36 Satz (Gittertrennungssatz)

Seien A, B zwei abgeschlossene, disjunkte Teilmengen des \mathbb{Z}^p , (zwei abgeschlossene, disjunkte Teilmengen des \mathbb{R}^p , von denen mindestens eine beschränkt und daher kompakt ist). $p \geq 2$.

Dann gibt es ein Gitter G im \mathbb{Z}^p (in \mathbb{R}^p) dergestalt, daß kein Zelle von G zugleich jede der beiden Mengen A und B trifft.

Wir wollen diesen Sachverhalt auch folgendermaßen ausdrücken:

A und B werden durch das Gitter G getrennt.

Beweis:

Da A und B disjunkt sind, enthält mindestens eine von ihnen, etwa A, den Punkt w nicht. Also: $A \subseteq \mathbb{R}^p$, A kompakt und abgeschlossen in \mathbb{R}^p nach I 3.8.2. Da A in \mathbb{R}^p kompakt ist, liegt A im Inneren eines geeigneten "Würfels" bzgl. der Maximumnorm des \mathbb{R}^p . Somit $A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^p \mid \max_{i=1}^p |x_i| \leq r\} =: W$. Somit gilt für

alle $x \in A$: $|x_i| < r$ für alle $i=1, \dots, p$. W ist kompakt in \mathbb{R}^p , somit abgeschlossen in \mathbb{Z}^p (I 3.8.2), daher ist $W \cap B$ abgeschlossen in \mathbb{Z}^p , und da $W \cap B \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^p$, kompakt in \mathbb{R}^p (I 3.8.2).

Ferner gilt $\emptyset \subseteq A \cap (W \cap B) = W \cap (A \cap B) \subseteq A \cap B = \emptyset$. Somit besitzen die kompakten und disjunkten Mengen A und $W \cap B$ positiven Abstand δ in \mathbb{R}^p (KUHN, Topologie, 3.1, p.150).

Sei $N \ni m \geq \frac{2rp}{\delta} \wedge \frac{2r}{m} \leq \frac{\delta}{p}$.

Das Gitter G wird nun, wie folgt, gebildet:

Die kleinste Bestimmungszahl eines Prinzipals aus G_i , dem i-ten Teilgitter, sei $-r$, die nächstfolgende $-r + \frac{2r}{m}$, usw., die j-te $-r + (j-1)\frac{2r}{m}$, n_i sei gleich $m+1$. Somit gilt: $\alpha_{n_i} = -r + 2r = r$.

So verfahren wir für jedes $i=1, \dots, p$.

Die Bestimmungszahlen der Prinzipale jedes Teilgitters folgen somit äquidistant aufeinander.

Da A ganz im Innern von W liegt, trifft A keine unbeschränkte Zelle von G, da für jeden Punkt x aus einer unbeschränkten Zelle von G, $x_i \leq -r$ oder $x_i \geq r$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, p\}$ gelten muß, aufgrund der Konstruktion von G.

Sei nun c^p eine beschränkte Zelle von G. Enthielte sie einen Punkt $y \in B$ und einen Punkt $x \in A$, so gälte: $\delta = d(A, B \cap W) \leq d(x, y) \leq d(c^p) = \sqrt{p} \cdot \frac{2r}{m} < p \cdot \frac{2r}{m} = p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta$; dies ist aber ein Widerspruch.

Somit trifft keine p-Zelle von G gleichzeitig A und B. Da jede k-Zelle von G, außer w, aus einer geeigneten p-Zelle von G durch Entregularisierung hervorgeht und daher nach 1.28(5) in einer geeigneten p-Zelle enthalten ist, kann keine von w verschiedene k-Zelle von G gleichzeitig A und B treffen; ferner gilt $w \in A$ (s.o.). Falls wir unsere Betrachtungen im \mathbb{R}^p durchführen, gilt: o.B.d.A. ist A kompakt nach Voraussetzung, $A \cap B$ ist dann abgeschlossen, $A \cap B \subseteq A$ und deshalb ist $A \cap B$ kompakt als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A; der Rest geht dann genauso wie oben.

□

1.37 Definition

Eine k-Kette τ^k , $k=0,1,\dots,p$, auf einem Gitter \mathbb{G} ist ein endliches System voneinander verschiedener k-Zellen.

$\tau^k = \{c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k\} \subseteq \Omega^k$ (1.28(3)), somit haben wir: $\tau^k \in \mathcal{P}(\Omega^k)$.

Das leere System von k-Zellen wird mit 0^k bezeichnet. Zwei k-Ketten τ_1^k, τ_2^k heißen gleich, wenn sie als Zellensysteme gleich sind.

τ_1^k heißt Teilkette von τ_2^k , wenn das System τ_1^k ein Teilsystem von τ_2^k ist.

Unter der Summe (modulo 2) $\tau_1^k + \tau_2^k$ zweier k-Ketten versteht man das System derjenigen k-Zellen c^k von \mathbb{G} , die in genau einer der beiden Ketten enthalten sind:

$\tau_1^k + \tau_2^k = (\tau_1^k \cup \tau_2^k) \setminus (\tau_1^k \cap \tau_2^k) = \tau_1^k \Delta \tau_2^k$; $\tau_1^k + \tau_2^k$ ist somit die symmetrische Differenz in $\mathcal{P}(\Omega^k)$ der beiden Systeme τ_1^k, τ_2^k .

Da die symmetrische Differenz bekanntlicherweise kommutativ und assoziativ ist, ist auch die Summe (modulo 2) der k-Ketten assoziativ und kommutativ.

Für jede Kette τ^k gilt: $\tau^k + 0^k = \tau^k$; d.h. 0^k ist das neutrale Element der Addition.

Für jede Kette gilt: $\tau^k + \tau^k = 0^k$ (klar, da $A \Delta A = \emptyset$); d.h. τ^k ist zu τ^k invers; man schreibt, wie üblich: $-\tau^k = \tau^k$.

Somit gilt:

1.38 Satz

Die k-Ketten auf \mathbb{G} , also $\mathcal{P}(\Omega^k(\mathbb{G}))$, bilden bezüglich der Addition (modulo 2) eine kommutative Gruppe.

Damit besitzt die Gleichung $\tau_1^k + \tau^k = \tau_2^k$ die eindeutige Lösung: $\tau^k = \tau_2^k + (-\tau_1^k) = \tau_2^k + \tau_1^k$.

1.39 Bemerkungen

(1) Aufgrund des Assoziativgesetzes lassen sich induktiv Summen von endlich vielen k-Ketten bilden:

$\sum_{j=1}^n \tau_j^k = \tau_1^k + \tau_2^k + \dots + \tau_n^k$ ist das System derjenigen k-Zellen

von \mathbb{G} , die in einer ungeraden Anzahl der Ketten $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k$

enthalten sind. Dies ist klar im Falle $n=1$, wo $\sum_{j=1}^1 \tau_j^k = \tau_1^k$

und $n=2$, aufgrund der Definition der Summe (modulo 2) von

k-Ketten. Gelte nun also $\tau_0^k = \sum_{j=1}^n \tau_j^k$ besteht aus allen

k-Zellen, welche in einer ungeraden Anzahl der Ketten $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k$

enthalten sind. Sei nun τ_{n+1}^k eine weitere k -Kette auf G .

Definitionsgemäß ist $\sum_{j=1}^n \tau_j^k + \tau_{n+1}^k = \sum_{j=1}^{n+1} \tau_j^k$ (aufgrund der

Assoziativität der Addition modulo 2) das System derjenigen k -Zellen von G , welche in genau einer der beiden k -Ketten τ_0^k oder τ_{n+1}^k enthalten sind; für jede k -Zelle c^k , die Element von $\tau_0^k + \tau_{n+1}^k$ ist, gilt somit: *entweder* ist c^k Element von τ_0^k und *kein* Element von τ_{n+1}^k , *oder* c^k ist Element von τ_{n+1}^k und *kein* Element von τ_0^k . Im ersten Fall ist c^k Element einer ungeraden Anzahl der $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k$ und da c^k in τ_{n+1}^k nicht auftritt, tritt c^k in einer ungeraden Anzahl der $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k, \tau_{n+1}^k$ auf; im zweiten Fall tritt c^k in τ_0^k nicht auf, ist somit Element einer geraden Anzahl der $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k$, insgesamt somit Element von ungeradzahlig vielen der $\tau_1^k, \dots, \tau_n^k, \tau_{n+1}^k$.

Wir setzen: $0 \cdot \tau^k := 0^k$ und für $n \in \mathbb{N}$ wird $n \cdot \tau^k = \underbrace{\tau^k + \dots + \tau^k}_{n\text{-Summanden}} =$

$$\begin{cases} 0^k, & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \tau^k, & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

$(-n) \cdot \tau^k := n \cdot (-\tau^k) = n \cdot \tau^k$; $\mathcal{P}(\Omega^k)$ wird somit zu einem (Links-)Modul über den ganzen Zahlen.

(2) Unter dem Komplement $[\tau^k]$ einer k -Kette auf G versteht man das System aller k -Zellen von G , die nicht in τ^k enthalten sind. Da Ω^k diejenige k -Kette ist, welche aus *allen* k -Ketten von G besteht, gilt somit: $[\tau^k] = \Omega^k \setminus \tau^k = \Omega^k + \tau^k$. Somit haben wir: $[[\tau^k] = [\tau^k + \Omega^k = (\tau^k + \Omega^k) + \Omega^k = \tau^k + (\Omega^k + \Omega^k) = \tau^k + 0^k = \tau^k$.

(3) Besteht eine Kette τ^k nur aus *einer* Zelle c^k , also $\tau^k = \{c^k\}$, so schreiben wir kurz c^k statt $\{c^k\}$ und $c_1^k + c_2^k$ statt $\{c_1^k\} + \{c_2^k\}$.

Damit kann eine Kette $\tau^k = \{c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k\}$ auch in der Form

$$\tau^k = c_1^k + \dots + c_n^k = \sum_{j=1}^n c_j^k \text{ geschrieben werden.}$$

1.40 Definition

Unter dem Träger $|\tau^k|$ einer k -Kette $\tau^k = \{c_1^k, \dots, c_n^k\}$ auf G versteht man die Vereinigung aller k -Zellen von τ^k . $|\tau^k| = c_1^k \vee \dots \vee c_n^k = \bigcup_{i=1}^n c_i^k$, wobei die c_i^k als Teilmengen von Z^p aufgefaßt werden. Wir

nennen eine k -Kette beschränkt, wenn alle ihre Zellen beschränkt sind, andernfalls unbeschränkt; offensichtlich ist der Träger jeder