

Новые объекты в математике

Показаны простые приёмы изыскания и исследования новых математических объектов (операций, чисел, функций и т.д.) Описаны операции "проще сложения" и "рефлексивного умножения". Дана краткая информация о Δ -числах, расположенных за $(-\infty)$, представлены общие сведения об ω -отображениях и ω -образах, сформированы ориентиры практического применения новых математических объектов для более глубокого познания окружающего нас материального мира. Настоящая статья – это фрагменты из монографии автора [1] (www.crosswinds.net/russia/~rubcov).

1. Введение

Изыскание новых математических объектов связано с попыткой реконструкции оснований математики. При этом за основу взято не ревизия этих оснований, а – стремление расширить известные представления о действиях и объектах. В частности, определение гипотетической операции "проще сложения" ведёт к утверждению актуальности элемента $(-\infty)$ и расширению поля действительных чисел. Изучение спектров полей чисел, расположенных за $(-\infty)$, позволяет унифицировать их свойства и рассматривать внутреннюю идентичность различных множеств чисел в совокупности с соответствующими операциями. Классифицируя простые действия с двумя операндами, получены новые операции и функции.

Поиск коммутативной действия, аналогичного по структуре возведению в степень, создает предпосылки для формирования концепции ω -отображений. Реализация этой концепции в рамках гомеоморфизма ω -процедур иллюстрирует возможность ω -образной трансформации глобальных упорядоченных наборов объектов и отношений (в том числе, отдельных методов и целых разделов матема-

тики). Все это усиливает прикладное содержание математики и раздвигает границы математического моделирования процессов, протекающих в материальной среде.

2. Операция "проще сложения" и новые числа

Анализируя редуцированные структуры арифметических операций $\left(\underbrace{a + a + a + \dots + a}_n = a \cdot n, \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n, \quad a \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{Z} \right),$

можно допустить операции проще сложения $\left(\underbrace{a \circ a \circ a \circ \dots \circ a}_n = a + n \right)$

и возведения в сверхстепень $\left(\underbrace{a^{a^{a^{\dots^a}}}}_n = {}^n a \right).$ Правомочность такого

допущения подтверждается многими фактами, один из которых – это справедливость итерационных формул для вычислений значений операнда при реализации обратной операции. Известно [2], что

$$x \cdot x = c \Rightarrow x = \sqrt{c} \approx \frac{c/a + a}{2}, \quad (1)$$

где a – приближенное значение корня из числа c ($c \in \mathbf{R}$).

По аналогии с формулой (1), учитывая ранг операции, запишем [1, 3]:

$$x^x = c \Rightarrow x = \sqrt[n]{c} \approx \sqrt{a \cdot \log_a c}, \quad (c \geq 1.7, a \geq 1.6); \quad (2)$$

$$x \circ x = c \Rightarrow x = \frac{c}{2} \approx (c - a \circ a) - 2, \quad (3)$$

где a – приближенные значения x , " \circ " – операция "проще сложения".

Определение 1. Операцией "нуль-действие" ("проще сложения") называется выражение, удовлетворяющее следующим условиям:

$$a \circ b = \begin{cases} a+1, & a > b; \\ b+1, & b > a; \\ a+2 = b+2, & b = a; \\ a, & b = (-\infty); \\ b, & a = (-\infty). \end{cases}$$

Операцию обратную " \circ " обозначим " Δ ".

В работе [3] замечено, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} {}^n \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{x}{x}$;

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = x - x$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - n = x \Delta x$. Эти равенства характеризуют нейтральные (нулевые) элементы операций. В частности, для " \circ " нейтральным элементом является $(-\infty)$ [1].

Таблица 1. Операции с двумя операндами ($n \in \mathbf{Z} \wedge i \in \{1, 2, 3\}$) [1,3]

$n \setminus i$	1	2	3
\dots	\dots	\dots	\dots
0	$a \circ b = c$	$c \Delta b = a$	$c \Delta a = b$
1	$a + b = c$	$c - b = a$	$c - a = b$
2	$a \cdot b = c$	$c / b = a$	$c / a = b$
3	$a^b = c$	$b \sqrt[c]{c} = a$	$\log_a c = b$
4	${}_b a = c$	${}_b \sqrt[c]{c} = a$	$\text{slog}_a c = b$
\dots	\dots	\dots	\dots

Определение 2. Корни уравнения $x \circ a = (-\infty)$ ($a \in \mathbf{R}$) называются Δ -числами.

Действительно, $x = (-\infty) \Delta a = \Delta a$, если записать без нейтрального элемента.

Сравним определение 2 с определениями противоположных (отрицательных) и обратных (дробных) чисел:

$$x + a = 0 \quad (a > 0) \Rightarrow x = -a;$$

$$x \cdot a = 1 \quad (a > 1) \Rightarrow x = a^{-1} = \frac{1}{a} = 1 : a,$$

где 0; 1 – соответственно нейтральные элементы.

В прошлом противоположные числа обозначались [4] " $0m, a$ " (т.е. " $0 - a$ "), а обратные числа до сих пор пишут с нейтральным элементом. В работе [1] приняты обозначения без нейтрального элемента, т.е. $\frac{1}{a} = :a$, и $x = -\infty \Delta a = \Delta a$. (Множество Δ -чисел обозначено \mathbf{R}_Δ).

В таблице 1 представлены прямые ($i = 1$) и обратные ($i = 2, 3$) операции (n – порядковый номер операции при условии, что сложение $n = 1$) с включением новых ингредиентов (например, из $\log_a c = b \Rightarrow {}^b a = c$, т.е. $\log_a c$ – "сверхлогарифм" числа c по основанию a , а $y = {}^x a$, $y = {}^n \hat{\sqrt{x}}$ и $y = \log_a x$ – новые функции).

Более подробное описание Δ -чисел (их аксиоматика, свойства и т.д.) приведено в [1]. Отметим лишь некоторые свойства.

1. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$ $\Delta a + \Delta b = a + b$,
 $\Delta a + b = \Delta(a + b) = a + \Delta b$ (правило знаков). Сравним:
 $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.
2. Для любых $a, b \in \mathbf{Z}$ $(\Delta a, \Delta b) \in \mathbf{R}_\Delta$, $(\Delta a) \cdot b = a \cdot b$ ($b \in \mathbf{N}_2$),
 $(\Delta a) \cdot b = \Delta(a \cdot b)$ ($b \in \mathbf{N}_1$), $a \cdot (\Delta b) = \Delta(a \cdot b)$,
 $\Delta a \cdot \Delta b = \Delta((\Delta a) \cdot b)$, (4), где $\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_1$ – соответственно множества четных и нечетных чисел.
3. Для $(a, b) \in \mathbf{R}$ имеют место равенства [1]:

$$a^{\Delta b} = -\left(a^b\right); \quad \log(-a) = \Delta \log a, \quad (5)$$

т.е. множество Δ -чисел – это *действительная* ветвь значений логарифмов отрицательных чисел.

Примечание 1. В этой связи интересно вернуться к многолетнему спору Эйлера и Даламбера [4] относительно равенства $2 \cdot \ln(-1) = 0$. Интерпретация этого равенства с новых позиций такова: $(\ln(-1)) \cdot 2 = (\Delta 0) \cdot 2 = 0 \cdot 2 = 0$, так как $\ln(-1) = \Delta 0 \in \mathbf{R}_\Delta$, а коммутативность умножения на \mathbf{R}_Δ согласно (4) нарушена.

Фактически, с введением \mathbf{R}_Δ реализуется расширение поля действительных чисел за актуальный элемент $(-\infty)$.

В [1] показано существование инфинитного спектра множеств чисел типа "дельта".

3. Рефлексивное умножение (\odot) и другие математические действия в ω -образной форме

Поиск коммутативной операции, похожей на возведение в степень, был одним из стимулирующих факторов, способствующих созданию концепции ω -отображений. Основные доминирующие постулаты этой концепции [1]:

- в аналогичных по структуре абстрактных ω -пространствах допустимы взаимно однозначные отображения объектов;
- операции отображения из ω_i в ω_j ($i \neq j$) приводит к трансформации объекта в соответствии с некоторой функцией связи;
- существуют инфинитные спектры ω -образов математических объектов.

Пусть все известные математические объекты, отношения и связи между ними составляют пространство ω_0 . Сформируем идентичное ему пространство ω_1 . Применяя показательную функцию связи $f_c = k^x$ ($k \neq 1$), запишем некоторые ω -образы. Число a ($a \in \mathbf{R}$) из ω_1 отобразится в ω_0 в виде $a' = k^a$. Обозначив операцию отображения $\omega_1 \rightarrow \omega_0$, получим:

$$a + b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a+b} = k^a \cdot k^b = a' \cdot b';$$

$$a \cdot b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a \cdot b} = \left(k^a\right)^{\log_k k^b} = k^a \odot k^b = a' \odot b';$$

$$a - b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a-b} = k^a / k^b = a' / b';$$

$$a / b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a/b} = \left(k^a\right)^{1/\log_k k^b} = k^a \triangle k^b = a' \triangle b';$$

$$a^b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus a^{\rightarrow b} = \underbrace{a \odot a \odot a \odot \dots \odot a}_{(\log_k b) \in \mathbf{Z}};$$

$$\log_a b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \text{ilog}_a b \text{ и т.д.,}$$

где a', b' – образы в ω_0 чисел a и b ; " \bullet " – умножение, являющееся образом сложения "+"; " \odot " – рефлексивное умножение (коммутативное возведение в степень) – образ умножения, а " Δ " – рефлексивное деление – образ деления.

Приведём соотношения, которые следуют из смысла операций " \odot " и " Δ ":

$$\begin{aligned}
 (:a) \odot (:b) &= a \odot b \quad (a > 1, b > 1) \text{ по аналогии с } (-a) \cdot (-b) = a \cdot b \\
 (a > 0, b > 0), \quad a \odot k &= a, \quad a^{\rightarrow k} = a, \quad a^{\rightarrow 1} = k, \quad a \odot 1 = 1, \quad a \odot 0 = 0 \\
 (a \neq 0), \quad a^{\rightarrow b_1} \odot a^{\rightarrow b_2} &= a^{\rightarrow (b_1 \cdot b_2)}, \quad a^{\rightarrow b_1} \Delta a^{\rightarrow b_2} = a^{\rightarrow \left(\frac{b_1}{b_2} \right)}, \\
 (a^{\rightarrow k_1})^{\rightarrow k_2} &= a^{\rightarrow (k_1 \odot k_2)}, \quad {}^{\rightarrow b} \sqrt{a} = a^{\rightarrow (\Delta b)}, \quad {}^{\rightarrow b} \sqrt{a^{\rightarrow b}} = a, \\
 a^{\rightarrow (k_1 \Delta k_2)} &= {}^{\rightarrow k_2} \sqrt{a^{\rightarrow k_1}}, \quad \text{ilog}_a a^{\rightarrow b} = b, \quad \text{ilog}_a b = \Delta \text{ilog}_b a, \\
 \text{ilog}_a (k_1 \odot k_2) &= \text{ilog}_a k_1 \cdot \text{ilog}_a k_2, \quad \text{ilog}_a (k_1 \Delta k_2) = \frac{\text{ilog}_a k_1}{\text{ilog}_a k_2}, \\
 \text{ilog}_a b^{\rightarrow k} &= k \odot \text{ilog}_a b, \quad \text{ilog}(b) \Delta \text{ilog}(a^{\rightarrow k}) = \Delta k \odot \text{ilog}_a b, \\
 \text{ilog}_a b &= \text{ilog}_c b \Delta \text{ilog}_c a, \quad a \odot b^c = a^c \odot b, \quad a \odot (b \cdot c) = (a \odot b) \cdot (a \odot c), \\
 a \odot \left(\frac{b}{c} \right) &= \frac{a \odot b}{a \odot c}, \quad (a \cdot c) \Delta b = (a \Delta b) \cdot (c \Delta b), \quad a \Delta b^c = {}^c \sqrt{a \Delta b} \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

Хотя операции " \odot " и " Δ " качественно отличаются от " \bullet " и " \div ", соотношения на их основе адекватны по конструкции аналогичным соотношениям на основе " \bullet " и " \div ".

Операция " Δ " определяет множество чисел типа $\{\Delta a\} \equiv \left\{ k^{1/\log k a}, k \neq 1 \right\}$.

Заметим, что $\Delta a + \Delta b = a + b$, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, $(:a) \odot (:b) = a \odot b$, т.е., синтезируя объекты и операции, можно найти инвариантные формы.

Композиционное сходство ω -образных структур фундаментально изучено в работе [1]. Отметим отдельные факты:

$$\text{а) } \dots \mathbf{R}_\Delta \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_- \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_f = \{ :a \} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \{ \Delta a \} \dots;$$

$$\begin{aligned}
& \text{б) } f(x_1, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{f(\log_k x_1, \dots, \log_k x_n)}; \\
& f(x_1, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \left(i + \log_k f \left((-i + \log_k x_1)_k, \dots, (-i + \log_k x_n)_k \right) \right)_k; \\
& \text{в) } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus 'f(x) = \\
& \quad = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \Delta(\Delta x); \\
& f''(x) \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \overset{\circ}{f}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left(\log_k \left(k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)} \right) - \delta x \right); \\
& 'f(x) = k^{x \cdot f'(x)/f(x)}; \quad f''(x) = k^{\overset{\circ}{f}(x) - f(x) + x}. \quad (\text{Снижая ранг операций} \\
& \{ \times; \div \} \rightarrow \{ +; - \} \text{ и заменяя объекты } \{ f'(x); 'f(x) \} \rightarrow \left\{ \overset{\circ}{f}(x); f''(x) \right\},
\end{aligned}$$

получаем одинаковые по строению формулы).

Кроме того, идентифицированные ω -трансформации операций (в частности, $\{ +; -; \times; \div; \sum_n, f'; \int f dx; \dots \} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \{ \times; \div; \odot; \Delta; \prod_n; k^{x \cdot (\ln f)'}; \exp\left(\int \frac{\log_k f}{x} dx\right); \dots \}$) приводят к формированию модифицированных математических анализов.

В качестве примера фактов из таких анализов запишем ω -образы формулы Тейлора.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n}{n!} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n)}{f(a)} \right) \left(\log_k \left(\frac{x}{a} \right) \right)^n / n!, \\
&\text{для } \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k \sum_{n=0}^{\infty} k^{\overset{\circ}{(n)}f(a) + n \cdot \log_k(k^x - k^a) - \log_k n!}, \quad k \neq 1.
\end{aligned}$$

В работе [1] приведены также ω -образы численных методов решения дифференциальных уравнений, которые фиксируют пер-

спективные направления ω -образного исследования физической реальности.

4. Ориентиры практического приложения операции " \circ "

С введением операции типа " \circ " создаются предпосылки для *точного* математического описания перехода объекта из одного состояния в другое. Например, для математического моделирования переходного процесса "покой-движение" и наоборот используют импульсные и ступенчатые функции [2]. Однако, математические предложения, в которых применяются эти функции, следует рассматривать как эвристические и нуждающиеся в строгих обоснованиях. Аппроксимации этих функций непрерывными, представления интегралом Фурье или замена интегралами Стильтьеса при введении обобщенных понятий "функций" и "дифференциала" (теория распределений Лорана Шварца) иногда не дают качественных результатов [2].

Операции типа " \circ " позволяют идеально описать любую ситуацию, связанную с импульсным поведением объекта. Вводя вспомогательные функциональные компоненты в виде специальных выражений, можно записать различные "негладкие" функции. Ниже приведены примеры таких компонентов.

1). *Вспомогательная функция:*

$$XSU(x; a) = (x \circ a) - a - 1.$$
$$XSU(x; a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x = a; \\ x - a, & x > a. \end{cases}$$

2). *Вспомогательная функция:*

$$ST(x; a) = x - (x \circ a) + a + 1.$$
$$ST(x; a) = \begin{cases} x, & x < a; \\ a - 1, & x = a; \\ a, & x > a. \end{cases}$$

3). *Функция включения:*

$$ON(x; a; c) = c \cdot \operatorname{sgn}(XSU(x; a)) \text{ или при } c = 1:$$
$$ON(x; a; 1) = ON(x; a).$$

$$ON(x; a; c) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ c, & x \geq a. \end{cases}$$

4). *Функция отключения:*

$$OFF(x; a; c) = c - ON(x; a; c) \text{ или при } c = 1:$$

$$OFF(x; a; 1) = OFF(x; a).$$

$$OFF(x; a; c) = \begin{cases} c, & x < a; \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

5). *"Ступенчатая" функция:*

$$S(x; a; b; c) = ON(x; a; c) \cdot OFF(x; b) \text{ или при } c = 1:$$

$$S(x; a; b; 1) = S(x; a; b).$$

$$S(x; a; b; c) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ c, & a \leq x < b; \\ 0, & x \geq b. \end{cases}$$

6). *Вспомогательная функция:*

$$GAS(x; a) = XSU(x; a) \cdot (ST(x; a) - a).$$

$$GAS(x; a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ -1, & x = a; \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

7). *Модуль x :*

$$|x| = (1 - (-x \circ 0)) \cdot ((x \circ 0) - 2) + ((x \circ 0) - 1) \cdot (2 - (-x \circ 0)), \text{ или}$$

$$|x| = (1 - (-x \circ 0)) \cdot ((x \circ 0) - 2) + XS(x; 1) \cdot (2 - (-x \circ 0)).$$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

8). *Максимальное из двух чисел a и b :*

$$\max(a; b) = (a \circ b) - 1 + GAS(a - b; 0), \text{ или}$$

$$\max(a; b) = (a \circ b) - 2 + |\operatorname{sgn}(a - b)|.$$

$$\max(a; b) = \begin{cases} a, & a > b; \\ b, & a < b; \\ a = b, & a = b. \end{cases}$$

9). *Минимальное из двух чисел a и b :*

$$\min(a; b) = -\max(-a; -b).$$

10). *Функция знака:*

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} + GAS(x; 0).$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Заключение

Операции типа " \circ " и обратные им могут быть использованы при конструировании комплексных чисел новой природы. Из таблицы 1 следует, что изучение новых операций и чисел может быть продолжено.

Δ -числа позволяют глубже воспринять такие глобальные понятия как "бесконечность" и "минус бесконечность". Большой интерес представляют ω -отображения различных физических субстанций, ω -образы которых ещё не изучены...

Литература

1. Рубцов К.А. Новые математические объекты, - Белгород: БелГТАСМ, Киев: НПП ИНФОРМАВТОСИМ. - 1996, 251 с.
2. G.Korn, T.Korn, Mathematical Handbook (for scientists and engineers), McGraw – Hill Book Company, N.Y., S.Fr., Toronto, London, Sydney, 1968, p. 832
3. Рубцов К.А. Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций // Кибернетика., - 1989. - № 3, С. 111-112
4. D.J.Struik, Abriss der Geschichte der Mathematik, Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963