

К. А. Рубцов

# Новые математические объекты

Белгород  
БелГТАСМ

Киев  
НПП ИНФОРМАВТОСИМ

1996

УДК 517

**Рубцов К.А.**

Р11 Новые математические объекты. – Белгород: БелГТАСМ; Киев: НПП ИНФОРМАВТОСИМ, 1996. - 251 с., ил.

В книге даны общие принципы рефлексивного метода  $\omega$  — отображений математических объектов и представлено описание математических объектов новой природы. Наряду с краткой характеристикой инфинитного спектра новых чисел ( в частности,  $\Delta$  — и  $\triangle$  — чисел, "расположенных" за  $(-\infty)$  ), приведены  $\omega$  — образы интегро-дифференциальных объектов. Сформирована концепция образования локальных и глобальных  $\omega$  — спектров различных объектов.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой. В ней доступно изложена проблематика реконструкции оснований этой науки с позиции теории объектов, указаны ориентиры новых творческих решений в различных разделах математики. Книга открывает безмерное поле для самостоятельного поиска и исследования.

**Рецензенты:** канд. физ. - мат. наук М. Ф. Калягин  
(МВООУ, Москва)  
канд. физ. - мат. наук В. Г. Сыщенко  
(БГПУ, Белгород)

1702050000 - 004  
P \_\_\_\_\_ 12 - 96  
22.16  
053(02) - 96

ББК

© Белгородская государственная технологическая академия строительных материалов, 1996

© Научно-производственное предприятие "ИНФОРМАВТОСИМ",  
1996

“Я хотел бы обратить Ваше внимание на историю овладения математическим фактом. Это всегда история *медленной и долгой коллективной работы...*”

( Из писем Г.Лебега).

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Почти весь материал был написан мной в виде отдельных фрагментов ещё в 1987-1988 г.г. под впечатлением от нескольких прочитанных книг по математике и статей из *колоссального* коллективного труда под названием “Математическая энциклопедия”. В дальнейшем, приобретая специальность по компьютерной науке и всё более увлекаясь ею, я не находил времени для систематизации полученных новых математических фактов и серьезно не занимался развитием изначальных соображений... Тем не менее, несколько фрагментов направил на депонирование и публикацию. Считаю своим долгом *поблагодарить* специалистов (как правило, ученых с мировым именем), оказавших мне моральную поддержку добрыми письмами). Профессор J.H.Sampson (The Johns Hopkins University, USA) отмечал, что “... *мы нашли в работе весьма интереснейшие результаты...*” и предлагал продолжить работу. К нему присоединился проф. John Ewing (Indiana University, USA): “... *Ваша работа весьма интересна...*”. Большое желание разобраться во всем материале в целом изъявили ученые: проф. E.M.Moskal (Univ. of Waterloo, Canada), проф. M.Mignotte (Univ. L.Pasteur, France), проф. V.S.Varadarajan (Univ. of California, USA), проф. Franco Tricerri (Italia), проф. H.Wilf (Univ. of Pennsylvania, USA), проф. Takasi Nagahara (Okayama University, Japan) и другие.

Из российских учёных наиболее тщательно материал изучали проф. А.В.Чернявский, доц. Н.Д.Воробьев, доц. М.Ф.Калягин, доц. В.Г.Сыщенко. Последние двое являются официальными рецензентами данной монографии. Часть сделанных ими замечаний автор учёл при окончательной подготовке рукописи к печати.

В 1993 году я посетил Институт математики в г. Страсбурге по приглашению директора проф. M.Mignotte, а в 1994 г. был приглашен на Международный Конгресс математиков (ICM 94), который проходил в г. Цюрихе (Швейцария). Получил персональные приглашения от Президента Конгресса профессора H.Carnal – Univ. of Berne и члена Организационного Комитета Конгресса профессора Erwin Bolthausen – Univ. of Zürich. Разумеется, всё это ускорило написание монографии. Замечу, что уже после публикации в 1989 году в журнале “Кибернетика” первого фрагмента возникла

необходимость более подробного освещения материала (на что, кстати, позднее указали все специалисты, которые с ним ознакомились).

Сначала было решено написать рукопись в общепринятом математическом стиле, изложив материал с *более зрелых* позиций, тщательно переработав и переосмыслив его. Однако, вскоре стало ясно, что ориентироваться надо на широкий круг читателей, интересующихся математикой, так как *в книге затрагиваются основания математики*. Изложение должно быть доступным и нестандартным. Это обновило цель книги: *пробудить в читателе желание творчества*, для чего потребовалось каждую главу завершать проблематичным резюме. И неважно займётся ли читатель серьёзной научной работой по той или иной проблеме или просто выполнит дилетантское упражнение по математике. Главное: сам *процесс творчества несомненно принесет удовлетворение*...

Оставляя простой стиль изложения и не выбрасывая *излишне смелые утверждения*, требующие более строгих доказательств, автор надеется, что данная монография будет своего рода центром кристаллизации идей, которые составят основу новой коллективной разработки, так как согласно Г.Лебегу история овладения математическим фактом – это “... история медленной и долгой коллективной работы...”, а “Истина сияет только в глазах тех, кто её долго искал; достаточно долго, чтобы заслужить увидеть её.”

Касаясь содержания, замечу, что спектр затрагиваемых в книге вопросов весьма обширен: начиная с аксиоматики чисел новой природы ( $\Delta$ -чисел) и кончая  $\omega$ -отображениями целых разделов математики. Естественно, возможны как локальные, так и глобальные возражения и несогласия с позицией автора. Однако, известно, что “Истина – дочь времени” (“Temporis filia veritas”).

*Константин Рубцов.*

## ВВЕДЕНИЕ

В 1747 г. Л.Эйлер в письме к Ж.Даламберу утверждал, что  $\ln n$  имеет бесконечно много значений, которые все являются комплексными числами, за исключением случая, когда  $n > 0$ , тогда одно из значений действительно. Но Даламбер до конца своей жизни (он, как и Л.Эйлер, умер в 1783 г.) не согласился с этим утверждением, полагая, что  $\ln(-1) = 0$

$$\left(-1 = \frac{1}{-1} \Rightarrow \ln(-1) = \ln(+1) - \ln(-1) \Rightarrow \Rightarrow 2 \cdot \ln(-1) = \ln(+1) = 0 \Rightarrow \ln(-1) = 0\right).$$

Этот спор считается законченным в пользу Эйлера. Однако, ...

... В результате исследования действия “проще” сложения получено расширение поля  $\mathbf{R}$  действительных чисел [51, 52, 55]. Фактически, реализуя отображение поля  $\mathbf{R}$  относительно “несобственного” числа  $(-\infty)$  (отрицательной “актуальной” бесконечности), сформирован рефлексивный образ поля  $\mathbf{R}$ , обозначенный как  $\Delta_0$  – поле чисел новой природы ( $\Delta$ -чисел)<sup>1</sup>. В книге дано краткое описание множества  $\Delta$ -чисел и показано, что  $k^{\Delta a} = -(k^a)$ , где  $(a, k) \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ , а  $\ln(-1) = \Delta 0$  и  $2 \cdot \ln(-1) = \ln(+1) = 0$ . (Ж. Даламбер, в какой-то степени, был прав ! ) ...

Введя представление об  $\omega$ -пространствах и  $\omega$ -отображениях математических объектов, автор получил целый ряд математических объектов новой природы (МОНП). В книге приведены только *некоторые* результаты этого исследования. В первооснове его была попытка синтезировать методы *объектно-ориентированного программирования и аналогий*. В итоге сформирована общая схема описания новых объектов. И, как *частный* пример этой схемы, в книге представлены отдельные фрагменты моделирования МОНП. В качестве вводного замечания напомним читателю, что понятие объекта (object) в ООП дополняется основными его свойствами: *инкапсуляцией*, т.е. объединением в одном объекте данных и действий над

---

<sup>1</sup> Сторонникам только “потенциальной” бесконечности следует вспомнить, что еще И.Ньютон не признавал отрицательные числа и, естественно, не считал *нуль* числом, так как, по его мнению, “число: отношение одной величины к другой того же рода, принятой за единицу”, а Г.Лейбниц полагал, что “отношения, в которых предыдущий или последующий член меньше нуля не являются истинными.”

В настоящей книге  $(-\infty)$  вводится как *пересечение* множеств  $\Delta_0$  и  $\mathbf{R}$ :

$$\Delta_0 \cap \mathbf{R} = \{-\infty\}.$$

ними; *наследованием*, позволяющим создавать иерархию объектов от простого (предка) до сложных (потомков) со свойствами предшествующих элементов (в частности, – конструировать древовидную структуру с доминирующим фактором сочетания наследования у предков характеристик и развитием собственных свойств) и, наконец, *полиморфизмизм*, означающим, что для различных родственных объектов можно задать единый класс действий. Всё это в совокупности с методом *аналогий* породило новый математический аппарат, который неизбежно (естественно) привёл к открытию и описанию МОНП. (Как будет отмечено в §1.2, приёмы нового аппарата использовались всюду и всегда).

Изыскание и разработка МОНП реализована на трёх смежных уровнях:

а) непосредственное изучение МОНП для внутреннего развития математики и рационализации решения некоторых её задач;

б) поддержка первого уровня в целях расширения областей допустимых значений функций;

в) исследование возможностей нового метода, названного *рефлексивным* в плоскости получения конкретных практических результатов путем модернизации известных методов поиска оптимальных решений.

Из МОНП в работе описаны математические пространства, операции, числа, функции, производные, интегралы и некоторые другие. Все они явились результатом *простейших*  $\omega$ -отображений с показательной функцией связи.

В книге приведено много различных доказательств, которые можно объединить в *один цикл* примеров, иллюстрирующих и поясняющих рефлексивный метод  $\omega$ -отображений. Расширение или локализация излагаемого материала вполне допустимы. С этой позиции отдельные доказательства отпечатаны мелким шрифтом. Отказ от строгости доказательств, декларативность освещения фактов связаны с попыткой *упростить* текст и ограничиться целью: *указать читателю на возможность самостоятельного творческого поиска в проблематике изложенного материала*, акцентируя внимание на доминирующих постулатах концепции описанных ниже  $\omega$ -отображений:

– в аналогичных по структуре абстрактных математических  $\omega$ -пространствах допустимы взаимно однозначные отображения объектов;

– операция отображения из  $\omega_i$  в  $\omega_j$  ( $i \neq j$ ) приводит к трансформации объекта в соответствии с некоторой функцией связи;

– существуют инфинитные спектры  $\omega$ -образов математических объектов.

# ГЛАВА 1. ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАЦИИ

## §1.1. Вводные замечания

Под математическим пространством в данной работе понимается все множество математических объектов, связей и отношений между ними. Например, если  $\omega_0$  – это общеизвестное математическое пространство, то

$$\omega_0 = \bigcup_{k=1}^n \mathfrak{S}_k, \text{ где } \mathfrak{S}_k \text{ – различные математические аппараты, содержа-}$$

щие, в свою очередь, конечное или инфинитное множество математических объектов. Не только отдельные объекты, отношения между ними и разные блоки<sup>2</sup> из объектов и отношений в виде формул, теорем, математических аппаратов, но и *всё* в целом *математическое пространство*  $\omega_0$

(или другое пространство  $\omega_j = \bigcup_{p=1}^m \mathfrak{S}_p$ ), состоящее из этих объектов, от-

ношений и блоков считается тоже математическим объектом, т.е.  $\omega_0 =$

$$= \left\{ \mathbf{R}, \mathbf{C}, \dots, +, -, \times, \div, \dots, \mathbf{U}, \frac{\partial^n U}{\partial x_i^n}, \int_r U dx_i, \dots \right\}, \quad \text{где}$$

$\mathbf{R}, \mathbf{C}$  – множества действительных, комплексных и других чисел;

$\mathbf{U}, \frac{\partial^n U}{\partial x_i^n}, \int_r U dx_i, \dots$  – соответственно множества всевозможных функ-

ций ( $U$ ), производных  $\left( \frac{\partial^n U}{\partial x_i^n} \right)$ , интегралов  $\int_r U dx_i, \dots$  и других матема-

тических объектов, отношений и блоков, *является глобальным математическим объектом*. Естественно, что, в данном случае, целесообразно исследовать спектр вложений множеств объектов и описать их иерархию. Однако, с целью упрощения изложения в работе этот вопрос не рассматривается. Наконец, из всех отношений взяты только простейшие, т.е. алгебраические операции, операнды и результаты которых входят в одно и то же

---

<sup>2</sup> Блоком назовём логически связанное конечное (компакт) или инфинитное (область) множество объектов и отношений.

множество. Ниже рассмотрены некоторые алгебраические операции новой природы как ингредиенты инфинитного множества алгебраических операций. Примерами таких являются  $\delta$ -операции, образующие инфинитное множество  $\Delta_n$  – операций проще сложения, а также множество рефлексивных операций, сформированных на множестве функций, лежащих в основе  $\omega$ -отображений. В настоящей работе изучены только две рефлексивные операции, полученные на основе показательной функции  $\omega$ -отображения.

## §1.2 Концепция $\omega$ -отображений

Окружающий нас мир состоит из *объектов*, характеризующихся *свойствами*, которые позволяют отличать один объект от других.

Свойства объектов можно подразделить на два вида:

- 1) *внутренние* – связанные со строением объекта;
- 2) *внешние* – определяемые структурой другого объекта, составной частью которого является данный.

В глобальном понимании сути объекта его свойства тоже являются элементарными объектами.

В реальном мире мы имеем дело с объектами, имеющими бесконечное число свойств. Для работы с этими объектами достаточно ограничиться только доминирующими свойствами, т.е. теми, которые нас интересуют либо оказывают влияние на интересующие нас свойства. Тем самым обеспечивается переход от объекта с бесконечным числом свойств к объекту с конечным пакетом свойств. Отметим, что *такая замена не обязательно означает аппроксимацию: можно реализовать абсолютно точную, замену, оперируя с конечным числом свойств.*

Поясним вышесказанное в следующих простых теоремах<sup>3</sup>. Для большей ясности определений вводится понятие *наблюдателя*. Наблюдатель – это “абстрактный” объект (чаще всего в его роли выступает человек), не входящий в свойства наблюдаемого (исследуемого) объекта. Наблюдатель воспринимает наблюдаемый объект, но никакого влияния на его свойства не оказывает.

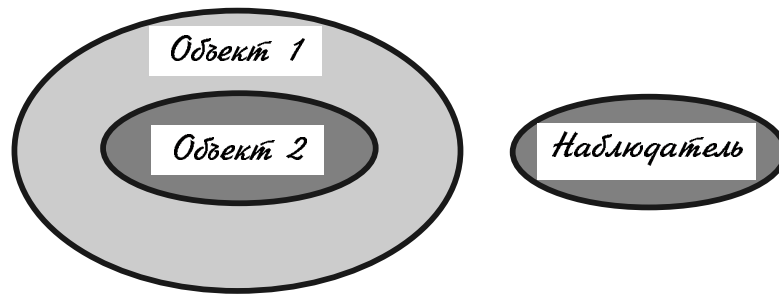
**Теорема 1.** Если два объекта имеют конечное число одинаковых внутренних и внешних свойств, то эти объекты являются не чем иным, как одним и тем же объектом.

---

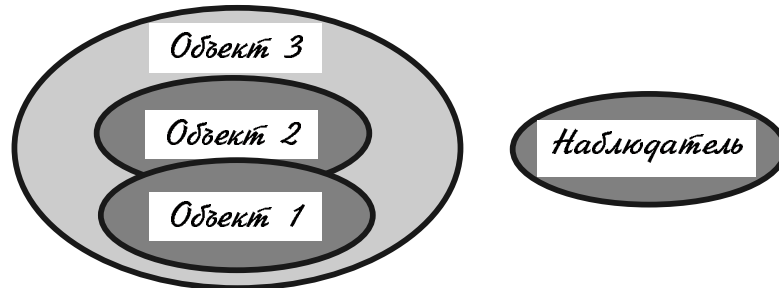
<sup>3</sup> Доказательства этих обособленных теорем в настоящей книге отсутствуют. Предполагается привести их в *общей теории объектов*. Нумерация вводных теорем не соответствует единой нумерации теорем книги.



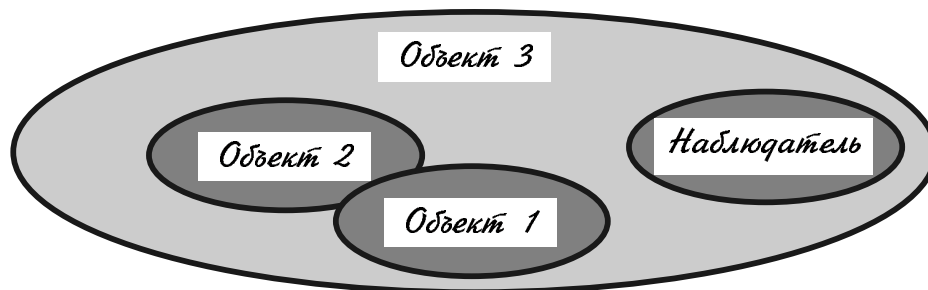
**Теорема 2.** Если один объект содержит в себе другой, то наблюдатель, интересующийся внутренними свойствами второго (встроенного) объекта, может не обращать внимания на существование первого объекта.



**Теорема 3.** Если имеются два объекта с одинаковыми внутренними свойствами, расположенные внутри третьего, то они имеют различные внешние свойства. (Если же внешние свойства совпадают, то согласно теореме 1 это один и тот же объект).



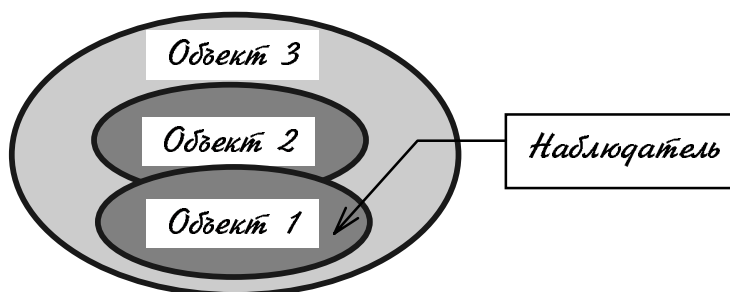
Из приведенного ясно, что наблюдатель не заметит разницы между объектами 1 и 2, поскольку он интересуется их внутренними свойствами.



Наблюдатель, интересуясь внутренними свойствами объектов 1 и 2, наблюдает и внешние свойства этих объектов относительно объекта 3, то он увидит различие (по внешним свойствам) между ними.

Интересный эффект можно получить, если наблюдать объект 2 из объекта 1, т.е. отобразить объект 2 в объект 1 с учетом отличий во внешних свойствах.

**Теорема 4.** Если объекты 1 и 2 имеют одинаковые внутренние свойства, но различные внешние, то относительно наблюдателя из объекта 1 внутренние свойства объектов 1 и 2 различны.



**Теорема 5.** Для наблюдения объекта 2 из объекта 1 с одинаковыми внутренними свойствами, учитывая отличия во внешних свойствах относительно объекта 3, достаточно знать отличие одного внутреннего свойства объекта 1 от аналогичного наблюдаемого свойства объекта 2. Все остальные отображенные внутренние свойства можно получить из этого отличия.



Здесь следует заметить ограничение на теорему 5. Полностью отобразить объект 2 в объект 1 можно только в том случае, если все отображаемые внутренние свойства объекта 2 имеются во внутренних свойствах объекта 1. В остальных случаях мы можем говорить об отображении отдельных свойств.

**Теорема 6.** Если два объекта имеют одинаковые внутренние свойства, но различные внешние и при отображении второго объекта в первый какое-либо отображенное свойство объекта 2 совпадает с каким-либо свойством объекта 1, то и остальные отображенные свойства имеются в объекте 1.

Приведенные теоремы явились основополагающими вехами в процессе формирования теоретической базы концепции  $\omega$ -отображений. Сделаем несколько общедоступных пояснений. Аппарат  $\omega$ -отображений любых объектов (материальных и абстрактных) – это **система операций разделения** свойств (функций) объектов и **трансформации** этих объектов в результате закономерного изменения этих свойств (функций).

Сфера применения вышеуказанного аппарата – это всё *глобальное* пространство (материальное и абстрактное), понимаемое как инфинитное множество всевозможных объектов и связей между ними. Этот аппарат используется издревле и реализуется ныне. Действительно, возьмём любые два предмета (например, два ножа) разные по конфигурации (*форме*), но одинаковые по функции принадлежности или назначения (*содержанию*). Если сообщить (не показывая!) наблюдателю, что в столе находятся два таких-то предмета, то у него возникнет ассоциированный образ предмета, сформированный в результате синтеза функций принадлежности и изготовления (под функцией изготовления понимаем основные элементы, из которых состоит предмет; например, лезвие и ручка у ножа). Разумеется, обязательным условием этого является наличие в памяти информации о предмете, т.е. наблюдатель должен быть знаком с предметом. (Чаше всего никакого образа вообще не появляется, а роль образа выполняет интуитивное понимание принадлежности предмета). Чёткое представление об объектах возможно лишь при поступлении дополнительной информации о размерах, форме, цвете и других качествах предметов и элементов, из которых они состоят.

Возникновение математики тоже связано с реализацией аппарата  $\omega$ -отображений. Например, выделяя в серии предметов только их количество и отбрасывая все остальные свойства (характеристики), создали числа и действия над ними, а изучая *общие* свойства бесконечно малых величин, сконструировали дифференциальное и интегральное исчисления.

Таким образом, глобальное назначение аппарата  $\omega$ -отображений это селективное разделение и изменение функций, характеризующих любой объект. В результате чего реализуется опознание объекта и его трансформация. Аппарат  $\omega$ -отображений – это наиболее известный метод взаимодействия “наблюдателя” и “объекта”.

Переходя к математической интерпретации аппарата  $\omega$ -отображений, сформулируем доминирующие постулаты *математической концепции  $\omega$ -отображений*, приведенные во введении:

- в аналогичных по структуре абстрактных математических  $\omega$ -пространствах допустимы взаимно однозначные отображения объектов;
- операция отображения из одного пространства в другое приводит к трансформации объекта в соответствии с некоторой функцией связи;
- существуют инфинитные спектры  $\omega$ -образов математических объектов.

Поясним это на фактическом материале.

Пусть все известные математические объекты (числа, функции, функционалы, производные, интегралы и т.д.) принадлежат пространству  $\omega_0$ . Так как и объекты и связи между ними можно ранжировать (например, операцию умножения считать на порядок выше сложения, а возведение в степень соответственно выше умножения), то, используя условность и относительность любой иерархии, вместо  $\omega_0$  введём понятие некоторого абстрактного пространства  $\omega_1$ . Оно идентично  $\omega_0$  по внутреннему строению, т.е. “наблюдатель”, находящийся в  $\omega_1$ , не заметит никаких отличий от  $\omega_0$ . Однако, все объекты и связи между ними трансформируются при отображении их из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ , что подчёркивает различие этих пространств, несмотря на внутреннюю аналогию. Пусть функция связей  $(f_c)$  между  $\omega_1$  и  $\omega_0$  является показательной  $f_c = k^x$  ( $k > 1$ ). Любое число  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) из  $\omega_1$  отобразится в  $\omega_0$  в виде  $k^a$ , т.е.

$$a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a, \text{ где } k - \text{коэффициент отображения.}$$

Образом в  $\omega_0$  операции сложения  $(+)$  будет умножение:

$$(a + b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a+b} = k^a \cdot k^b,$$

где  $k^a$  и  $k^b$  – образы в  $\omega_0$  чисел  $a$  и  $b$ , записанных в  $\omega_1$ .

Умножение трансформируется в новую операцию " $\odot$ ", которую назовём рефлексивным умножением:

$$a \cdot b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a \cdot b} = (k^a)^{\log_k k^b} = k^a \odot k^b.$$

$$\text{Аналогично, } (a - b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a-b} = k^a / k^b,$$

$$\frac{a}{b} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a/b} = (k^a)^{1/\log_k k^b} = k^a \Delta k^b,$$

где  $\Delta$  – рефлексивное деление.

Возведение в степень тоже превращается в новую операцию

$$a^{\rightarrow b} = \underbrace{a \odot a \odot \dots \odot a}_{(\log_k b) \in \mathbf{Z}}. \text{ Образ в } \omega_0 \text{ логарифмирования в } \omega_1 \text{ обозначим}$$

$\text{ilog}_a b$ . Вводя обозначения  $(:a) = 1/a$  и  $\Delta a = k \Delta a$ ,  $(k, a) \in \mathbf{R}$ ,  $k^a \in \mathbf{Z}$

и  $k \neq 1$ , получим идентифицированное обозначение чисел по  $\omega$ -фактору.

Действительно, пусть в  $\omega_1$  задано отрицательное число  $-a$ , ( $a \in \mathbf{R}_+$ ) то

$$-a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{-a} = \frac{1}{k^a} =: k^a \in \mathbf{R}_f,$$

где  $\mathbf{R}_f$  — множество дробных чисел типа  $1/b$  ( $b$ ).

$$(:k^a) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{1/k^a} = \Delta(k k^a).$$

Для компактизации записи при формировании пространства  $\omega_1$  образ в  $\omega_0$  объекта из  $\omega_1$  записываются с чертой снизу:  $\underline{a}$  или просто  $\underline{a}$

$$\left( \underline{a} \equiv \underline{a} \equiv k^a \right). \quad \text{Тогда, очевидно,} \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{a+b}), \quad \text{а при} \quad a < b$$

$$\underline{a/b} = (\underline{a-b}) = (- (b-a)) =: (\underline{b-a}), \quad \underline{a}^{\log \underline{b}} = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \odot \underline{b} = \underline{b} \odot \underline{a}.$$

**Теорема 1.1** Операция “ $\odot$ ” является алгебраической операцией, обладающей свойствами альтернативности, коммутативности и ассоциативности на множестве  $\mathbf{R}_+$ .<sup>\*)</sup>

**Доказательство.** Факт принадлежности операции “ $\odot$ ” к алгебраической вполне очевиден, так как любые операнды  $(x, y)$  и результат  $(x^{\log y})$  входят в одно и то же множество  $(\mathbf{M})$ , т.е.  $(x, y, x^{\log y}) \in \mathbf{M}$ . (Например, если  $x > 0$ , а  $y < 0$ , то, как будет ясно из главы 2,  $\log y = \Delta \log |y|$ , а  $x^{\Delta \log |y|} = -x^{\log |y|} \in \mathbf{R}_-$ , т.е.  $(x, y, x^{\log y}) \in \mathbf{R}$ ).

а). Докажем альтернативность операции “ $\odot$ ”:

Пусть  $x, y \in \mathbf{R}_+$ , т.е.  $x > 0$  и  $y > 0$ . Тогда

$$(x \odot y) \odot y = (x^{\log_k y}) \odot y = (x^{\log_k y})^{\log_k y} = x^{\log^2_k y}$$

С другой стороны,  $x \odot (y \odot y) = x \odot (y^{\log_k y}) = x^{\log_k y^{\log_k y}} = x^{\log^2_k y}$ , т.е.  $(x \odot y) \odot y = x \odot (y \odot y)$ , что доказывает правую альтернативность операции “ $\odot$ ”.

---

<sup>\*)</sup> Теорему 1.1. нетрудно доказать для  $(x, y, z) \in \mathbf{R}$ .

$$(x \odot x) \odot y = (x^{\log_k x}) \odot y = (x^{\log_k x})^{\log_k y} = x^{(\log_k x) \cdot (\log_k y)}. \quad \text{с}$$

другой

стороны,

$$x \odot (x \odot y) = x \odot (x^{\log_k y}) = x^{\log_k x^{\log_k y}} = x^{(\log_k y) \cdot (\log_k x)}, \quad \text{т.е.}$$

$(x \odot x) \odot y = x \odot (x \odot y)$ , что доказывает левую альтернативность операции “ $\odot$ ”.

б). Докажем коммутативность операции “ $\odot$ ”:  $x \odot y = x^{\log_k y}$ ,  
 $y \odot x = y^{\log_k x}$ . После логарифмирования этих выражений, получим:

$$\log_k (x \odot y) = (\log_k y) \cdot (\log_k x),$$

$$\log_k (y \odot x) = (\log_k x) \cdot (\log_k y),$$

т.е.  $\log_k (x \odot y) = \log_k (y \odot x)$ . Откуда  $x \odot y = y \odot x$ , что и требовалось доказать.

в). Докажем ассоциативность операции “ $\odot$ ” при  $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+$ :

$$(x \odot y) \odot z = (x^{\log_k y}) \odot z = (x^{\log_k y})^{\log_k z} = x^{(\log_k y) \cdot (\log_k z)}, \quad \text{а}$$

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (y^{\log_k z}) = x^{\log_k y^{\log_k z}} = x^{(\log_k z) \cdot (\log_k y)}, \quad \text{т.е.}$$

$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ , что доказывает ассоциативность операции “ $\odot$ ”.

В заключение заметим, что по аналогии с  $\omega_1$  можно сформировать любое пространство  $\omega_i$ . Более того, при этом можно использовать другую функцию связи. Однако, в данной монографии, как уже указывалось, применялась чаще всего показательная функция связи.

### § 1.3 Соотношения на основе операций $\odot$ и $\Delta$

Приведем некоторые соотношения, которые следуют из смысла операций  $\odot$  и  $\Delta$ :  $(:a) \odot (:b) = a \odot b$  ( $a > 1, b > 1$ ) по аналогии с  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$  ( $a > 0, b > 0$ ),  $a \odot k = a$ ,  $a^{\rightarrow k} = a$ ,  $a^{\rightarrow 1} = k$ ,  $a \odot 1 = 1$ ,  
 $a \odot 0 = 0$  ( $a \neq 0$ ),  $a^{\rightarrow b_1} \odot a^{\rightarrow b_2} = a^{\rightarrow (b_1 \cdot b_2)}$ ,  $a^{\rightarrow b_1} \Delta a^{\rightarrow b_2} = a^{\rightarrow \left( \frac{b_1}{b_2} \right)}$ ,  
 $(a^{\rightarrow k_1})^{\rightarrow k_2} = a^{\rightarrow (k_1 \odot k_2)}$ ,  $^{\rightarrow b} \sqrt{a} = a^{\rightarrow (\Delta b)}$ ,  $^{\rightarrow b} \sqrt{a^{\rightarrow b}} = a$ ,

$$\begin{aligned}
a^{\rightarrow(k_1 \Delta k_2)} &= {}^{\rightarrow k_2} \sqrt{a^{\rightarrow k_1}}, \quad \text{ilog}_a a^{\rightarrow b} = b, \quad \text{ilog}_a b = \Delta \text{ilog}_b a, \\
\text{ilog}_a (k_1 \odot k_2) &= \text{ilog}_a k_1 \cdot \text{ilog}_a k_2, \quad \text{ilog}_a (k_1 \Delta k_2) = \frac{\text{ilog}_a k_1}{\text{ilog}_a k_2}, \\
\text{ilog}_a b^{\rightarrow k} &= k \odot \text{ilog}_a b, \quad \text{ilog}(b) \Delta \text{ilog}(a^{\rightarrow k}) = \Delta k \odot \text{ilog}_a b, \quad \text{ilog}_a b = \\
&= \text{ilog}_c b \Delta \text{ilog}_c a, \quad a \odot b^c = a^c \odot b, \quad a \odot (b \cdot c) = (a \odot b) \cdot (a \odot c), \\
a \odot \left( \frac{b}{c} \right) &= \frac{a \odot b}{a \odot c}, \quad (a \cdot c) \Delta b = (a \Delta b) \cdot (c \Delta b), \quad a \Delta b^c = {}^c \sqrt{a \Delta b} \text{ и т.д.}^4.
\end{aligned}$$

Приведем, часть доказательств.

$$\begin{aligned}
1. \text{ Докажем свойство } (a^{\rightarrow k_1})^{\rightarrow k_2} &= a^{\rightarrow(k_1 \odot k_2)}: (a^{\rightarrow k_1})^{\rightarrow k_2} = \\
&= \underbrace{(a \odot \dots \odot a)}_{\log_k k_1} \odot \underbrace{(a \odot \dots \odot a)}_{\log_k k_1} \odot \dots \odot \underbrace{(a \odot \dots \odot a)}_{\log_k k_1} = \underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{\log_k k_1 \cdot \log_k k_2}, \\
\log_k k_1 \cdot \log_k k_2 &= \log_k k_1^{\log_k(k_2)} = \log_k (k_1 \odot k_2), \text{ т.е.}
\end{aligned}$$

$$(a^{\rightarrow k_1})^{\rightarrow k_2} = \underbrace{a^{\rightarrow k_1} \odot a^{\rightarrow k_1} \odot \dots \odot a^{\rightarrow k_1}}_{\log_k k_2} = a^{\rightarrow(k_1 \odot k_2)}.$$

При доказательстве использовано только определение операции  $a^{\rightarrow b}$  (см. “Обозначения”).

$$\begin{aligned}
2. \text{ Найдем } {}^{\rightarrow b} \sqrt{a}, \text{ обозначив } {}^{\rightarrow b} \sqrt{a} &= a^{\rightarrow x}. \text{ Тогда } (a^{\rightarrow x})^{\rightarrow b} = a, \\
\text{т.е. } (a^{\rightarrow x})^{\rightarrow b} &= a^{\rightarrow(x \odot b)}. \text{ Пусть } (x \odot b) = k. \text{ Откуда } x = k \Delta b = \Delta b. \\
\text{Итак,}
\end{aligned}$$

$${}^{\rightarrow b} \sqrt{a} = a^{\rightarrow(\Delta b)}.$$

---

<sup>4</sup> Нетрудно заметить родственность операций  $\odot$  умножения,  $\Delta$  и деления, если осуществить замену  $\{+; -\} \rightarrow \{\cdot; \div\}$ .

3. Для установления равенства  $\sqrt[b]{a^{\rightarrow b}} = a$  обозначим  $\sqrt[b]{a^{\rightarrow b}} = a^{\rightarrow x} \Rightarrow (a^{\rightarrow x})^{\rightarrow b} = a^{\rightarrow (x \odot b)} = a^{\rightarrow b}$ , т.е.  $(x \odot b) = b$ .

В результате,  $x^{\log_k b} = b \Rightarrow x = k$  и  $a^{\rightarrow x} = a^{\rightarrow k} = \underbrace{a \odot a \odot \dots \odot a}_{\log_k k=1} = a$ .

4. Докажем, что  $a^{\rightarrow (k_1 \triangle k_2)} = \sqrt[k_2]{a^{\rightarrow k_1}}$ . Запишем правую часть в виде  $\sqrt[k_2]{a^{\rightarrow k_1}} = a^{\rightarrow x}$ . Откуда  $(a^{\rightarrow x})^{\rightarrow k_2} = a^{\rightarrow k_1} \Rightarrow a^{\rightarrow (x \odot k_2)} = a^{\rightarrow k_1}$ , т.е.  $x \odot k_2 = k_1$ . Получили  $x = k_1 \triangle k_2$ , что и требовалось доказать.

5. Докажем, что  $\text{ilog}_a k_1 \cdot \text{ilog}_a k_2 = \text{ilog}_a (k_1 \odot k_2)$ . Так как

$$\begin{aligned} a^{\rightarrow b_1} \odot a^{\rightarrow b_2} &= \underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{\log_k b_1} \odot \underbrace{(a \odot a \odot \dots \odot a)}_{\log_k b_2} = \\ &= \underbrace{a \odot a \odot \dots \odot a}_{\log_k b_1 + \log_k b_2 = \log_k (b_1 \cdot b_2)} = a^{\rightarrow (b_1 \cdot b_2)}. \end{aligned}$$

Откуда  $b_1 \cdot b_2 = \text{ilog}_a (a^{\rightarrow b_1} \odot a^{\rightarrow b_2})$ . Обозначим  $a^{\rightarrow b_1} = k_1$ ,  $a^{\rightarrow b_2} = k_2$ , т.е.  $b_1 = \text{ilog}_a k_1$ ,  $b_2 = \text{ilog}_a k_2$  и  $\text{ilog}_a k_1 \cdot \text{ilog}_a k_2 = \text{ilog}_a (k_1 \odot k_2)$ , что и требовалось доказать.

**Примечание.** Аналогично можно доказать соотношения

$$a^{\rightarrow b_1 \triangle b_2} = a^{\rightarrow (b_1/b_2)} \text{ и } \text{ilog}_a (k_1 \triangle k_2) = \frac{\text{ilog}_a k_1}{\text{ilog}_a k_2}.$$



6. Равенство  $\text{ilog}_a b^{\rightarrow p} = \text{ilog}_a \underbrace{(b \odot b \odot \dots \odot b)}_{\log_k(p)}$  приводит к доказа-

тельству важного свойства  $\text{ilog}_a b^{\rightarrow p} = p \odot \text{ilog}_a b$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \text{ilog}_a \underbrace{(b \odot b \odot \dots \odot b)}_{\log_k(p)} &= \underbrace{(\text{ilog}_a b) \cdot (\text{ilog}_a b) \cdot \dots \cdot (\text{ilog}_a b)}_{\log_k(p)} = \\ &= (\text{ilog}_a b)^{\log_k(p)} = (\text{ilog}_a b) \odot p = p \odot \text{ilog}_a b. \end{aligned}$$

7. Преобразуем  $a^{\rightarrow (\text{ilog}_a b)} = a^{\rightarrow (k \Delta \text{ilog}_a b)} \Rightarrow b^{\rightarrow (\text{ilog}_a b)} = a$ .

8. Докажем, что  $\text{ilog}_a b = \text{ilog}_c b \Delta \text{ilog}_c a$ . Так как  $b = a^{\rightarrow (\text{ilog}_a b)} = \left( c^{\rightarrow (\text{ilog}_c a)} \right)^{\rightarrow (\text{ilog}_a b)} = c^{\rightarrow (\text{ilog}_c a \odot \text{ilog}_a b)}$ , то  $\text{ilog}_c a \odot \text{ilog}_a b = \text{ilog}_c b$ , т.е.  $\text{ilog}_c b \Delta \text{ilog}_c a = \text{ilog}_a b$ , что и требовалось доказать.

9. Чрезвычайно просто установить равенства  $a \odot b^c = a^c \odot b$ ,  $a \odot (b \cdot c) = (a \odot b) \cdot (a \odot c)$ ,  $(a \cdot c) \Delta b = (a \Delta b) \cdot (c \Delta b)$ ,  $a \Delta b^c = \sqrt[c]{a \Delta b}$ :

$$\text{а) } a \odot b^c = a^{\log_k(b^c)} = (a^c)^{\log_k b} = (a^c) \odot b;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } a \odot (b \cdot c) &= a^{\log_k(b \cdot c)} = a^{\log_k b + \log_k c} = a^{\log_k b} \cdot a^{\log_k c} = \\ &= (a \odot b) \cdot (a \odot c). \text{ (Аналогично, } a \odot \left( \frac{b}{c} \right) = \frac{(a \odot b)}{(a \odot c)}); \end{aligned}$$

$$\text{в) } (a \cdot c) \Delta b = (a \cdot c)^{1/\log_k b} = a^{1/\log_k b} \cdot c^{1/\log_k b} = (a \Delta b) \cdot (c \Delta b);$$

$$\text{г) } a \Delta b^c = a^{1/\log_k(b^c)} = (a^{1/c})^{1/\log_k b} = \sqrt[c]{a \Delta b} \text{ и т.д..}$$

10. Докажем, что  $\text{ilog}_{a^{\rightarrow p}}(b) = \Delta p \odot \text{ilog}_a b$ .

Преобразуем правую часть равенства:

$$\Delta p \odot \text{ilog}_a b = \Delta p \Delta \text{ilog}_b a = \Delta(p \odot \text{ilog}_b a) = \Delta(\text{ilog}_b^a \rightarrow p) = \text{ilog}_{a \rightarrow p}(b),$$

что и требовалось доказать.

## § 1.4 $\omega$ -отображения чисел и функций

Рассмотрим некоторые аспекты  $\omega$ -отображений чисел и функций. Дадим следующие вводные определения:

**Определение 1.1.** Функция  $y = {}^x k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ ,  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x > 0$ )<sup>5</sup> называется *сверхпоказательной*, если  ${}^x k = k^{k^{\dots^k}} \Bigg\} x$ . (По аналогии с показательной  $y = k^x = \underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_x$ , где  $x = \text{var}$ ,  $k = \text{const}$ ).

**Определение 1.2.** Функция  $y = \text{slog}_k x$  ( $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ ) называется *сверхлогарифмической* или *суперлогарифмической*, если она является обратной сверхпоказательной функции, т.е. из  $y = \text{slog}_k x$  следует  $x = {}^y k$ . Согласно классическому определению эта функция может принимать только целые значения ( $y \in \mathbf{Z}$ ).

**Замечание 1.** Определение 1.2 казалось бы противоречит известной теореме: “Если функция  $f$  определена, непрерывна и возрастает (убывает) на промежутке  $I$ , то множество ее значений есть некоторый промежуток  $J$ , на котором существует функция  $g$ , обратная функции  $f$  (обозначается  $g = f^{-1}$ ) и обладающая свойствами:  $g$  непрерывна, возрастает (или убывает) на промежутке  $J$  в зависимости от возрастания (убывания) функции  $f$  на промежутке  $I$ .”

---

<sup>5</sup> Хотя в приведенном классическом определении введено ограничение на  $x$  ( $x \in \mathbf{Z}$ ,  $x > 0$ ), мы в дальнейшем будем пользоваться нередко расширенной областью определения функции  $y = {}^x k$ , а именно  $x \in \mathbf{R}$ . Это связано с новым нестандартным подходом и объектами новой природы, анализ которых в книге отсутствует.

На самом деле, если расширить область определения сверхпоказательной функции и полагать  $x \in \mathbf{Q}$  ( $q \in \mathbf{Q}$ ,  $q = \frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \mathbf{Z}$ ), то существование  $y = \text{slog}_k x$  не противоречит этой теореме. Более того, нам представляется возможным дальнейшее расширение областей определения *сверхпоказательной* и *сверхлогарифмической* функций в связи с расширением поля действительных чисел, о чем будет сказано в главе 2.

**Замечание 2.** В определениях 1.1 и 1.2 представлены сверхфункции *первого* порядка. Очевидно, существуют сверхфункции *высших* порядков.

Например, *сверхпоказательная* второго порядка  $y = {}^x k = \left. {}^k \cdots {}^k k \right\} x$  *суперлогарифмическая* второго порядка  $y = \text{sslog}_k x$ .

Из  $y = \text{sslog}_k x$  следует  $x = y \left\{ {}^k \cdots {}^k k = \frac{y}{k} \right.$  и т.д..

**Определение 1.3.** Функция  $y = {}^n x$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) называется *сверхстепенной*, если из  $y = {}^n x$  следует  $y = x^{x \cdots x} \left\} n \right.$ , где  $n = \text{const}$ ,  $x = \text{var}$ .

Например,  $y = {}^3 x = x^{x^x}$ .

**Определение 1.4.** Функция  $y = {}^n \hat{\sqrt[n]{x}}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) называется *суперкорнем  $n$ -й степени*, если она является обратной сверхстепенной функции, т.е. из  $y = {}^n \hat{\sqrt[n]{x}}$  следует  $x = {}^n y$ .

Расширяя области допустимых значений *сверхстепенной* функции и *суперкорня* согласно замечанию 1 ( $n \in \mathbf{Q}$ ,  $n \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{R}_0$  и т.д.), можно получить более глобальное (дилатационное) представление о поведении вышеуказанных функций.

Нетрудно заметить, что справедливо *основное суперлогарифмическое тождество*:

$$\text{slog}_k {}^a k \equiv (\text{slog}_k a) * k \equiv a \quad (1.2)$$

Действительно, пусть  $(\text{slog}_k a) * k = x$ . Тогда из определения 1.2. Можно записать  $\text{slog}_k a = \text{slog}_k x$ . Откуда  $x = a$ . Кроме того, полезно указать, что

$${}^x k = k \binom{x-1}{k} = k \binom{-1+x}{k} = k k \binom{-2+x}{k} \text{ и т.д.. } ({}^{1+x} k = k \binom{x}{k});$$

$$\text{slog}_k a \cdot k = k \binom{(-1+\text{slog}_k a)}{k} \Rightarrow a = k \binom{(-1+\text{slog}_k a)}{k} \Rightarrow \log_k a = \binom{-1+\text{slog}_k a}{k}.$$

В дальнейшем, воспользуемся очевидными формулами:

$${}^x k = k \binom{-1+x}{k}, \quad (1 + \text{slog}_k a) * k = k^a, \quad (1.3)$$

$$(2 + \text{slog}_k a) * k = ((1 + \text{slog}_k a) * k) * k = k k^a,$$

$$(-1 + \text{slog}_k a) * k = \log_k a.$$

Не останавливаясь на исследовании различных закономерностей, возникающих в связи с введением функций новой природы (1.1; 1.2; 1.3; 1.4), отметим в качестве примера некоторые из самых простейших:

$$\log_{\hat{\mathcal{J}}\bar{a}}^b = \hat{\mathcal{J}}\bar{a} \cdot \log_a b; \quad {}^\infty(:a) = :(\hat{\mathcal{J}}\bar{a})^6$$

$$\log_a^{\hat{\mathcal{J}}\bar{b}} = \frac{1}{\hat{\mathcal{J}}\bar{b}} \cdot \log_a b; \quad ({}^\infty \hat{\mathcal{J}} : (\hat{\mathcal{J}}\bar{a}) = :a);$$

$$\log_3^b \hat{\mathcal{J}}\bar{a} = {}^2 \binom{3}{\hat{\mathcal{J}}\bar{a}} \cdot \log_a b; \quad (1.4)$$

$$\log_n^b \hat{\mathcal{J}}\bar{a} = {}^{n-1} \binom{n}{\hat{\mathcal{J}}\bar{a}} \cdot \log_a b;$$

$${}^n \binom{n}{\hat{\mathcal{J}}\bar{a}} = a; \quad \text{slog}_{\binom{n}{\hat{\mathcal{J}}\bar{a}}}^a = n \text{ и другие.}$$

**Теорема 1.2.** *Образ числа  $a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) при отображении  $\backslash \omega_i \rightarrow \omega_0 \backslash$  с коэффициентом отображения  $k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) определяется по формуле  $\binom{i+\text{slog}_k a}{k}$ , т.е.*

---

<sup>6</sup> Напомним читателю, что  $\hat{\mathcal{J}}\bar{a}$  — это *сверхкорень* (а не корень!).

$$a \equiv a \setminus \omega_i \xrightarrow{i} \omega_0 \setminus (i + \text{slog}_k a)_k \equiv (i + \text{slog}_k a)^* k \quad (1.5)$$

**Доказательство.** Применяя метод математической индукции, рассмотрим ряд частных случаев с коэффициентом отображения  $k$ :

а) Пусть  $i = 0$ . Тогда  $a \equiv a \setminus \omega_0 \xrightarrow{0} \omega_0 \setminus a \equiv (0 + \text{slog}_k a)^* k$  (по формуле 1.2  $(\text{slog}_k a)^* k \equiv a$ ).

б) При  $i = 1$  получим  $a \equiv a \setminus \omega_1 \xrightarrow{1} \omega_0 \setminus k^a \equiv k^{(\text{slog}_k a)^* k}$  (по формуле 1.2). Откуда  $k^a \equiv (1 + \text{slog}_k a)_k$  (так как  $(1 + \text{slog}_k a)^* k = k^{(\text{slog}_k a)^* k} = k^a$  по формуле 1.3).

в) При  $i = 2$  соответственно по формулам 1.3 имеем:

$$(1 + \text{slog}_k a)^* k = k^{(1 + \text{slog}_k a)^* k} = k^k^{((\text{slog}_k a)^* k)} = k^k k^a.$$

Действительно,  $a \equiv a \setminus \omega_2 \xrightarrow{2} \omega_0 \setminus k^k k^a$ .

г) Пусть  $i = -1$ . Тогда

$$a \equiv a \setminus \omega_{-1} \xrightarrow{-1} \omega_0 \setminus \log_k a.$$

Это нетрудно понять, если отобразить  $\log_k a$  из пространства  $\omega_1$  в пространство на порядок ниже, т.е. в  $\omega_0$ :

$\log_k a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\log_k a} = a$ . Заменяя индексы пространств<sup>7</sup>, получим:

$\log_k a \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus a$ . Откуда  $a \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k a$ .

С другой стороны, обозначив  $(-1 + \text{slog}_k a)^* k = x$ , найдем  $\text{slog}_k x = -1 + \text{slog}_k a$  или  $1 + \text{slog}_k x = \text{slog}_k a$ . В результате,

---

<sup>7</sup> Можно показать, что отображение  $\setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \setminus$  равносильно отображению  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_{i-1} \setminus$  в связи с изначальным описанием  $\omega$ -пространств и  $\omega$ -отображений, т.е.

$$\setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \setminus \equiv \setminus \omega_i \rightarrow \omega_{i-1} \setminus \text{ и т.п.}$$

$a = (1 + \text{slog}_k x)^* k$  или  $k^{\log_k a} = k^{(\text{slog}_k x)^* k} = k^x$ , т.е.  
 $x = \log_k a$ . Получаем

$$a \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus (-1 + \text{slog}_k a)^* k.$$

Перейдем от частных случаев к общему. Пусть равенство 1.5 верно, т.е.

$$a \equiv a \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus (i + \text{slog}_k a)^* k.$$

Докажем, что в этом случае верно равенство

$$a \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus (1 + i + \text{slog}_k a)^* k$$

Так как,  $(1 + \text{slog}_k a)^* k = k^a$ , то  $\text{slog}_k(k^a) = 1 + \text{slog}_k a$ . Отобразим число  $a$  из  $\omega_{i+1}$  в пространство  $\omega_i$ :

$$a \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \setminus k^a$$

Наконец, отображим число  $k^a$  из  $\omega_i$  в  $\omega_0$ :

$$k^a \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus (i + \text{slog}_k k^a)^* k, \text{ т.е.}$$

$$k^a \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus (1 + i + \text{slog}_k a)^* k.$$

Итак,  $a \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus (1 + i + \text{slog}_k a)^* k$ , что и требовалось доказать. Следовательно, формула 1.5 верна.

**Лемма 1.1** Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , являющаяся объектом пространства  $\omega_1$ , при отображении в пространство  $\omega_0$  преобразуется в функцию  $k^f(\log_k^{x_1}, \log_k^{x_2}, \dots, \log_k^{x_n})$  ( $k \in \mathbf{R}, k \neq 1$ ), т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^f(\log_k^{x_1}, \log_k^{x_2}, \dots, \log_k^{x_n}), \quad (1.6)$$

если  $k^x$  — функция связи между пространствами  $\omega_1$  и  $\omega_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\omega_1$  связано с  $\omega_0$  функцией  $f_i = F(x) = k^x$  ( $k \in \mathbf{R}, k \neq 1$ ), где  $k$  – коэффициент отображения из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ . Тогда число  $a$  ( $a \in \omega_1$ ) отобразится в  $\omega_0$  в виде  $F(a) = k^a$  ( $a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a$ ), а функция  $f(x)$  в силу *идентичности структуры*<sup>8</sup>  $\omega_1$  и  $\omega_0$  трансформируется в  $F(f(F^{-1}(x)))$ , где  $F^{-1}(x)$  – функция обратная  $F(x)$ . Действительно, в  $\omega_0$  числа имеют другой масштаб по сравнению с аналогичными числами в пространстве  $\omega_1$  и поэтому при переходе  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  функции  $f(x)$  следует изменить аргумент, учитывая новый масштаб, т.е.

$$f(x) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus F(f(F^{-1}(x))), \text{ или}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{f(\log_k^{x_1}, \log_k^{x_2}, \dots, \log_k^{x_n})},$$

что и требовалось доказать.

**Следствие.** Функция  $f(x)$  при отображении из некоторого пространства  $\omega_j$  в любое пространство  $\omega_i$  трансформируется в  $F(f(F^{-1}(x)))$ , т.е.

$$f(x) \setminus \omega_j \rightarrow \omega_i \setminus F(f(F^{-1}(x))), \quad (1.7)$$

где  $F(x)$  – функция, связывающая числа пространств  $\omega_j$  и  $\omega_i$ . Если число  $a \in \omega_j$ , то

$$a \setminus \omega_j \rightarrow \omega_i \setminus F(a).$$

---

<sup>8</sup> Под *идентичностью структуры* пространств  $\omega_1$  и  $\omega_0$  понимается внутривещественная аналогия математических объектов и связей между ними. Все числа, функции, интегро-дифференциальные объекты, теоремы и т.д. внутри пространства  $\omega_1$  те же, что и в  $\omega_0$ . Изменение объектов наблюдается лишь при переходе их из  $\omega_1$  в  $\omega_0$  (или из  $\omega_0$  в  $\omega_1$ ).

**Теорема 1.3** Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , являющаяся объектом любого пространства  $\omega_i$ , при отображении в пространство  $\omega_0$  преобразуется в функцию

$$\left( i + \text{slog}_k f \left( \left( (-i + \text{slog}_k x_1) * k \right), \left( (-i + \text{slog}_k x_2) * k \right), \dots, \left( (-i + \text{slog}_k x_n) * k \right) \right) \right) * k$$

, если  $k^x$  – функция связи между пространствами  $\omega_i$  и  $\omega_0$ .

**Примечание.** Это сокращенный вариант теоремы существования и единственности одноактного  $\omega$  – отображения.

**Доказательство.** Докажем теорему методом математической индукции.

а). Пусть  $i = 0$ . Тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0 \setminus F_0 = \left( \text{slog}_k f \left( \left( (\text{slog}_k x_1) * k \right), \right. \right. \\ \left. \left. \left( (\text{slog}_k x_2) * k \right), \dots, \left( (\text{slog}_k x_n) * k \right) \right) \right) * k.$$

Так как  $(\text{slog}_k x_j) * k = x_j$  (согласно формуле 1.2), то  $F_0 = (\text{slog}_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)) * k = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Действительно, отображая функцию  $f$  из  $\omega_0$  в то же самое пространство  $\omega_0$ , получим ту же самую функцию  $f$ .

$$\text{б). Пусть } i = 1. \text{ Тогда } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus F_1 = \left( 1 + \text{slog}_k f \left( \left( (-1 + \text{slog}_k x_1) * k \right), \left( (-1 + \text{slog}_k x_2) * k \right), \dots, \left( (-1 + \text{slog}_k x_n) * k \right) \right) \right) * k$$

Обозначим выражение  $(-1 + \text{slog}_k x_j) * k$  за  $a_j$ :

$$a_j = (-1 + \text{slog}_k x_j) * k, \quad \text{slog}_k a_j = -1 + \text{slog}_k x_j \Rightarrow \text{slog}_k x_j = 1 + \text{slog}_k a_j \Rightarrow x_j = (1 + \text{slog}_k a_j) * k = k \left( (\text{slog}_k a_j) * k \right) = k a_j \quad (\text{так}$$



как согласно формуле 1.2  $\text{slog}_k a_j * k = (\text{slog}_k a_j)_k = a_j$ . Откуда  $\log_k x_j = a_j$ , т.е.  $F_1 = (1 + \text{slog}_k f(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)) * k$ .

Обозначив  $\text{slog}_k f(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n) = S$ , получим:  $F_1 = (1 + S) * k = k(S * k)$ . Из этого выражения следует:

$$F_1 = k f(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)$$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k f(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)$ , что совпадает с результатом леммы 1.1 (с формулой 1.6).

Допустим, что формула  $F_0 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus F_i = (i + \text{slog}_k f((( -i + \text{slog}_k x_1) * k), (( -i + \text{slog}_k x_2) * k), \dots, (( -i + \text{slog}_k x_n) * k))) * k$  верна. Докажем, что в этом случае будет выполняться следующее отображение функции  $f$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus F_{i+1} = (1 + i + \text{slog}_k f((( -1 - i + \text{slog}_k x_1) * k), (( -1 - i + \text{slog}_k x_2) * k), \dots, (( -1 - i + \text{slog}_k x_n) * k))) * k$$

Обозначив выражение  $(-1 - i + \text{slog}_k x_j) * k$  за  $b_j$ :

$$\begin{aligned} b_j &= (-1 - i + \text{slog}_k x_j) * k, & \text{slog}_k b_j &= -1 - i + \text{slog}_k x_j \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + i + \text{slog}_k b_j &= \text{slog}_k x_j & \Rightarrow x_j &= (1 + i + \text{slog}_k b_j) * k = \\ &= k^{(i + \text{slog}_k b_j) * k} \Rightarrow \log_k x_j &= (i + \text{slog}_k b_j) * k & \text{ и } i + \text{slog}_k b_j = \\ &= \text{slog}_k \log_k x_j. & \text{Откуда } b_j &= (-i + \text{slog}_k \log_k x_j) * k, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{i+1} &= (1 + i + \text{slog}_k f(b_1, b_2, \dots, b_n)) * k = \\ &= k^{(i + \text{slog}_k f(b_1, b_2, \dots, b_n)) * k} = k F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n). \end{aligned}$$

Полученный результат свидетельствует (согласно лемме 1.1 и её следствию) о том, что имеет место отображение функции  $F_i$ :

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)}.$$

В силу идентичности структуры  $\omega$ -пространств последнее отображение равносильно следующему:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)}.$$

$$\text{Тогда } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus F_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\text{а } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_{-1} \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)}.$$

Очевидно, что отображение  $\setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \setminus$  аналогично отображению  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_{i-1} \setminus$  в связи с вышеуказанной идентичностью  $\omega$ -пространств (и сноской 8), т.е.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_{-1} \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)}.$$

Это выражение можно переписать, заменив отображение  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_{-1} \setminus$  на тождественное  $\setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)},$$

$$\text{т.е. } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_{i+1} \rightarrow \omega_0 \setminus F_{i+1} = k^{F_i(\log_k x_1, \log_k x_2, \dots, \log_k x_n)} = \\ = \left(1 + i + \log_k f(b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_n)\right)^* k,$$

где  $b_j = (-i + \log_k \log_k x_j)^* k$ , что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

В заключение заметим, что, если функция связи между пространствами  $\omega_i$  и  $\omega_j$   $f_c = k^x$ , то функция  $y = \log_k x$  инвариантна относительно этих пространств. Действительно,

$$\log_k x \setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus k^{\log_k \log_k x} = \log_k x,$$

т.е.  $i\log_k x \equiv \log_k x$ .

Свойства функции  $y = \log_k x$  сохраняются при отображении  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus$ . Например, пусть  $\omega_i = \omega_{-1}$ , а  $\omega_j = \omega_0$ . Тогда

$$\frac{\log_k \alpha}{\log_k \beta} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k \left( \frac{\log_k k^\alpha}{\log_k k^\beta} \right) = \log_k \alpha - \log_k \beta.$$

Если  $\omega_i = \omega_1$ , а  $\omega_j = \omega_0$ , то:

$$\frac{\log_k \alpha}{\log_k \beta} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\frac{\log_k \log_k \alpha}{\log_k \log_k \beta}} = (\log_k \alpha) \Delta (\log_k \beta) \text{ и т.д..}$$

Итак, отношение  $\frac{\log_k \alpha}{\log_k \beta}$  при  $\omega$ -отображении сохраняется при ус-

ловии замены операции деления на соответствующий  $\omega$ -образ этой операции.

### § 1.5 Проблематика общего вопроса $\omega$ -отображений

Резюмируя вышеизложенное, отметим *некоторые* проблемы, возникающие при реализации  $\omega$ -отображений:

1. Поиск общих закономерностей  $\omega$ -отображений объектов для *различных* функций связи. Описание чётких ограничений, накладываемых на функции связи между  $\omega$ -пространствами.

2. Приведение примеров  $\omega$ -отображений с другими функциями связи (в настоящей работе представлена, как указывалось, только одна показательная функция связи  $k^x$ ).

3. Определение частных и универсального критериев, характеризующих  $\omega$ -трансформацию графиков функций. Например, установление *коэффициента  $\omega$ -изменения* элементов длины дуги (в случае функции одной переменной), площади (для функции двух переменных) и гиперплоща-

ди (для функции трех и более переменных) при  $\omega_i \rightarrow \omega_j$ , где  $i, j \in \mathbb{Z}$  и  $i \neq j$ .

4. Углубление разработки  $\omega$ -отображений на основе показательной функции  $k^x$ . В частности, исследование функции  $y = {}^x k$  и  $y = \text{slog}_k x$ . Поиск закономерностей при действии со сверхстепенями и сверхлогарифмами.

Разумеется, возможны и другие проблемы, при изучении общего вопроса об  $\omega$ -отображениях функций.

## ГЛАВА 2. РАСШИРЕНИЕ ПОЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

[50; 52; 55; 56]

### § 2.1. Общие замечания

Анализируя свойства общеизвестных алгебраических операций на  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  - множествах натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно и рассматривая эти операции как ингредиенты общего инфинитного множества действий, нетрудно получить ряд формул, инвариантных относительно этих действий. Частично они приведены в таблице 1. Термины "операция" и "действия" используются нами как синонимы. Инвариантные относительно операции формулы имеют самостоятельное значение, так как являются закономерностями во множестве операций, которые сами являются математическими объектами и создают специфичное инфинитное множество. Кроме того, эти формулы являются носителями прикладной ориентации. В настоящей работе не акцентируется внимание на этом, так как инвариантность - предмет специального исследования. Отметим лишь тот факт, что именно суть этого исследования позволило открыть действия типа " $\circ$ " и " $\Delta$ ". Последние легли в основу представления о  $\Delta$ -числах, множество которых  $\mathbb{R}_\Delta$  дало предпосылки для формирования понятия расширения поля действительных чисел.

## § 2.2 Инвариантные формулы

Приведем примеры инвариантных формул.

2.2.1  $(a, b) \in \mathbf{R}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

$${}_2^n \mathfrak{R}_2^x \approx {}_2^{n-1} \mathfrak{R}_2^x \left( {}_1^{n-2} \mathfrak{R}_a \left( {}_3^{n-1} \mathfrak{R}_a^x \right) \right) \quad (2.1)$$

Формула (2.1) является компактной записью метода итераций (для  $n = 3$ ,  $i = 2$ :  $\sqrt{c} \approx \frac{c/a + a}{2}$ ; для  $n = 4$ ,  $i = 2$ :  ${}^2\sqrt[2]{c} \approx \sqrt{a \cdot \log_a c}$ ,  ${}^3\sqrt[3]{c} \approx \sqrt[3]{a^2 \cdot \log_a \log_a c}$  и т.д., где  $c > 0$ ,  $a \neq \{0, 1\}$ ,  $a$  – первое приближенное значение сверхкорня).

**Примечание.** При аналитическом оперировании с суперкорнями (со сверхкорнями) целесообразно пользоваться очевидными закономерностями типа:

$$\frac{\log b}{\log {}^2\sqrt[2]{a}} = {}^2\hat{j}_a^- \cdot \log_a b, \quad \frac{\log {}^2\sqrt[2]{b}}{\log a} = \frac{1}{{}^2\hat{j}_b^-} \cdot \log_a b \text{ и т.д.}$$

2.2.2.  $(a, b) \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n = 1$  при  $a < b$ :

$${}_1^n \mathfrak{R}_a \left( {}_k^{n-1} \mathfrak{R}_a^b \right) = {}_1^{n-1} \mathfrak{R}_a^b, \quad (2.2)$$

где  $k$  – число повторяющихся операций ( $k \in \mathbf{Z}$ ).

**Пример 2.1.** а)  $b/a = (-1) + \frac{a+b}{a}$ ,  $\log_a b = (-1) + \log_a(a \cdot b)$ ,  
 $\text{slog}_a b = (-1) + \text{slog}_a a^b$ ; б)  $b/a = 1 + \frac{b-a}{a}$ ,  $\log_a b = 1 + \log_a(b/a)$ ,  
 $\text{slog}_a b = 1 + \text{slog}_a \log_a b$  и т.д..

На основании вышеизложенного можно установить ряд полезных соотношений. В частности,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} {}^p \left( \sqrt[p]{e} \right) = e.$$

2.2.3.  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq \{0, 1\}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ :

$$\boxed{{}_2^n \mathfrak{R}_a^a = {}_2^{n+1} \mathfrak{R}_\infty^a} \quad (2.3)$$

**Пример 2.2.**  $\boxed{\frac{x}{+\infty} = x - x, \quad \sqrt[n]{x} = \frac{x}{x}, \quad \hat{\infty} \hat{x} = \sqrt[n]{x}} \text{ и т.д..}$

$$2.2.4. \quad {}_1^n \mathfrak{R}_2^2 = 4. \quad (2.4)$$

$$2.2.5. \quad {}_2^3 \mathfrak{R}_c^{\left({}_1^3 \mathfrak{R}_a^b\right)} = {}_1^3 \mathfrak{R}_a^{\left({}_2^2 \mathfrak{R}_c^b\right)} \quad (2.5)$$

Для  $n = -1$  справедливы формулы:

$${}_{-1}^{-1} \mathfrak{R}_{a-1}^a = a + 1, \quad {}_{-1}^{-1} \mathfrak{R}_a^a = a + 2, \quad {}_{-1}^{-1} \mathfrak{R}_a^n = n + 1, \quad (n > a).$$

На основании их, как указывалось, определены новые операции ( в частности, операция " $\circ$ " и обратная ей " $\Delta$ ").

**Определение 2.1.** Операцией нулевого порядка " $\circ$ " называется такое действие ( $n = 0$ ) между операндами  $a$  и  $b$ , что из  $a \circ b = c$  следует  $c = a + 1$  при  $a > b$ ,  $c = a + 2 = b + 2$  при  $a = b$  и  $c = b + 1$  при  $a < b$ . Эта операция коммутативна ( $a \circ b = b \circ a$ ).

**Определение 2.2.** Корни уравнения  $x \circ a = (-\infty)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) называются  $\Delta$ -числами (по аналогии  $x + a = 0$ ,  $a > 0$  следует  $x = (-a)$  – отрицательные числа;  $x \cdot a = 1$ ,  $a \in \mathbf{N}$ ,  $a \neq 1$  следует  $x = (:a)$  – дробные).

Существует инфинитный спектр  $\Delta_n$ -чисел, происхождение и иерархия которых связаны с операциями проще сложения при соблюдении принципа двойственности и условия

$$\Delta_n \cap \Delta_{n+1} = \{v_n\}, \quad v_n = {}_3^n \mathfrak{R}_a^a.$$

## § 2.3 Аксиоматика $\Delta$ -чисел

Рассмотрим некоторые аксиомы  $\Delta$ -чисел. При этом наряду с общеизвестными арифметическими действиями учитываются операции " $\circ$ " и

" $\Delta$ ". Фактически, представленные аксиомы - это система аксиом действительных чисел, интерпретированная существованием множества  $\Delta$ -чисел  $(\Delta_0)$  и новых действий " $\circ$ " и " $\Delta$ ". Поэтому ниже сделана попытка обобщения множеств  $\Delta$ -чисел  $(\Delta_0)$  и действительных чисел  $\mathbf{R}$ , т.е. формирования множества  $\mathbf{R}_0 = \Delta_0 \cup \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_\Delta \cup \mathbf{R}$ .

1. Для любых  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$  определено соотношение порядка:  $\Delta b > (\Delta a)$  при  $b < a$ ,  $\Delta b = (\Delta a)$  при  $b = a$  и  $\Delta b < (\Delta a)$  при  $b > a$ , причем, если  $\Delta a < (\Delta b)$  и  $\Delta b < (\Delta c)$ , то  $\Delta a < (\Delta c)$  (транзитивность упорядоченности), где  $(a, b, c) \in \mathbf{R}$ .

2. Для любых  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$  определено единственное число  $\Delta c = \Delta a \circ (\Delta b)$ ,  $\Delta c \in \Delta_0$ , причем  $\Delta c = \Delta(a \circ b)$ .

Согласно определения аксиома 1 верна для  $a, b \in \mathbf{R}_0$ .

**Примечание 1.** Поясним, что непосредственно из определения операции " $\circ$ " следует

$$\Delta a \circ (\Delta b) = \begin{cases} \Delta b + 1, & \Delta b < \Delta a, \quad b > a \\ \Delta b + 2, & \Delta b = \Delta a, \quad b = a \\ \Delta a + 1, & \Delta a < \Delta b, \quad b < a \end{cases}$$

3. Для любых  $a, b \in \mathbf{R}_0$  имеет место соотношение  $a \circ b = b \circ a$  (коммутативность нулевой операции).

4. Аксиома знаков. Для любого  $a \in \mathbf{R}_0$  имеет место тождества  $\Delta \Delta \equiv \circ$  ( $\Delta(\Delta a) \equiv a$ ),  $\Delta \circ \equiv \Delta$  и  $\circ \Delta \equiv \Delta$  ( $\Delta(\circ a) \equiv \Delta a$ ,  $\circ(\Delta a) \equiv \Delta a$ ),  $\circ \circ \equiv \circ$  ( $\circ(\circ a) \equiv a$ ). Аналогично,  $-(-a) = a$ ,  $-(+a) = -a$  и т.д..

5. Для любых  $a, b \in \mathbf{R}_0$  определено единственное число  $a + b$ , называемое суммой чисел  $a$  и  $b$ . Для любых  $a, b \in \mathbf{R}$  имеет место равенство  $\Delta a + \Delta b = \Delta b + \Delta a$  (коммутативность сложения  $\Delta$ -чисел), а также  $\Delta a + (\Delta b + \Delta c) = (\Delta a + \Delta b) + \Delta c$  (ассоциативность сложения  $\Delta$ -чисел).

**Примечание 2.** Для любых  $a, b \in \mathbf{R}$   $\Delta a + \Delta b = a + b$   $\Delta a + b = \Delta(a + b) = a + (\Delta b)$  (правило знаков),  $\Delta a + (\Delta b \circ (\Delta c)) = a + (b \circ c) = \Delta a + \Delta b \circ (\Delta a + \Delta c) = a + b \circ a + c$  (дистрибутивность сложения  $\Delta$ -чисел относительно операции нулевого порядка) и т.д..

Действительно, правило знаков " $\circ$ " и " $\Delta$ " ( $\circ + \circ = \circ$ ,  $\Delta + \circ = \Delta$ ,  $\circ + \Delta = \Delta$ ,  $\Delta + \Delta = \circ$ ), аналогичное  $(+) \cdot (+) = (+)$ ,  $(-) \cdot (+) = (-)$ ,

$(+) \cdot (-) = (-), \quad (-) \cdot (-) = (+), \quad \text{верно: } \Delta b + (\Delta c) = ((-\infty)\Delta b) + (\Delta c) =$   
 $= (-\infty) + (\Delta c)\Delta(\circ b) + \Delta c = (\Delta(-\infty))\Delta(\Delta(b+c)) = (-\infty)\Delta(\Delta(b+c)) =$   
 $= (\Delta(\Delta(b+c))) = b+c = \circ(b+c), \text{ т.е. } \Delta + \Delta = \circ, \text{ а } \Delta b + \circ c = ((-\infty)\Delta b) +$   
 $+ c = (-\infty) + c\Delta b + c = (-\infty)\Delta b + c = \Delta(b+c), \text{ т.е. } \Delta + \circ = \Delta \text{ или}$   
 $\Delta a + \Delta b = \circ(a+b) = a+b = b+a = \circ(b+a) = \Delta b + \Delta a \quad (\text{сравним:}$   
 $(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) = a \cdot b = b \cdot a = +(b \cdot a) = (-b) \cdot (-a)), \quad \Delta a + (\Delta b +$   
 $+ \Delta c) = \Delta a + \circ(b+c) = \Delta(a+b+c) = \circ(a+b) + \Delta c = (\Delta a + \Delta b) + \Delta c;$   
 $\Delta a + (\Delta b \circ \Delta c) = \Delta a + \Delta(b \circ c) = a + (b \circ c) \quad (\text{сравним: } (-a) \cdot ((-b) + (-c)) =$   
 $= (-a) \cdot (-(b+c)) = a \cdot (b+c)) \text{ и т.д..}$  Следует обратить внимание на про-  
 стейшие закономерности в иерархии операций. Например,  $\Delta a + \Delta b =$   
 $= a+b, \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b, \quad (:a) \odot (:b) = a \odot b, \quad (\Delta a) \boxtimes (\Delta b) = a \boxtimes b \text{ и т.п.}^9.$

По правилу знаков можно записать, что  $\Delta b + 1 = \Delta b + (\circ 1) =$   
 $= \Delta(b+1) \text{ и т.д., т.е. } \Delta a \circ (\Delta b) = \Delta(a \circ b), \text{ что подтверждает аксиому 2.}$

**Примечание 3.**

- а)  $\forall (a, b, c) \in \mathbf{R}_0 \quad (a \circ b) - c = a - c \circ b - c;$
- б)  $\forall (a, b) \in \mathbf{R}_0 \quad (a \circ b) - a = (b \circ 2 \cdot a) - a;$
- в)  $\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{R}_0 \quad (a \circ b) + (c \circ d) = (a + c \circ a + d) \circ$   
 $\circ (b + c \circ b + d);$

6. Для любых  $a, b \in \mathbf{R}_0$  имеет место соотношение  $a + b = b + a$  (коммутативность сложения).

7. Для любых  $a, b, c \in \mathbf{R}_0$  имеет место соотношение  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (ассоциативность сложения).

8. Существует число  $\Delta 0 \in \Delta_0$  такое, что  $\Delta 0 + \Delta a = a \quad (a \in \mathbf{R})$  и для любого  $\Delta a \in \Delta_0, \quad \Delta a \neq \Delta 0$  существует  $b \in \mathbf{R}$  такое, что  $\Delta a + b = \Delta 0$ , причем  $b = (-a)$ .

9. Для любых  $a, b, c \in \mathbf{R}_0$  имеет место соотношение  $a + (b \circ c) = a + b \circ a + c$  (дистрибутивность сложения относительно операции нулевого порядка).

10. Для любых  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  и  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$  справедливы следующие соотношения:

$$\alpha + \Delta a = \Delta(\alpha + a) \in \Delta_0;$$

---

<sup>9</sup> Доказательство приведено в теореме 2.11.



$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta) + \Delta a &= \alpha + \Delta a \circ \beta + \Delta a; \\
\alpha + (\Delta a \circ (\Delta b)) &= \alpha + \Delta a \circ \alpha + \Delta b; \\
\alpha + (\beta + \Delta a) &= (\alpha + \beta) + \Delta a; \quad 0 + \Delta a = \Delta a; \\
\alpha + (\Delta a + (\Delta b)) &= (\alpha + (\Delta a)) + (\Delta b) = \Delta a + (\alpha + \Delta b)
\end{aligned}$$

**Примечание 4.** Аксиома 10 согласуется с предыдущими аксиомами. Действительно:  $(\alpha \circ \beta) + \Delta a = \beta + 1 + \Delta a = \Delta(\beta + 1 + a)$  при  $\beta > \alpha$ ,  $\alpha + \Delta a \circ \beta + \Delta a = \Delta(\alpha + a) \circ (\Delta(\beta + a)) = \Delta(\beta + a) + 1 = \Delta(\beta + 1 + a)$ , при  $\beta > a$ ;  $\alpha + (\Delta a \circ (\Delta b)) = \alpha + \Delta b + 1 = \Delta(\alpha + 1 + b)$  при  $\Delta b < \Delta a$ ;  $\alpha + (\Delta a) \circ \alpha + \Delta b = \alpha + \Delta b + 1 = \Delta(\alpha + 1 + b)$  при  $\Delta b < \Delta a$ ;  $\alpha + (\beta + \Delta a) = \alpha + \Delta(\beta + a) = \Delta(\alpha + \beta + a) = (\alpha + \beta) + \Delta a$ ;  $0 + \Delta a = \Delta(0 + a) = \Delta a$ ;  $\alpha + (\Delta a + (\Delta b)) = \alpha + (a + b)$ ;  $(\alpha + (\Delta a)) + (\Delta b) = \Delta(\alpha + a) + \Delta b = \alpha + a + b$ ;  $\Delta a + (\alpha + \Delta b) = \Delta a + \Delta(\alpha + b) = a + \alpha + b$ .

**Примечание 5.** Если двумя бинарными операциями считать операцию нулевого порядка и сложение (т.е. понизить общепринятый порядок операций сложения и умножения на 1), то множество  $\Delta_0$  является *кольцом* в новой интерпретации последнего. Более того,  $\Delta_0$  является *алгеброй* над полем действительных чисел  $\mathbf{R}$  с учётом понижения порядка операций соответственно на 1.  $\Delta_0$ -ассоциативно-коммутативное кольцо. Разумеется, целесообразно не отделять  $\Delta_0$  от  $\mathbf{R}$ , как это и сделано в настоящем тексте ( $\mathbf{R}_0 = \Delta_0 \cup \mathbf{R}$ ), а рассматривать  $\Delta$ -числа как *действительные*, но обладающие своей спецификой (как дробные или отрицательные по отношению к целым и положительным).

**Примечание 6.** Относительно "нулей" для  $\Delta$ -чисел можно записать:  $\Delta a + 0 = \Delta a$  (сравните  $a + 0 = a$ ),  $(-\infty) \circ a = a$ , т.е. при  $a \in \mathbf{R}_0$  справедливы соотношения  $a + 0 = a$  и  $(-\infty) \circ a = a$ .

11. Для любых  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$  определено единственное число  $\Delta a \cdot \Delta b$ , называемое произведением чисел  $\Delta a$  и  $\Delta b$ ,  $\Delta a \cdot \Delta b \neq \Delta b \cdot \Delta a$ . Причем,  $(\Delta a) \cdot b = a \cdot b$  ( $b \in \mathbf{N}_2$ ),  $(\Delta a) \cdot b = \Delta(a \cdot b) = \Delta(a \cdot b)$  ( $\Delta a) \cdot b = \Delta(a \cdot b)$  ( $b \in \mathbf{N}_1$ ),  $a \cdot (\Delta b) = \Delta(a \cdot b)$ ,  $\Delta a \cdot \Delta b = \Delta((\Delta a) \cdot b)$ ,

$$\sum_{i=1}^n (\Delta a) \cdot C_i = \Delta a \cdot \sum_{i=1}^n C_i, \quad \sum_{i=1}^n C_i \cdot (\Delta a) = a \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta C_i).$$

**Примечание 7.** Кажущаяся коммутативность умножения  $\Delta$ -чисел ложна:

$$\begin{aligned}\Delta a \cdot \Delta b &= \Delta(a \cdot \Delta b) = \{\Delta(a \cdot b); a \cdot b\}, \\ \Delta b \cdot \Delta a &= \Delta(\Delta b \cdot a) = \{\Delta(b \cdot a); b \cdot a\}.\end{aligned}$$

Причина парадокса в том, что в первом случае результат зависит от четности числа  $b$ , а во втором случае – от четности числа  $a$ .

12. Для любого  $\Delta a \in \Delta_0$  существует единица ( $\Delta a \cdot 1 = \Delta a$ ), т.е. для любого числа  $a \in \mathbf{R}_0$  существует единица ( $a \cdot 1 = a$ ).

13. Для любого  $a \in \mathbf{R}_0$ ,  $a \neq \{0; \Delta 0\}$  существует  $b \in \mathbf{R}_0$  такое, что  $a \cdot b = 1$ .

14. Для любых  $a, b, c \in \mathbf{R}_0$  имеет место соотношение  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (ассоциативность умножения).

**Примечание 8.** Заметим, что

$$\begin{aligned}(\Delta a \cdot \Delta b) \cdot \Delta c &= (\Delta(\Delta a \cdot b)) \cdot \Delta c = \begin{cases} \Delta(a \cdot b) \cdot \Delta c & \text{для } b \in N_2 \\ (a \cdot b) \cdot \Delta c & \text{для } b \in N_1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \Delta(\Delta(a \cdot b) \cdot c) & \text{для } b \in N_2 \\ \Delta(a \cdot b \cdot c) & \text{для } b \in N_1 \end{cases} = \begin{cases} \Delta(a \cdot b \cdot c) & \text{для } b \in N_2, c \in N_2 \\ a \cdot b \cdot c & \text{для } b \in N_2, c \in N_1 \\ \Delta(a \cdot b \cdot c) & \text{для } b \in N_1 \end{cases};\end{aligned}$$

$$\Delta a \cdot (\Delta b \cdot \Delta c) = \Delta a \cdot (\Delta(\Delta b \cdot c)) = \begin{cases} \Delta a \cdot (\Delta(b \cdot c)) & \text{для } c \in N_2 \\ \Delta a \cdot (b \cdot c) & \text{для } c \in N_1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \Delta(\Delta a \cdot (b \cdot c)), & c \in N_2 \\ a \cdot b \cdot c, & c \in N_1, b \in N_2 \\ \Delta(a \cdot b \cdot c), & c \in N_1, b \in N_1 \end{cases} = \begin{cases} \Delta(a \cdot b \cdot c), & c \in N_2, \text{ для любых } b, \\ a \cdot b \cdot c, & c \in N_1, b \in N_2, \\ \Delta(a \cdot b \cdot c), & c \in N_1, b \in N_1. \end{cases}$$

15. Для  $(a, b) \in \mathbf{R}$  имеют место равенства  $a^{\Delta b} = -(a^b)$ ,  $\log(-a) \in \Delta_0$ , причём  $\Delta \log a \in \log(-a)$ , а  $(\Delta 0 // 2) \in \log i$ . Формула  $a^{\Delta b} = -(a^b)$  имеет глубокий смысл (по аналогии  $a^{-b} = (a^b)$ , где  $(a, b) \in \mathbf{R}_+$ ).

16. Для любых  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$  и  $\alpha \in \mathbf{R}$  имеет место соотношение  $\alpha + (\Delta a + \Delta b) = \alpha \cdot \Delta a + \alpha \cdot \Delta b$ .

**Примечание 9.** Аксиома 15 согласуется с предыдущими аксиомами:  
 $\alpha \cdot (\Delta a + \Delta b) = \alpha \cdot (a + b), \quad \alpha \cdot \Delta a + \alpha \cdot \Delta b = \Delta(\alpha \cdot a) + \Delta(\alpha \cdot b) =$   
 $= \alpha \cdot a + \alpha \cdot b = \alpha \cdot (a + b).$

**Примечание 10а.** Рассмотрим следующий парадокс:  $6^{\Delta 2} = -36$  и  $6^{\Delta 2} = (2 \cdot 3)^{\Delta 2} = 2^{\Delta 2} \cdot 3^{\Delta 2} = (-4) \cdot (-9) = +36$ . Суть парадокса заключается в некоммутативности операции умножения на множестве  $\Delta$  — чисел. Действительно, логарифмируя, получим

$$\log(2 \cdot 3)^{\Delta 2} = (\log(2 \cdot 3)) \cdot \Delta 2 = (\log 2 + \log 3) \cdot \Delta 2 \neq$$

$$\neq (\log 2) \cdot \Delta 2 + (\log 3) \cdot \Delta 2.$$

Это выражение частный случай формулы:

$$(a + b) \cdot \Delta c \neq (a \cdot \Delta c) + (b \cdot \Delta c)$$

Рассмотрим получение этой зависимости для действительных чисел. Действительно, если  $(a, b, c) \in \mathbf{R}$  и  $(a, b, c) \in \mathbf{Z}$ , то

$$(a + b) \cdot c = \underbrace{(a + b) + (a + b) + \dots + (a + b)}_c = a \cdot c + b \cdot c$$

и 
$$\Delta c \cdot (a + b) = \underbrace{\Delta c + \Delta c + \dots + \Delta c}_{a+b} = \Delta c \cdot a + \Delta c \cdot b, \quad \Delta c \cdot (a + b) =$$

$= \Delta c \cdot a + \Delta c \cdot b$ . Однако, в силу некоммутативности умножения (т.к.  $c$  и  $(a + b)$  — число повторений являющихся действительными числами)  $(a + b) \cdot \Delta c \neq (a \cdot \Delta c) + (b \cdot \Delta c)$ .

**Примечание 10б.** Рассмотрим парадокс:  
 $(\Delta a + \Delta b) \cdot \Delta c = (a + b) \cdot \Delta c = a \cdot \Delta c + b \cdot \Delta c = \Delta(a \cdot c) + \Delta(b \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c =$   
 $= (a + b) \cdot c$ . Откуда следует  $\Delta c = c$ . Суть парадокса в том же, что и в примечании 10а.

### Следствия из аксиом

1). Для двух чисел  $a, b \in \mathbf{R}_0$  имеется одно число  $x \in \mathbf{R}_0$  такое, что  $a \circ x = b$  и в случае, если  $|a - b| \neq 2$ ,  $|a - b| > 1$  число  $x = b \Delta a$ .

2). Для операции " $\Delta$ " справедливы некоторые аксиомы операции " $\circ$ ". Например,  $(a\Delta b) + c = (a + c)\Delta(b + c)$  и т.д..

Итак, для двух чисел  $a, b \in \mathbf{R}_0$  имеется одно число  $x \in \mathbf{R}_0$  такое, что  $a\Delta x = b$ .

**Пример.** Пусть  $a\Delta x = b$  и  $b > a + 1$ . Тогда  $x = \Delta(b - 1)$ , так как  $a\Delta(\Delta(b - 1)) = b$ .

3). Для любого  $a \in \mathbf{R}_0$  имеем  $a = -(-a)$ . В частности, если  $a = \Delta b \in \Delta_0$ , то  $\Delta b = -(-\Delta b) = -(\Delta(-b))$ .

4). Для любых  $a, b, c, d \in \mathbf{R}_0$   $b - a = d - c$  эквивалентно  $a + d = b + c$ .

5). Для двух чисел  $a, b \in \mathbf{R}_0$ , где  $a \neq \{0, \Delta 0\}$  существует единственное  $x \in \mathbf{R}$  такое, что  $a \cdot x = b$ , а, в случае, если  $a \in \mathbf{N}_2$ , существует дополнительное значение  $x \in \Delta_0$ .

**Примечание 11.** Деление  $\Delta$ -чисел осуществляется по следующим основным правилам:

$$\text{а) } \forall a, b \in \mathbf{R} \quad \Delta a / \Delta b = \{a/b; \Delta(a/b)\};$$

$$\text{б) } \forall a \in \mathbf{R} \text{ и } b \notin \mathbf{N}_2 \quad \Delta a / b = a / \Delta b = \Delta(a/b).$$

Докажем а):  $\Delta a / \Delta b = x \in \mathbf{R} \Rightarrow \Delta a = x \cdot \Delta b$ . Если  $x \in \mathbf{R}$ , то  $\Delta a = \Delta(x \cdot b) \rightarrow x = (a/b) \rightarrow \Delta a / \Delta b = a/b$ . Если  $x = \Delta y \in \Delta_0$ ,  $y \in \mathbf{R}$ , то  $\Delta a = \Delta y \cdot \Delta b = \Delta(\Delta y \cdot b)$ . Равенство выполнимо, если  $b \in \mathbf{N}_2$ ;  $\Delta a = \Delta(y \cdot b) \rightarrow y = a/b$ .

Докажем б):  $\Delta a / b = \Delta z \rightarrow \Delta a = \Delta z \cdot b = \Delta(\Delta z \cdot b) \rightarrow z = a/b$ , если  $b \in \mathbf{N}_1$ , т.е.  $\Delta a / b = \Delta(a/b)$ . Аналогично  $a / \Delta b = \Delta z \rightarrow a = \Delta z \cdot \Delta b = \Delta(\Delta z \cdot b) = \Delta(\Delta(z \cdot b)) = z \cdot b$ , при  $b \in \mathbf{N}_1$ , т.е.  $a / \Delta b = \Delta(a/b)$ .

$$\text{6). Для } a \in \mathbf{R}_0 \text{ имеем } \frac{1}{1/a} = a.$$

**Примечание 12.** Пусть  $a = \Delta b \in \Delta_0$ . Тогда  $1/\Delta b = \Delta(1/b)$  для  $b \notin \mathbf{N}_2$ ,  $1/1/\Delta b = \Delta x \Rightarrow 1 = \Delta x \cdot (1/\Delta b) = \Delta x \cdot \Delta(1/b) = \Delta(\Delta x \cdot 1/b) \rightarrow \Delta x \cdot 1/b = \Delta 1$ , т.е.  $\Delta x = \Delta 1 \cdot b = \Delta b$  для  $b \in \mathbf{N}_1$ , т.е.  $1/1/\Delta b = \Delta b$ .

$$\text{7). Для любых } \Delta a, \Delta b \in \Delta_0 \text{ и } \Delta c \in \Delta_0 \setminus \{\Delta 0, \mathbf{N}_2\}$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta c} + \frac{\Delta b}{\Delta c} = \frac{a + b}{c}.$$

**Примечание 13.** а).  $\Delta a/\Delta c + \Delta b/\Delta c = \{a/c; \Delta(a/c)\} + \{b/c; \Delta(b/c)\} = (a + b)/c$ , т.к.  $\Delta(a/c) + \Delta(b/c) = a/c + b/c$ .

Если  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$ , а  $c \in \mathbf{R}$ , то  $\Delta a/c + \Delta b/c = (a + b)/c$  только при  $c \neq \mathbf{N}_2$ , т.к.  $\Delta a/c + \Delta b/c = \Delta(a/c) + \Delta(b/c) = (a + b)/c$ . Аналогично, если  $a, b \in \mathbf{R}$ , а  $\Delta c \in \Delta_0 \setminus \{\Delta 0, \mathbf{N}_2\}$ , то  $\Delta a/c + \Delta b/c = (a + b)/c$ .

8). Для любого  $a \in \mathbf{R}_0$  справедливо равенство  $-a = (-1) \cdot a$ .

9). Для любых  $a, b \in \mathbf{R}_0$  выполняется равенство  $-(a \cdot b) = (-a \cdot b)$ .

**Примечание 14.** Пусть  $\Delta a, \Delta b \in \Delta_0$ . Тогда  $-(\Delta a \cdot \Delta b) = -(\Delta(\Delta a \cdot b)) = \Delta(-(\Delta a) \cdot b)$ ,  $-(\Delta a) \cdot \Delta b = \Delta(-a) \cdot \Delta b = \Delta(\Delta(-a) \cdot b) = \Delta(-(\Delta a) \cdot b)$ .

10). Для  $a, b, c \in \mathbf{R}_0$  выполняются все аксиомы порядка и следствия из них, сформулированные для  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

11). Принцип непрерывности Дедекинда. Пусть множество  $\mathbf{R}_0$  разделено на два класса  $K_1$  и  $K_2$  так, что: а) классы  $K_1$  и  $K_2$  не пусты; б) каждое число  $a \in \mathbf{R}_0$  относится только к одному классу; в) из условия  $a \in K_1$  и  $b < a$  следует, что  $b \in K_1$ . Тогда существует единственное число  $s \in \mathbf{R}_0$  такое, что все числа  $a \in \mathbf{R}_0$ , удовлетворяющие неравенству  $a = a' < s$ , принадлежат  $K_1$ , а все числа удовлетворяющие неравенству  $a = a'' > s$ , принадлежат классу  $K_2$ . Число  $s$  называется сечением множества  $\mathbf{R}_0$ .

**Примечание 15.** В целом множество  $\mathbf{R}_0$  обладает алгебраической структурой поля (коммутативного тела) с поправкой на специфику аксиом.

**Примечание 16.** В заключение заметим, что ряд предложений, отнесённых к аксиомам и следствиям из них, доказаны из соответствующих определений и других аксиом.

## § 2.4 Возведение в степень $\Delta$ -чисел

Нетрудно установить закономерности при реализации возведения в степень. Рассмотрим простейший случай, когда  $a$  и  $b$  — целые положи-

тельные числа. Тогда  $a^{-b}$  – дробное,  $a^{\Delta b}$  – отрицательное число и т.д., т.е. результат возведения в степень является числом на класс выше, чем показатель степени. Более подробную информацию можно получить, анализируя ситуации с различными классами чисел  $a$  и  $b$ :

$$\text{а). } b \in \mathbf{N}_2 \quad (\Delta a)^b = \begin{cases} \Delta(a^b), & a \in \mathbf{N}_2 \\ a^b, & a \in \mathbf{N}_1 \end{cases}, \quad b \in \mathbf{N}_1 \quad (\Delta a)^b = \Delta(a^b),$$

$$\text{т.е. } (\Delta a)^b = \Delta(a^b),$$

Кроме случая, когда  $a \in \mathbf{N}_1$  и  $b \in \mathbf{N}_2$ . Тогда  $(\Delta a)^b = a^b$ .

$$\text{б). } (\Delta a)^{-b} = \begin{cases} a^{-b}, & \text{если } (a, b) \in \mathbf{N}_2 \\ \left\{ \frac{1}{a^b}, \Delta\left(\frac{1}{a^b}\right) \right\} \end{cases}$$

Для отрицательных чисел ( $a < 0$ ) справедливы равенства:

$$(-a)^{-b} = (-1)^b \cdot a = \begin{cases} a^{-b}, & b \in \mathbf{N}_2 \\ -(a)^{-b}, & b \in \mathbf{N}_1 \end{cases};$$

$$(-a)^{\Delta b} = (-1) \cdot a^b \in \mathbf{R};$$

$$(-a)^{\Delta b} = (-1)^b \cdot a^b, \quad a^b \in \mathbf{N}_2 \text{ и т.д.}$$

Не останавливаясь на исследовании различных случаев<sup>10</sup>, связанных с возведением в степень чисел, сделаем такой вывод: *отрицательное число в степени  $\Delta$ -числа – это действительное число, а положительное в степени  $\Delta$ -числа – это отрицательное число* (по аналогии  $(:a)^{-b} = a^b \in \mathbf{Z}$ , а  $a^{-b} = (:a^b) \in \mathbf{R}_f$ , т.е. результат дробное число, если  $(a, b) \in \mathbf{Z}$ ).

Полное исследование расширения поля действительных чисел выходит за рамки настоящей книги. Однако, приведенная выше аксиоматика

<sup>10</sup> Такое исследование предоставляем читателю проделать самостоятельно: оно не-сложно и достаточно увлекательно, так как содержит ряд интересных выводов и парадоксальных результатов (последние возникают в случае нарушения правил умножения  $\Delta$  – чисел и неаккуратного обращения с ними).

$\Delta$ -чисел и их свойства позволяют сформировать представление об этом расширении.

Ограничимся двумя небольшими примерами, которые помогут, в какой-то степени, понять реальность  $\Delta$ -чисел.

**Пример 1.** Найти корни уравнения

$$9 \cdot 8^x - 18 \cdot 4^x - 2 \cdot 2^x + 4 = 0, \quad (1)$$

если  $x \in \mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \cup \mathbf{R}_\Delta$ .

**Решение.** а). Пусть  $x \in \mathbf{R}$ , т.е.  $x$  — действительное число. Тогда  $x = \{-1,0849626; 1\}$ .

б). Пусть  $x \in \mathbf{R}_\Delta$ , т.е.  $x$  —  $\Delta$ -число. Тогда, обозначив  $y = 2^x$  ( $y < 0$ , т.к.  $x \in \mathbf{R}_\Delta$ ), из (1) получим

$$9 \cdot y^3 + 18 \cdot y^2 - 2 \cdot y + 4 = 0, \quad (2)$$

Действительно, если  $x \in \mathbf{R}_\Delta$ , то  $4^x = 2^{2x} = (-2^{x \cdot 2}) = -(2^x)^2 = -y^2$ ,  $8^x = 2^{3x} = 2^{x \cdot 3} = y^3$ .

Решая уравнение (2), найдём  $y = -2,1936608$  (корень  $y = 0,0968304 \pm 0,4397678 \cdot i$  не удовлетворяет условию  $y < 0$ ). Откуда,  $x = \log_2(-1) + \log_2 2,1936608 = \Delta 0 + 1,1333404 = \Delta 1,1333404$ .

Итак,  $x = \{-1,0849626; 1; \Delta 1,1333404\}$ .

Проверкой легко убедиться, что все корни удовлетворяют уравнению (1).

**Пример 2а.**  $(-2)^3 = 2^{(\log_2(-2)) \cdot 3} = 2^{((\log_2(-1)) + 1) \cdot 3} = 2^{(\Delta 0 + 1) \cdot 3} = 2^{(\Delta 1) \cdot 3} = 2^{\Delta 3} = -8$ .

**Пример 2б.**  $\sqrt{4} = 4^{1/2} = 2^{2 \cdot (1/2)} = 2^{2//2} = 2^{\{\Delta 1, \circ 1\}} = 2^{\{\Delta 1, 1\}} = \{-2; 2\}$ , т.к.  $2^{\circ 1} \equiv 2$ , а  $2^{\Delta 1} = -2$ . (Заметим, что  $a^{b//c} = \sqrt[c]{a^b}$ , так как если  $\sqrt[c]{a^b} = x$ , то  $a^b = x^c \Rightarrow \log_a a^b = \log_a x^c \Rightarrow b = (\log_a x) \cdot c \Rightarrow \log_a x = b//c \Rightarrow x = a^{b//c}$ ; см. §5.2).

## § 2.5 Примеры доказательств в $\omega$ -символике

В настоящем параграфе рассмотрены примеры *некоторых* доказательств, проведенных в  $\omega$ -символике, т.е. доказательств лемм и теорем, связанных с  $\omega$ -отображениями операций и чисел. Следует заметить, что предлагаемый читателю пакет доказательств – это не полный цикл утверждений по данному вопросу. Более того, часть приведенных лемм не использованы в теоремах, что, естественно, создает поле для поиска и анализа, которые, в случае желания, может самостоятельно провести читатель.

Хотелось бы особо подчеркнуть, что *изначально*  $\Delta$ -числа получены из операции " $\circ$ " (операции *процесса* сложения): из  $x \circ a = -\infty$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) следует  $x = (-\infty)\Delta a \equiv \Delta a$  (по аналогии,  $0 - a = -a$  и  $1/a = 1:a = :a$ ). При этом наблюдается **рефлексивность** отображения чисел как при алгебраическом, так и при геометрическом выражении.

С другой стороны, множество  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел может быть получено за один акт  $\omega$ -отображения. Действительно, так как  $(:a) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log(:a) = (-\log a) \in \mathbf{R}_-$  при  $a > 1$  (число  $a$  не входит во множество  $\mathbf{R}_f$ ,  $a \notin \mathbf{R}_f$ ), то  $(-a) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log(-a) = (\Delta \log a) \in \mathbf{R}_\Delta$  ( $a \notin \mathbf{R}_-$ , число  $a$  не входит во множество  $\mathbf{R}_-$  отрицательных чисел). Таким образом, всё поле  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел может быть получено из множества  $\mathbf{R}_-$  отрицательных чисел за один акт отображения  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$ .

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \log -|a| = \lim_{|a| \rightarrow \infty} \Delta \log |a| = \Delta \infty,$$

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} \log -|a| = \lim_{|a| \rightarrow 0} \Delta \log |a| = \Delta(-\infty) = -\infty,$$

а). Если  $|a| > 1$ , то  $\omega$ -образ числа  $-|a|$ , попадает в интервал  $]\Delta 0; \Delta \infty[$   $(-1 \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log(-1) = \Delta 0, \quad -|a| \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log(-|a|) = \Delta \log |a| \in ]\Delta 0; \Delta \infty[)$ , т.е.  $\lim_{|a| \rightarrow \infty} \log(-|a|) = \Delta \infty,$

$$\lim_{|a| \rightarrow 1} \log(-|a|) = \Delta 0.$$



б). Если  $0 < |a| < 1$ , то результат  $\omega$ -отображения  $\Delta \log |a| \in ]-\infty; \Delta 0[$ , т.е.

$$-(\log |b|) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log(-(\log |b|)) = \Delta \log(\log |b|) = \Delta(-\log |b|),$$

где  $|b| = \frac{1}{|a|}$ ,  $|b| > 1$ , а  $\lim_{|b| \rightarrow \infty} \Delta(-\log |b|) = \Delta(-\infty) \equiv -\infty$

и  $\lim_{|b| \rightarrow 1} \Delta(-\log |b|) = \Delta(-0) \equiv \Delta 0$ .

В этом случае, рефлексивность отображения нарушается, а модернизированная числовая ось выглядит так:

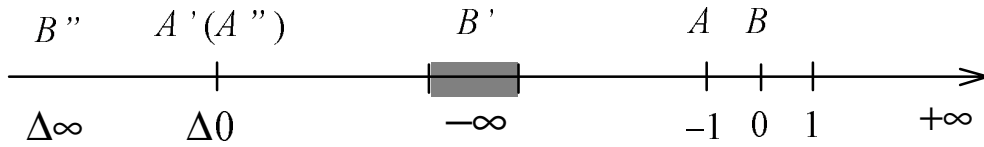


Рис. 1. Изображение модернизированной числовой оси с указанием граничных точек  $\omega$ -отображения  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$ . Отрезок  $|AB|$  отображается при  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$  в интервал  $A'B'$ , а интервал  $AB'$  — в интервал  $A''B''$ .

**Лемма 2.1.** Отображение множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_0$ <sup>11</sup> является биекцией при  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ .

**Доказательство.** Пусть любой элемент (прообраз или оригинал)  $a' \in \mathbf{R}$  и  $a' \in \omega_i$ , отображается в  $a \left( a' \setminus \omega_i \xrightarrow{\varphi} \omega_0 \setminus a \right)$ , при  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus$ , т.е. трансформируется в образ  $a = \text{Im } \varphi = \{ \varphi(a') | a' \in \omega_i \}$ . В нашем случае,  $\{a'\} \xrightarrow{\varphi} \left\{ \left( i + \text{slog}_k^x a' \right) * k \right\}$ . Согласно определению функции  $y = \text{slog}_k^x$  каждому

<sup>11</sup> Под  $\omega_i$  и  $\omega_0$  подразумеваем только компоненты этих пространств в виде множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел, т.е.  $\omega_i \equiv \{a', a' \in R\}$  и множества

$$\omega_0 \equiv \left\{ \left( i + \text{slog}_k^x a' \right) * k, i \in \mathbf{Z}, k > 0, k \neq 1 \right\}.$$

значению  $x > 0$  соответствует единственное значение  $y \in R$ , а при  $x < 0$  – единственное значение  $y \in \Delta_0$  (при  $x = 0$ ,  $y = -\infty$ ), т.е. каждому значению  $a' \in \omega_i$  сопоставляется один элемент  $a = \left( (i + \text{slog}_k^{a'}) * k \right) \in \omega_0$  или  $a = \varphi(a') \in \omega_0$ . И, наоборот, каждому значению  $y \in R_0$  соответствует единственное значение  $x$ , равное  $x = {}^y k = k^{k^{\dots^k}} \left. \vphantom{x} \right\} y$ , по определению суперпоказатель-

ной функции. Более того, отображение  $\varphi$  и обратное ему  $\varphi^{-1}$  непрерывны<sup>12</sup>, т.е. являются *гомеоморфными*. Гомеоморфизм отображения  $\varphi$  подтверждается рядом фактов. Например, для частного случая  $R \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus R^*$  получим: если  $a, b \in R$  и  $a \neq b$ , то  $a + b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a \cdot k^b = k^{a+b} \in R^*$ ,  $k \neq 1$ ;  $a \odot b = a^{\log k^b} \in R$   $a \cdot b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a \odot k^b = k^{a \cdot b} \in R^*$ , т.е. существует взаимно однозначное соответствие, при котором для любых  $a, b \in R$  и для их образов  $k^a, k^b \in R$  сумме  $(a + b)$  и произведению  $(a \cdot b)$  соответствуют единственные значения  $k^a \cdot k^b$  и  $k^a \odot k^b$  ( $\cdot, \odot$  – соответственно произведение и рефлексивное произведение). Это доказывает *изоморфизм*  $\varphi$ . Непрерывность функций  $k^x$  и  $\log_k^x$  доказывает гомеоморфизм  $\varphi$ .

С учетом вышеизложенного  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  являются *этиморфными*. Таким образом, данное отображение  $\varphi$  представляет собой *инъекцию* (так как из  $\varphi(a') = \varphi(a'')$  следует  $a' = a''$ ) и *сюръекцию*. Откуда заключаем, что  $\varphi$  – *биекция*.

**Следствие.** Так как  $\varphi$  – биекция, то для каждого  $a' \in \omega_i$  существует  $\varphi^{-1}(a')$ , где  $\varphi^{-1} \cdot \varphi = id_{\omega_i}$ ,  $id_{\omega_i}: a' \rightarrow a'$ .

$$\text{Из } \varphi^{-1}(a') = \{a' \in \omega_i \mid \varphi(a') = a\} \Rightarrow \varphi^{-1}(a') = \left( (\text{slog}_k^a - i) * k \right).$$

<sup>12</sup> Не следует путать непрерывность отображения и непрерывность функций. Естественно, что функции  $y = {}^x k$  и  $y = \text{slog}_k x$  в классическом их определении разрывны, так как  $x \in \mathbf{Z}$ .

**Теорема 2.1.** Система математических объектов  $O = \langle O \in R_+, \bullet, \odot, k \rangle$ , сформированная в результате отображения  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  на множестве  $R_+$  образует поле при любом  $k > 0, k \neq 1$ .

**Доказательство.** Пусть объекты  $a, b \in R_+$ . Из теоремы 1.1 следует, что операция " $\odot$ " альтернативна, коммутативна и ассоциативна. Докажем дистрибутивность операции " $\odot$ " относительно обыкновенного умножения (" $\bullet$ "):  $a \odot (b \cdot c) = a^{\log k^{(b \cdot c)}} = a^{\log k^b \cdot \log k^c} = (a^{\log k^b}) \cdot (a^{\log k^c}) = (a \odot b) \cdot (a \odot c)$ . С другой стороны,  $(b \cdot c) \odot a = (b \cdot c)^{\log k^a} = b^{\log k^a} \cdot c^{\log k^a} = (b \odot a) \cdot (c \odot a) = (a \odot b) \cdot (a \odot c)$ .

Нейтральный элемент (единица) системы  $O$  равен  $k$ :  $a \odot k = a^{\log k^k} = a$ . Обратный элемент  $a^{-1}$  равен  $k^{\log k^a / a}$  ( $a^{-1} = k \Delta a$ ). Действительно,

$$a^{-1} \odot a = k^{1/\log k^a} \odot a = \left(k^{1/\log k^a}\right)^{\log k^a} = k. \text{ Система } O \text{ является группой,}$$

так как определена бинарная операция  $(\cdot, \odot)$ , которая каждой паре объектов  $a, b \in O$  ставит в соответствие некоторый результат операции:  $a \cdot b, a \odot b = a^{\log k^b}$ . При этом выполняются все требования, предъявляемые к группе:

$$a \cdot b \in O, \quad a \odot b = a^{\log k^b} \in O, \quad \text{т.е.} \quad O - \text{замкнута} \quad (a > 0, b > 0 \Rightarrow \Rightarrow a^{\log k^b} > 0); \quad O - \text{ассоциативна} \quad (a \odot (b \odot c) = a \odot (b^{\log k^c}) = = a^{\log k^{c \cdot \log k^b}} = (a^{\log k^b})^{\log k^c} = (a \odot b) \odot c); \quad O \text{ содержит левую и правую}$$

единицу для каждого  $a$  из  $O$  ( $k \odot a = k^{\log k^a} = a = a \odot k$ ); для всех  $a \in O$

в  $O$  существует левый и правый обратный элемент  $a^{-1} \odot a = k$  и  $a \odot a^{-1} = k$ ,

$$\text{так как} \quad a^{-1} \odot a = \left(k^{1/\log k^a}\right) \odot a = \left(k^{1/\log k^a}\right)^{\log k^a} = k, \quad \text{а также}$$

$$a \odot a^{-1} = a \odot \left(k^{1/\log k^a}\right) = a^{1/\log k^a} = k.$$

Из теоремы 1.1 следует, что  $O$  — коммутативна.

Группа  $O$  является коммутативной, аддитивной с дистрибутивной операцией " $\odot$ ". Группа  $O$  аддитивна, так как определена операция  $(\cdot)$ , которая является образом операции  $(+)$  при отображении  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$ , т.е.  $O$  — кольцо, причём, ассоциативно-коммутативное в силу того, что образом умножения в кольце  $O$  является операция " $\odot$ ", которая ассоциативна и коммутативна.

С учетом вышеизложенного и леммы 2.1 система  $\mathbf{O}$  — мультипликативная группа (кольцо с исключенным нулем, равным в нашем случае 1, так как  $a \odot 1 = a^{\log k^1} = 1$ ).

**Примечание 1.** Делители нуля не существуют. Действительно, для любых элементов  $x, y \in R_+$  и  $x \neq 1, y \neq 1$   $x \odot y \neq 1$  ("1" играет роль нуля в случае операции " $\odot$ ").

Множество всех ненулевых элементов кольца будет *группоидом* относительно операции " $\odot$ ". Причем кольцо будет *телом*, так как множество его ненулевых элементов образует группу относительно " $\odot$ ".

Система  $\mathbf{O}$  — *поле* (ассоциативно-коммутативное кольцо с единичным элементом  $k$ , элементом  $a^{-1}$  и исключенным нулем).

**Примечание 2.** Множество  $R_+$  положительных чисел содержит в себе ряд классов по  $\omega$ -отображениям, в которые входят такие глобальные группы как дробные числа  $(R_f)$  и инфинитный спектр классов иррациональных чисел  $(R_i^j)$ .

**Следствие.** Результаты отображения  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus$  множества положительных  $(R_+)$  составляет *подгруппу*  $A$  группы  $R_+$  относительно операции " $\odot$ ".

**Доказательство.** Операция " $\odot$ " определена на множестве  $R_+$ . Пусть  $a, b, c, d \in R_+, k > 0, k \neq 1$ . Тогда  $a \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \left( (i + \log_k^a) * k \right) \in A$ ,  $b \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \left( (i + \log_k^b) * k \right) \in A$ ,  $R_+ \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus A$ ,  $(a \odot b) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus P = \left( (i + \log_k^a) * k \right) \odot \left( (i + \log_k^b) * k \right) = \left( (i + \log_k^c) * k \right) \in A$ , что доказывает *замкнутость* системы  $A$ . (" $\odot$ " — образ операции " $\odot$ " при отображении  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus$ ). Найдем  $C$ :  $\left( \log_k^P - i \right) * k = C \in R_+$  (при  $\log_k^a$ ,

$\log_k^b \in R_+$ ). Для любого  $a' \in A$  обратный элемент  $|a'|^{-1} \in A$  ( $|a'|^{-1} = k^{1/\log_k a'} \in A$ ). Приравняем  $k^{1/\log_k a} = \left( i + \log_k^d \right) * k$ . Откуда

$d = \left( \log_k \left( k^{1/\log_k a} \right) - i \right) * k$ . Заметим, что все математические выкладки про-

изводим в  $R_+, i \in \mathbf{Z}$ . Итак,  $A \subseteq R_+$ ;  $A$  — группа относительно " $\odot$ "; для любых

$a, b \in A$   $a \odot b \in A$ ; для всех  $a' \in A$  имеется  $(a')^{-1} \in A$ , т.е.  $A$  — *подгруппа* группы  $R_+$ . Фактически,  $A$  состоит из всех элементов  $R_+$  но трансформированных

по известному закону:  $a \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \left( (i + \log_k^a) * k \right)$  с учётом того, что в классическом определении функции  $y = \log_k x$ ,  $x \in \mathbf{Z}$ , а, значит,  $a \in \mathbf{Z}$ . Причем, каждому индексу “ $i$ ” соответствует единственное значение “ $k$ ”, т.е. существует ряд подгрупп, вложенных и заполняемых множеств  $R_+$ :  $A_1 \subseteq R_+$ ,  $A_2 \subseteq R_+$ , ..., где  $1, 2, \dots$  — индекс, равный  $i$ . Расширение области определения функции  $y = \log_k x$  до  $x \in \mathbf{R}$  ведёт к *полному* заполнению множества  $R_+$  указанным рядом подгрупп.

Таким образом, множество  $R_+$  может быть представлено любым множеством  $A_i$ . Последние (множества  $A_i$ ) можно рассматривать как трансформированные виды  $R_+$ , т.е.  $\omega$ -отображение позволяет из одного элемента (в данном случае множества  $R_+$ ) получить инфинитный спектр трансформированных элементов, идентифицированных с первым (т.е. прообразом).

**Лемма 2.2.** Операция “ $\odot$ ” коммутативна на множестве  $\mathbf{R}$  — отрицательных чисел.

**Доказательство.** Пусть  $a, b \in R_-$ ,  $k \neq 1$ . Тогда  $(-|a|) \odot (-|b|) = (-|a|)^{\log_k(-|b|)} = (-|a|)^{\Delta \log_k |b|} = -\left( (-|a|)^{\log_k |b|} \right)$ ;  $(-|b|) \odot (-|a|) = -\left( (-|b|)^{\log_k |a|} \right)$ . После логарифмирования этих выражений получим:

$$A = \log_k \left( -\left( (-|a|)^{\log_k |b|} \right) \right) = \Delta \log_k (-|a|)^{\log_k |b|} = \Delta (\log_k (-|a|) \times \log_k |b|) = \Delta (\Delta \log_k |a| \cdot \log_k |b|);$$

$$B = \log_k \left( -\left( (-|b|)^{\log_k |a|} \right) \right) = \Delta \left( \log_k (-|b|)^{\log_k |a|} \right) = \Delta (\Delta \log_k |b| \times \log_k |a|).$$

Если  $\log_k^b, \log_k^a \in N_2$ , то при  $k > 0$   $A = B = \Delta (\log_k^{|a|} \cdot \log_k^{|b|})$  и  $(-|a|) \odot (-|b|) = (-|b|) \odot (-|a|)$ . Если  $\log_k^{|b|}, \log_k^{|a|} \in N_1$ , то  $A = B = \log_k^{|a|} \times \log_k^{|b|}$ .

Если  $\log_{|k|}|b|$  и  $\log_{|k|}|a|$  одновременно не принадлежат множеству  $N_2$  или множеству  $N_1$ , то операция " $\odot$ " коммутативна при  $k < 0$ .

$$\text{Действительно, } \Delta \log_k^{|a|} = \Delta \frac{1}{\log_{|a|}^k} = \Delta \left( \frac{1}{\Delta \log_{|a|}|k|} \right) = \frac{1}{\log_{|a|}|k|},$$

$$\Delta \log_k^{|b|} = \frac{1}{\log_{|b|}|k|}.$$

Подставляя эти значения в  $A$  и  $B$ , найдем:

$$\begin{aligned} A &= \Delta \left( \frac{1}{\log_{|a|}|k|} \cdot \log_k^{|b|} \right) = \Delta \left( \log_{|k|}|a| \cdot \left( \Delta \frac{1}{\log_{|b|}|k|} \right) \right) = \\ &= \Delta \left( \Delta \left( \log_{|k|}|a| \cdot \log_{|k|}|b| \right) \right) = \log_{|k|}|a| \cdot \log_{|k|}|b|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, } B &= \Delta \left( \frac{1}{\log_{|b|}|k|} \cdot \log_k^{|a|} \right) = \Delta \left( \frac{1}{\log_{|b|}|k|} \times \right. \\ &\times \left. \left( \Delta \frac{1}{\log_{|a|}|k|} \right) \right) = \log_{|k|}|b| \cdot \log_{|k|}|a|, \quad \text{т.е.} \quad A = B \quad \text{и} \quad (-|a|) \odot (-|b|) = \\ &= (-|b|) \odot (-|a|), \quad \text{что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

С учетом теорем 1.1 и 1.2 можно сделать вывод, что операция " $\odot$ " коммутативна на всем множестве  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

Хотя теоремы 1.1, 1.2 и лемма 2.2 доказывают коммутативность операции " $\odot$ " на  $\mathbf{R}$ , покажем коммутативность этой операции на множестве дробных чисел, так как они образуют самостоятельный  $\omega$ -класс чисел. Пусть  $a, b \in \mathbf{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (:a) \odot (:b) &= \left( \frac{1}{a} \right)^{\log_k \left( \frac{1}{b} \right)} = \left( a^{-1} \right)^{-(\log_k b)} = a^{\log_k b} = a \odot b, \\ (:b) \odot (:a) &= b \odot a = a \odot b, \quad \text{что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

**Лемма 2.3.** Операция " $\odot$ " ассоциативна на множестве  $R_-$  отрицательных чисел.

**Доказательство.** а). Пусть  $(a, b, c) \in R_-$ ,  $\log_k^{|c|} \in N_2$ ,  $k \neq 1$ ,  $k > 0$ .

Тогда 
$$A = ((-|a|) \odot (-|b|)) \odot (-|c|) = \left( (-|a|)^{\Delta \log_k |b|} \right) \odot (-|c|) = (-|a|)^{(\Delta \log_k |b|) \times (\Delta \log_k |c|)} = (-|a|)^{\Delta((\Delta \log_k |b|) \cdot \log_k |c|)} = (-|a|)^{\Delta((\log_k |b|) \cdot \log_k |c|)}.$$

С другой стороны, 
$$B = (-|a|) \odot ((-|b|) \odot (-|c|)) = (-|a|) \odot \left( (-|b|)^{\Delta \log_k |c|} \right) = (-|a|)^{(\Delta \log_k |b|) \cdot (\Delta \log_k |c|)} = (-|a|)^{\Delta((\Delta \log_k |b|) \cdot \log_k |c|)} = (-|a|)^{\Delta(\log_k |b| \cdot \log_k |c|)},$$
  
т.е.  $A = B$ .

б). Пусть  $\log_k^{|c|} \notin N_1$ . Тогда

$$A = (-|a|)^{\Delta((\Delta \log_k |b|) \cdot \log_k |c|)} = (-|a|)^{\log_k |b| \cdot \log_k |c|}$$

$$B = (-|a|)^{\log_k |b| \cdot \log_k |c|}, \text{ т.е. } A = B, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Теоремы 1.1, 2.1 и лемма 2.3 позволяют сделать вывод, что операция " $\odot$ " ассоциативна на всем поле  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

**Примечание.** Для дробных чисел ассоциативность операции " $\odot$ " очевидна. Действительно,

$$\left( \frac{1}{a} \odot \frac{1}{b} \right) \odot \frac{1}{c} = a^{-(\log_k b \cdot \log_k c)};$$

$$\frac{1}{a} \odot \left( \frac{1}{b} \odot \frac{1}{c} \right) = a^{-1} \odot b^{\log_k c} = a^{-(\log_k b \cdot \log_k c)}.$$

**Лемма 2.4.** Операция " $\odot$ " на множестве  $\mathbf{R}_-$  отрицательных чисел имеет левую и правую единицу, а также левый и правый обратный элемент  $a^{-1}$ .

**Доказательство.** а). Так как  $k \odot (-|a|) = k^{\log_k (-|a|)} = k^{\Delta \log_k |a|} = -\left( k^{\log_k |a|} \right) = -|a|$  для любого  $k \neq 1$ .

$$(-|a|) \odot k = (-|a|)^{\log k} k^k = -|a|,$$

т.е.  $k$  — левая и правая единица.

б). Докажем существование *левого* обратного элемента  $a^{-1}$ . В качестве его выберем  $k^{1/\log k(-|a|)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} k^{1/\log k(-|a|)} &= k^{\Delta(1/\log k|a|)} \text{ и } x = a^{-1} \odot a = (-|a|)^{-1} \odot (-|a|) = \\ &= k^{\Delta(1/\log k|a|)} \odot (-|a|) = k^{\Delta(1/\log k|a|) \cdot \log k(-|a|)} = \\ &= k^{\Delta(1/\log k|a|) \cdot (\Delta \log k|a|)} = k^{\Delta((\Delta(1/\log k|a|)) \cdot \log k|a|)}. \end{aligned}$$

Если  $\log_k |a| \in N_1$ , то  $x = k^{\Delta(\Delta(1/\log k|a|) \log k|a|)} = k$ , что и требовалось доказать. Если  $\log_k |a| \notin N_1$ , то  $(-|a|)^{-1} = -k^{1/\log k(-|a|)} = -k^{\Delta(1/\log k|a|)}$ .

Полагая  $k < 0$ , найдем  $|k|^{1/\log k|a|} = |k|^{\Delta(\Delta(\log |a|k|))} = |k|^{1/\log |k|a|}$  и  $x = a^{-1} \odot a =$   
 $= |k|^{1/\log |k|a|} \odot (-|a|) = |k|^{\left(\left(1/\log |k|a|\right) \Delta \log k|a|\right)} = -|k|^{\left(\left(\log |a|k|\right) \left(1/\log |a|k|\right)\right)} = k,$   
 что и требовалось доказать.

в). Докажем равенство  $(-|a|) \odot (-|a|)^{-1} = k$ , т.е. существование *правого* обратного элемента:

$$\begin{aligned} (-|a|) \odot (-|a|)^{-1} &= (-|a|) \odot k^{1/\log k(-|a|)} = (-|a|)^{\log k} k^{1/\log k(-|a|)} = \\ &= (-|a|)^{1/\log k(-|a|)} = (-|a|)^{\Delta(1/\log k|a|)} = -\left((-|a|)^{1/\log k|a|}\right). \end{aligned}$$

Пусть  $x = -(-|a|)^{1/\log k|a|}$ . Тогда

$$\log_k^x = \log_k \left( -(-|a|)^{1/\log k|a|} \right) = \Delta \log_k (-|a|)^{1/\log k|a|} = \Delta (\log_k (-|a|) \times$$



$$\times \frac{1}{\log_k |a|} \Big) = \Delta \left( \frac{\Delta \log_k |a|}{\log_k |a|} \right) = \frac{\log_k |a|}{\log_k |a|} = 1, \text{ если } \log_{|a|}^k \in N_1 \text{ при } k > 0. \text{ В}$$

этом случае  $x = k$ , что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned} \text{Если } \log_{|a|}^k \notin N_1, \text{ то } k < 0 \text{ и } \log_k^x &= \Delta \left( \frac{1}{\log_{|a|} |k|} \cdot (\Delta \log_{|a|} |k|) \right) = \\ &= \Delta \left( \Delta \frac{\log_{|a|} |k|}{\log_{|a|} |k|} \right) = 1, \text{ т.е. } x = k, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим соответствующие операции на множестве  $R_f$  ( $a, k \in R_+$ ):

$$\begin{aligned} k \odot (:a) &= k^{\log_k (:a)} = (:a); \quad (:a) \odot k = (:a)^{\log_k k} = (:a). \\ (:a)^{-1} \odot (:a) &= k^{1/\log_k (:a)} \odot (:a) = k^{-(1/\log_k a) \cdot \log_k a^{-1}} = k; \\ (:a) \odot (:a)^{-1} &= (:a) \odot k^{1/\log_k (:a)} = (a^{-1})^{\log_k k^{-(1/\log_k a)}} = \\ &= a^{1/\log_k a} = k. \end{aligned}$$

Итак, операция " $\odot$ " имеет левую и правую единицы, а также левый и правый обратный элемент  $a^{-1}$  на всем множестве  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

**Лемма 2.5.** Операция " $\odot$ " дистрибутивна относительно умножения на множестве  $R_-$  отрицательных чисел.

**Доказательство.** Пусть  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ . Тогда  $A = (-|a|) \odot ((-|b|) \cdot (-|c|)) = (-|a|)^{\log_k ((-|b|) \cdot (-|c|))} = (-|a|)^{\log_k (-|b|)} \cdot (-|a|)^{\log_k (-|c|)} = ((-|a|) \odot (-|b|)) \times ((-|a|) \odot (-|c|))$ ; С другой стороны,  $A^* = ((-|b|) \cdot (-|c|)) \odot (-|a|) = ((-|b|) \cdot (-|c|))^{\log_k (-|a|)} = (-|b|)^{\log_k (-|a|)} \cdot (-|c|)^{\log_k (-|a|)} = ((-|b|) \odot (-|a|)) \times ((-|c|) \odot (-|a|))$ . В силу леммы 2.3  $A^* = ((-|a|) \odot (-|b|)) \cdot ((-|a|) \odot (-|c|))$ , что и требовалось доказать, т.е.  $A = A^*$ . Опуская доказательство дистрибутивности

операции " $\odot$ " на множестве  $R_f$  дробных чисел, из теоремы 2.1 и леммы 2.5 заключаем, что операция " $\odot$ " дистрибутивна на всем множестве  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

**Лемма 2.6.** Система  $O = \langle O \in R_-, \bullet, \odot, k, k \neq 1 \rangle$ , сформированная на множестве  $R_-$  отрицательных чисел путем отображения  $\omega_i \rightarrow \omega_0$ , замкнута.

**Доказательство.** Докажем замкнутость системы  $O$ . Пусть  $k > 0$ . Тогда

$$A = (-|a|) \odot (-|b|) = (-|a|)^{\log_k(-|b|)} = (-|a|)^{\Delta \log_k |b|} = - \left( (-|a|)^{\log_k |b|} \right).$$

При  $\left\{ \log_k^{|a|}, \log_k^{|b|} \right\} \in N_2$  система замкнута, так как  $A \in R_-$ . В силу коммутативности

$$A \text{ можно записать } (-|a|) \odot (-|b|) = - \left( (-|b|)^{\log_k |a|} \right). \text{ При}$$

$$\log_k^{|a|} \in N_2 \quad A \in R_- . \quad \text{В случае, если } k < 0, \text{ то } \log_k^{|a|} = \frac{1}{\Delta \log_{|a|} |k|} =$$

$$= \Delta \left( \frac{1}{\log_{|a|} |k|} \right), \quad \log_k^{|b|} = \Delta \left( \frac{1}{\log_{|b|} |k|} \right), \text{ т.е. } A = - \left( (-|a|)^{\Delta \left( 1 / \log_{|b|} |k| \right)} \right) =$$

$$= - \left( (-|b|)^{\Delta \left( 1 / \log_{|a|} |k| \right)} \right) = (-|a|)^{\log_k |b|} = (-|b|)^{\log_k |a|}. \quad \text{При}$$

$\left\{ \log_{|k|}^{|a|}, \log_{|k|}^{|b|} \right\} \in N_1$  система замкнута. Нетрудно доказать, что случай

$\left\{ \log_k^{|a|} \in N_2, \log_k^{|b|} \in N_1 \right\}$  может быть исключен из рассмотрения. Действительно,

$$\log_k^{|a|} = n_2 \in N_2, \quad \log_k^{|b|} = n_1 \in N_1, \text{ т.е. } |a| = k^{n_2} \text{ и } |b| = k^{n_1}.$$

Пусть  $k < 0$ . Тогда  $|a|$  — существует, так как  $k^{n_2} > 0$ , а  $|b|$  — не существует.

Выбор  $k$  произволен ( $k \in \mathbf{R}$ ), т.е. последний случай должен быть исключен из рассмотрения.

Итак, система  $O$  — замкнута.

**Теорема 2.2.** Система  $O = \langle o \in \mathbf{R}, \cdot, \odot, k, k \neq 1, \log_k |o| \in \mathbf{Z} \rangle$ , сформированная в результате отображения  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел, образует поле.

Не останавливаясь на доказательстве теоремы 2.2, заметим, что согласно леммам 2-6 и теореме 2.1 система  $O$  — ассоциативна, коммутативна и дистрибутивна относительно рефлексивного умножения  $(\odot)$ , имеет левую и правую единицу, левый и правый обратный элемент. При исключении нуля, равного, в нашем случае, 1 ( $a \odot 1 = a^{\log_k 1} = 1$ ), получим систему  $O$ , являющуюся полем.

Таким образом, непосредственно из лемм 2-6 и теорем 2,2 следует, что на всем множестве  $\mathbf{R}$  действительных чисел система  $O$  является полем.

**Следствие.** Упорядоченная пара  $(O^*, \rho)$ , где  $O^*$  — непустое множество, полученное отображением  $\mathbf{R} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus O^*$ , а  $\rho$  — отношение " $\odot$ " на поле  $\mathbf{R}$ , является упорядоченным множеством.

Действительно, в случае исключения из множества  $O$  операций  $(\bullet)$  и  $(\odot)$ , получим непустое множество значений результатов  $\omega$ -отображений на себя всего множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел, причем из  $a \rightarrow a'$  следует  $a' \rightarrow a$ .

Операция " $\odot$ " рефлексивна ( $(a, a) \in \rho$  для любого  $a \in \mathbf{R}$  и  $a \rho a \equiv (a \odot a) \in \mathbf{R}$ ); антисимметрична, так как если  $(a, b) \in \rho$  и  $(b, a) \in \rho$ , то  $a = b$ , а если  $a \rho b$  и  $b \rho a$ , то  $a = b$ ; транзитивна, так как  $(a, b) \in \rho$  и  $(b, c) \in \rho$  следует  $(a, c) \in \rho$ , а если  $a \rho b$  и  $b \rho c$ , то  $a \rho c$ . Если  $a \odot b = a^{\log_k b}$  и  $b \odot c = b^{\log_k c}$ , то  $a \odot c = a^{\log_k c}$ , так как  $A = a^{\log_k b}$ ,  $B = b^{\log_k c}$ ,  $C = a^{\log_k c}$ ,  $\log_k A = (\log_k a) \cdot (\log_k b)$ ;  $\log_k B = (\log_k b) \cdot (\log_k c)$ .

$$\text{Откуда } \frac{\log_k B}{\log_k A} = \frac{\log_k c}{\log_k a} = x; \quad x = \log_A B$$

$$\log_k c = x \cdot \log_k a = \log_A B \cdot \log_k a$$

$$C = a^{\log_k c} = a^{(\log_k a) \cdot (\log_A B)} = p^{\log_A B} \in \mathbf{R} \quad (p = a^{\log_k a}),$$

если  $(a, b, c, k) \in \mathbf{R}$  и  $k \neq 1$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 2.3.** *Результатами отображения  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  полей  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел и  $\mathbf{R}_-$  — отрицательных чисел являются соответственно поля  $\mathbf{R}_-$  отрицательных чисел и  $R_f$  дробных чисел.*

**Доказательство.** Исключив из  $\omega_1$  все математические объекты, кроме  $\Delta$ -чисел и операций, заданных на этом поле, получим  $\omega_1 \equiv \{R_\Delta, +, \cdot, \dots\}$ . Реализуем изоморфное отображение  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  операций:

$$(+, \cdot) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus (\cdot, \odot).$$

$$\begin{aligned} \text{а). Пусть } (a, b, k) \in R_+, \quad k \neq 1, \quad (\log_k b, \log_k a) \in \mathbf{Z}. \text{ Тогда } \Delta a \setminus \omega_1 \rightarrow \\ \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta a} = -(k^a) \in R_-; \quad (\Delta a + \Delta b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta a + \Delta b} = k^{\Delta a} \cdot k^{\Delta b} = \\ = (-k^a) \cdot (-k^b) \in R_+; \quad \Delta a \cdot \Delta b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta a \cdot \Delta b} = (k^{\Delta a})^{\Delta b} = \\ = (-k^a)^{\Delta b} = -\left((-k^a)^b\right) = \begin{cases} -k^{a \cdot b} \in R_-, & b \in N_2, \\ k^{a \cdot b} \in R_+, & b \in N_1 \end{cases}, \text{ т.е. при отображении} \end{aligned}$$

$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$   $\Delta$ -числа трансформируются в отрицательные, причем, величина (модуль) их изменяется  $(|a| = a, |k^{\Delta a}| = k^a, \quad a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a)$ .

$$\text{Так как } \Delta a + \Delta b = (a + b) \in \mathbf{R}, \quad \Delta a \cdot \Delta b = \begin{cases} \Delta(a \cdot b) \in \mathbf{R}_\Delta, & b \in \mathbf{N}_2, \\ a \cdot b \in \mathbf{R}, & b \in \mathbf{N}_1 \end{cases},$$

то по аналогии (с учетом повышения ранга действий) запишем  $(-a') \cdot (-b') = a' \cdot b' > 0$ ,

$$\begin{aligned} ((a' \cdot b') \in R_+); \quad x = (-a') \odot (-b') = (-a')^{\log_k(-b')} = (-a')^{\Delta \log_k b'} = \\ = -(-a')^{\log_k b'} = \begin{cases} \log_k b' \in N_2, & x < 0 \quad (x \in R_-) \\ \log_k b' \in N_1, & x > 0 \quad (x \in R_+) \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, отображение операций  $\{+, \cdot\} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \{\cdot, \odot\}$  и  $\Delta$ -чисел в отрицательные числа  $(\Delta \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus R_-)$  логически обосновано правилом знаков и сжатием множеств значений результатов бинарных операций. Так ре-

зультат сложения  $\Delta$ -чисел является действительным числом, полученным рефлексивным отображением соответствующего его значения (геометрически - длины  $d = |\Delta a + \Delta b| = |a + b|$  отрезка прямой) относительно элемента  $(-\infty)$ . Произведение  $\Delta$ -чисел является  $\Delta$ -числом (если второй сомножитель - четное число), либо действительным числом (если второй сомножитель - нечетное число). Аналогично сложению  $\Delta$ -чисел произведение отрицательных чисел уже не отрицательное число, а положительное. Рефлексивное умножение " $\odot$ " отрицательных чисел является либо отрицательным числом (если второй "рефлексивный сомножитель"  $\log_k b'$  - четное число), либо положительным (если второй "рефлексивный сомножитель"  $\log_k b'$  - нечетное число).

б). Пусть  $k \neq 1$  и  $(a, b, k, \log_k b, \log_k a) \in \mathbf{Z}$ . Тогда  $(-a) \setminus \omega_1 \rightarrow \rightarrow \omega_0 \setminus k^{-a} = (:(k^a)) \in R_f$ ,  $((-a) + (-b)) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{-a-b} = (k^{-a}) \times (k^{-b}) = (:(k^a)) \cdot (:(k^b)) = (:(k^{a+b})) \in R_f$ ;  $(-a) \cdot (-b) \setminus \omega_1 \rightarrow \rightarrow \omega_0 \setminus k^{(-a)(-b)} = (:(k^a)) \cdot (:(k^b)) = \frac{1}{k^{a \cdot b}} \in R_f$ , т.е. при отображении  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0$  отрицательные числа отображаются в дробные. Теорема доказана.

**Примечание.** Заметим, что  $(-a) + (-b) = -(a + b) \in R_-$ ,  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b \in R_+$ ;  $(:a) \cdot (:b) = :(a \cdot b) \in R_f$ ,  $(:a) \odot (:b) = (:a)^{\log_k(b)} = a^{\log_k b} \notin R_f$ .

Вышеизложенное позволяет сделать вывод, что  $R_- \in \omega_1$ , а  $R_f \in \omega_0$  (при соответствующих исключениях).<sup>13</sup>

**Лемма 2.7.** Любое  $\omega$ -отображение чисел  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus$  изоморфно.

**Доказательство.** Из леммы 2.1 следует, что  $\omega$ -отображение  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus$  множества  $\mathbf{R}$  является биекцией. Лемма 2.7 обобщает ранее изложенные результаты исследования.

<sup>13</sup> Разумеется, теорема 2.3 может быть доказана проще и лаконичнее. Приведенное в тексте доказательство имело цели:

а) изложить некоторые факты о связях в объектах при отображении  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$ ;

б) проиллюстрировать возможность изучения  $\omega$ -отображения, используя простейшие объекты-числа,

в) обратить внимание на классификацию чисел при  $\omega$ -отображениях по родственным изоморфным группам (при этом автоматически реализуется логически обоснованный переход операций в строгом соответствии с их иерархией).

Пусть  $a' \in \omega_i$  и  $a' > 0$ . Тогда существует в  $\omega_0$  единственный образ  $a'$   $\left( a' \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \left( i + \text{slog}_{k_1} a' \right)^* k_1, k_1 \neq 1, k_1 > 0 \right)$ . И, наоборот: для каждого  $a' \in \omega_0$  существует единственный элемент  $x \in \omega_i$ , причем  $x \equiv \left( \text{slog}_{k_1} a' - i \right)^* k_1$ . Это следует из определения функции  $y = \text{slog}_k x$ . Аналогично, отображая любое число  $c'$  ( $c' > 0$ ) из  $\omega_j$  в  $\omega_0$ , получим единственный его образ  $\left( j + \text{slog}_{k_2} c' \right)^* k_2, k_2 \neq 1, k_2 > 0$ . Пусть  $\left( j + \text{slog}_{k_2} c' \right)^* k_2 = \left( i + \text{slog}_{k_1} a' \right)^* k_1$ . Откуда  $c' = \left( \left( \text{slog}_{k_2} \left( \left( i + \text{slog}_{k_1} a' \right)^* k_1 \right) \right) - j \right)^* k_2$ . Получили результат отображения числа  $a'$  из  $\omega_i$  в  $\omega_j$ :  $a' \setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus c'$ , где  $c'$  — образ числа  $a'$  в пространстве  $\omega_j$  ( $c' \in \omega_j$ ), причем, этот образ единственный в силу определения функции  $y = \text{slog}_k x$ .

Пусть  $a', b' \in \omega_i$ . Тогда их образы в  $\omega_j$  будут соответственно  $c'$  и  $d'$   $\left( \begin{matrix} \omega_i & \omega_i \\ a' \rightarrow c', & b' \rightarrow d' \\ \omega_j & \omega_j \end{matrix} \right)$ , а образы произведения  $p' = a' \cdot b'$  и рефлексивного произведения  $r' = a' \odot b'$  можно записать так:

$$p' \setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus \left( \left( \text{slog}_{k_2} \left( \left( i + \text{slog}_{k_1} (a' \cdot b') \right)^* k_1 \right) \right) - j \right)^* k_2,$$

$$r' \setminus \omega_i \rightarrow \omega_j \setminus \left( \left( \text{slog}_{k_2} \left( \left( i + \text{slog}_{k_1} (a' \odot b') \right)^* k_1 \right) \right) - j \right)^* k_2,$$

т.е. отображение  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_j$  изоморфно.

Это доказательство можно провести и на множестве  $\mathbf{R}$  — отрицательных чисел. При этом  $(c', d') \in \mathbf{R}_\Delta$ .

**Лемма 2.8.** Изоморфное отображение множества  $\mathbf{R}$  отрицательных чисел  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$  относительно элемента  $(-\infty)$  является биекцией при  $k > 0, k \neq 1$ .

**Доказательство.** Используя леммы 2.1, 2.7 отметим следующий факт: если каждому элементу  $a_i$  ( $a_i \in \mathbf{R}_-$ ) сопоставить один элемент  $b_i$  ( $b_i \in \mathbf{R}_\Delta$ ), то по

свойству единственности отображения  $(\mathbf{R}_- \rightarrow \mathbf{R}_\Delta)$  образ

$$\text{Im } \varphi = \varphi(R) = \{\varphi(a_i) \mid a_i \in \mathbf{R}\}, \quad \varphi(R) = \mathbf{R}_\Delta, \quad \text{так как } a_i \setminus \omega_{-1} \rightarrow \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k(-|a_i|) \in \mathbf{R}_\Delta, \text{ а } \mathbf{R}_\Delta \cap \mathbf{R}_- = \{-\infty\}.$$

Вышеизложенное свидетельствует, что указанное отображение сюръекция и инъекция (из  $\varphi(a) = \varphi(a')$  следует  $a = a'$ ), т.е. *биекция*<sup>14</sup>.

**Теорема 2.4.** Система  $\mathbf{O} = \langle o \in \mathbf{R}, \cdot, \odot, k \neq 1, \{o_1, o_2, \log_k a_1, \log_k a_2\} \in \mathbf{Z} \rangle$  является абелевой группой.

**Доказательство.** Согласно лемме 2.2 и лемме 2.4 система  $\mathbf{O}$  является коммутативной группой с левой и правой единицей, а также с левым и правым обратным элементом  $a^{-1}$ .

Для системы  $\mathbf{O}$  и операции " $\odot$ " справедлив закон сохранения :

$c \odot a = c^{\log_k a}$ ,  $c \odot b = c^{\log_k b}$ . Прологарифмируем полученные выражения и приравняем их:  $\log_k(c \odot a) = \log_k c \cdot \log_k a = \log_k c \cdot \log_k b$ . Откуда следует, что  $a = b$ . Аналогично,  $a \odot c = a^{\log_k c}$  и  $b \odot c = b^{\log_k c}$ , т.е. из  $\log_k a \cdot \log_k c = \log_k b \cdot \log_k c \Rightarrow a = b$ . Итак, из  $c \odot a = c \odot b \Rightarrow a = b$ ,  $a \odot c = b \odot c \Rightarrow a = b$ .

В группе  $\mathbf{O}$  однозначно определено правое и левое деление.

Наконец, из  $c \odot x = b$  или  $x \odot c = b$  следует единственное решение этих уравнений  $x = k^{\log_c b}$ .

Все вышеизложенное с учетом леммы 2.8 свидетельствует о том, что система  $\mathbf{O}$  является абелевой группой.

**Лемма 2.9.** Операция (+) альтернативна, коммутативна и ассоциативна на множестве  $\Delta$ -чисел.

Докажем альтернативность:

$$(\Delta a + \Delta b) + \Delta b = (a + b) + \Delta b = \Delta(a + 2 \cdot b),$$

$$\Delta a + (\Delta b + \Delta b) = \Delta a + 2 \cdot b = \Delta(a + 2 \cdot b), \text{ т.е.}$$

$(\Delta a + \Delta b) + \Delta b = \Delta a + (\Delta b + \Delta b)$ , что доказывает правую альтернативность;  $(\Delta a + \Delta a) + \Delta b = \Delta(2 \cdot a + b)$ ,  $\Delta a + (\Delta a + \Delta b) = \Delta(2 \cdot a + b)$ , т.е.

<sup>14</sup> Нетрудно доказать, что изоморфное отображение множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел относительно элемента  $(-\infty)$  является биекцией при  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ . Однако, это будет не  $\omega$ -отображение и доказательство основано на свойствах операции " $\odot$ ".

$(\Delta a + \Delta a) + \Delta b = \Delta a + (\Delta a + \Delta b)$ , что доказывает левую альтернативность. Операция  $(+)$  коммутативна, так как  $\Delta a + \Delta b = a + b$  и  $\Delta b + \Delta a = b + a$ , но  $a + b = b + a$ .

Докажем, что операция  $(+)$  ассоциативна, т.е.  $\Delta a + (\Delta b + \Delta c) = (\Delta a + \Delta b) + \Delta c$ . Действительно,  $\Delta a + (\Delta b + \Delta c) = \Delta a + (b + c) = \Delta(a + b + c)$ , а  $(\Delta a + \Delta b) + \Delta c = (a + b) + \Delta c = \Delta(a + b + c)$ .

**Лемма 2.10.** Операция  $(+)$  дистрибутивна относительно операции “ $\circ$ ” на множестве  $\mathbf{R}_0$  чисел.

**Доказательство.** а). Пусть  $(a, b, c) \in \mathbf{R}$

$$a + (b \circ c) \in \mathbf{R} = \begin{cases} a + b + 1, & c < b \\ a + c + 1, & c > b \\ a + c + 2, & c = b \end{cases}, \quad (b \circ c) + a = \begin{cases} a + b + 1, & c < b \\ a + c + 1, & c > b \\ a + c + 2, & c = b \end{cases},$$

б). Пусть  $(\Delta a, \Delta b, \Delta c) \in \Delta$

$$\Delta a + (\Delta b \circ (\Delta c)) = \begin{cases} \Delta a + (\Delta b + 1) = \Delta a + \Delta(b + 1) = a + b + 1, & \Delta b < \Delta c; \\ \Delta a + (\Delta c + 1) = a + c + 1, & \Delta c < \Delta b; \\ \Delta a + (\Delta c + 2) = a + c + 2, & \Delta c = \Delta b. \end{cases}$$

$$(\Delta b \circ \Delta c) + \Delta a = \begin{cases} a + b + 1, & \Delta b < \Delta c; \\ a + c + 1, & \Delta c < \Delta b; \\ a + c + 2, & \Delta c = \Delta b, \end{cases}$$

что и требовалось доказать, так как при всех  $(a, b, c) \in \mathbf{R}_0$  операция “ $+$ ” дистрибутивна относительно операции “ $\circ$ ”.

**Лемма 2.11.** Операция  $(+)$  на множестве  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел имеет левую и правую единицу, а также левый и правый обратный элемент.

**Доказательство.** Так как  $\Delta a + 0 = \Delta(a + 0) = \Delta a$  и  $0 + \Delta a = \Delta(0 + a) = \Delta a$ , то “0” – это левая и правая единица. Заметим, что  $(+)$  – “идентифицированное умножение” играет роль умножения на множестве  $\mathbf{R}_\Delta$ .

$\Delta(-a)$  – является левым и правым обратным элементом:

$$\Delta a + \Delta(-a) = a - a = 0 \text{ и } \Delta(-a) + \Delta a = -a + a = 0.$$



**Теорема 2.5.** (" $\circ$ ", " $\Delta$ " – поле). Система математических объектов  $O = \langle O \in \mathbf{R}_\Delta, \circ, +, -\infty, 0 \rangle$ , сформированная в результате отображения на множестве  $\Delta$ -чисел  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  образует поле.

**Доказательство.** Система  $O$  является алгебраической системой, так как она представляет собой множество с определенным на нем операциями (" $\circ$ " и " $+$ ") и отношениями (например,  $>$ ,  $<$ ,  $=$ ). Роль операции умножения, как уже отмечалось, в данной системе играет обыкновенное сложение ( $+$ ) операндов.

Хотя система не замкнута относительно операции " $+$ " ( $\Delta a + \Delta b = (a + b) \notin \Delta$ ) согласно леммам 2, 8, 9, 10, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 все остальные условия для группы выполнены, как-то: ассоциативность, наличие единицы и обратного элемента. В силу коммутативности операции, идентифицированной сложению

$$a \circ b = b \circ a = \begin{cases} a + 1, & a > b \\ b + 1, & b > a ; \\ a + 2, & a = b \end{cases}$$

имеет место свойство аддитивности, т.е. рассматриваемая система – абелева группа. Из лемм 2.10, 2.11 заключаем, что эта система ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, множества непустых элементов которого образует группу относительно операции, идентифицированной умножению, т.е. исследуемая система **поле** (при условии исключения “нуля”, которым является элемент  $(-\infty)$ ).

**Следствие 1.** Группы  $O$  и  $\mathbf{R}$  изоморфны. а). Действительно, пусть  $\Delta a, \Delta b \in O$  ( $\Delta a, \Delta b \in \mathbf{R}_\Delta$ ),  $k > 0, k \neq 1$  и  $\Delta a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta a} = -k^a \in \mathbf{R}_- \subset \mathbf{R}$ ,  $\Delta b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta b} = -k^b$ .

Тогда  $(\Delta a + \Delta b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{(\Delta a + \Delta b)} = k^{\Delta a} \cdot k^{\Delta b} = (-k^a) \cdot (-k^b) = k^{a+b}$ . Так как  $\Delta a + \Delta b = a + b$ , то  $(\Delta a + \Delta b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{(\Delta a + \Delta b)} \equiv (a + b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a+b}$ , т.е. группы  $O$  и  $\mathbf{R}$  изоморфны по идентифицированному умножению (обыкновенному сложению).

б). Проверим изоморфность  $O$  и  $\mathbf{R}$  по обыкновенному умножению:

$$(\Delta a \cdot \Delta b) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{(\Delta a \cdot \Delta b)},$$

$$\Delta a \cdot \Delta b = \begin{cases} a \cdot b, & b \in N_2 \\ \Delta(a \cdot b), & b \in N_1 \end{cases}; \quad k^{\Delta a \cdot \Delta b} = \begin{cases} k^{a \cdot b}, & b \in N_2 \\ k^{\Delta(a \cdot b)} = -(k^{a \cdot b}), & b \in N_1 \end{cases},$$

С другой стороны,  $a \cdot b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a \cdot b}$ , где  $k^{a \cdot b} \in \mathbf{R}_+$  при  $a > 0$  и  $b > 0$  и  $k^{a \cdot b} \in \mathbf{R}_-$  при  $a > 0$ ,  $b < 0$  и т.д., т.е.  $\mathbf{O}$  и  $\mathbf{R}$  изоморфны по обыкновенному умножению.

**Следствие 2.** Множество  $\mathbf{R}_\Delta$  — чисел является *дополнением* множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

Действительно,  $\mathbf{R}_\Delta \subset \mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}_0$ . Так как,  $\mathbf{R}_\Delta \cap \mathbf{R} = \{-\infty\}$ , то, исключив элемент  $(-\infty)$  из  $\mathbf{R}_\Delta$  и  $\mathbf{R}$ , получим  $\mathbf{R}_\Delta^* \cap \mathbf{R}^* = \emptyset$ , где  $\mathbf{R}_\Delta^*, \mathbf{R}^*$  — множества  $\mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}$  с исключенным элементом  $(-\infty)$ , т.е.  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_0 \setminus \mathbf{R} = \{x : x \notin \mathbf{R}\}$  или  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}^d = \{x \in \mathbf{R}_0 \mid |x| \wedge |y| = 0, \forall y \in \mathbf{R}\}$ .  $\mathbf{R}_\Delta$  — линейное подпространство  $\mathbf{R}_0$  такое, что: из  $x \in \mathbf{R}$  и  $|y| \leq |x|$  следует  $y \in \mathbf{R}$  и т.д..

**Следствие 3.**  $\mathbf{R}_0$  — *надполе*  $\mathbf{R}_\Delta$  и  $\mathbf{R}$ .

а). Так как  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_\Delta \cup \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_\Delta \cap \mathbf{R} = \{-\infty\}$ ,  $\mathbf{R}_\Delta \subset \mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{R}_\Delta$  — поле чисел с бинарными операциями: *идентифицированными сложением* (“ $\circ$ ”) и *умножением* (“ $+$ ”), заданными на  $\mathbf{R}_0$ , то  $\mathbf{R}_\Delta \equiv \mathbf{R}_\Delta^\sigma = \{x \in \mathbf{R}_0 \mid \sigma(x) = x\}$  — *подполе*  $\mathbf{R}_0$ , если  $\sigma$  — автоморфизм. (В нашем случае,  $\sigma$  ставится в соответствие отображение  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  и, если элемент  $\Delta x_i \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta x'_i (k^{\Delta x_i})$ , то при обратном отображении  $\Delta x'_i \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \Delta x$ , т.е. получаем тот же элемент. Более того,  $\Delta x_i \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_1 \setminus \Delta x_i$  и  $\Delta x'_i \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta x'_i$ ).

б).  $\mathbf{R}_\Delta$  — *дополнение* множества действительных чисел  $\mathbf{R}$  до  $\mathbf{R}_0$ :  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_0 \setminus \mathbf{R}$  при соблюдении принципа двойственности  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}_0 \setminus \mathbf{R} \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{R}_\Delta (U_\xi R_\xi) = \cap (\mathbf{R}_\Delta R_\xi)$ . В силу *гомеоморфизма* отображения  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  пространство  $\mathbf{R}_0$  является *топологической прямой суммой* пространств  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_\Delta$ , т.е.  $\mathbf{R}_\Delta$  — это прямое топологическое дополнение подпространства  $\mathbf{R}$ , хотя имеется некоторая специфичная трансформация критериев дополняемости  $\mathbf{R}$ , связанная с пересмотром сути элемента  $(-\infty)$ .

Итак,  $\mathbf{R}_0$  — это *надполе*  $\mathbf{R}_\Delta$  и  $\mathbf{R}$ .

**Примечание.** Очевидно, по аналогии с расширением поля  $\mathbf{R}$  до  $\mathbf{R}_0$  ( $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \cup \mathbf{R}_\Delta$ ) существуют расширения поля  $\mathbf{R}_0$  до  $\mathbf{R}_1$  ( $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 \cup \mathbf{R}_\Delta$ ) и т.д.. Инфинитный спектр дополнений  $\mathbf{R}_i / \mathbf{R}_{i-1}$  нетрудно логически обосновать и

дать дилатационное математическое описание для  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ,

$$\left( i = 1, \lim_{m \rightarrow \infty} m \right), m = \text{var}.$$

**Теорема 2.6.** ( $\circ \Delta$  – алгебра). Система  $O = \langle O \in \mathbf{R}_\Delta, +, \cdot, -\infty, 0 \rangle$ , является операторным кольцом (алгеброй) над полем  $\mathbf{R}$  действительных чисел.

**Доказательство.**  $\mathbf{R}$  – ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей относительно умножения.

Для любых элементов  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\Delta b \equiv O \in O$  однозначно определено произведение:

$$a \cdot (\Delta b) = \Delta(a \cdot b) \in O.$$

Пусть  $(a, b) \in \mathbf{R}$ ,  $(\Delta a', \Delta b') \in O$ . Тогда

$$\text{а). } 1 \cdot \Delta a = \Delta(1 \cdot a) = \Delta a \in O;$$

$$\text{б). } (a + b) \cdot \Delta a' = a \cdot \Delta a' + b \cdot \Delta a'; \quad a \cdot (\Delta a' + \Delta b') = a \cdot (\Delta(a' + b')) = \\ = \Delta(a \cdot (a' + b')) = \Delta(a \cdot a' + a \cdot b') = \Delta a \cdot a' + \Delta a \cdot b' = a \cdot \Delta a' + a \cdot \Delta b';$$

$$\text{т.е. } a \cdot (\Delta a' + \Delta b') = a \cdot \Delta a' + a \cdot \Delta b'.$$

$$\text{в). } a \cdot (b \cdot \Delta a') = a \cdot \Delta(b \cdot a') = \Delta(a \cdot b \cdot a'), \quad (a \cdot b) \cdot \Delta a' = \Delta(a \cdot b \cdot a'), \\ \text{т.е. } a \cdot (b \cdot \Delta a') = (a \cdot b) \cdot \Delta a'.$$

$$\text{г). } A = a \cdot (\Delta a' \cdot \Delta b') = a \cdot (\Delta((\Delta a') \cdot b')) = a \cdot (\Delta(a' \cdot b')) = \Delta(a \cdot a' \cdot b') \text{ при } b' \in N_2 \text{ и } A = a \cdot (\Delta(\Delta(a' \cdot b'))) = a \cdot a' \cdot b' \text{ при } b' \in N_1.$$

$$\text{С другой стороны, } (a \cdot \Delta a') \cdot \Delta b' = \Delta(a \cdot a') \cdot \Delta b' = \Delta((\Delta(a \cdot a')) \cdot b') = \\ = \begin{cases} \Delta(a \cdot a' \cdot b'), & b' \in N_2 \\ a \cdot a' \cdot b', & b' \in N_1 \end{cases}, \text{ т.е. } a \cdot (\Delta a' \cdot \Delta b') = (a \cdot \Delta a') \cdot \Delta b'. \text{ Кроме того,}$$

$$A = \Delta a' \cdot (a \cdot \Delta b'), \text{ так как } A = \Delta a' \cdot \Delta(a \cdot b') = \Delta((\Delta a') \cdot a \cdot b') =$$

$$= \begin{cases} \Delta a' \cdot a \cdot b', & b' \in N_2 \\ a' \cdot a \cdot b', & b' \in N_1 \end{cases}.$$

Таким образом, система  $O$  удовлетворяет всем условиям алгебры над  $\mathbf{R}$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 2.12.** Отображения  $\omega_i \rightarrow \omega_{i+1}$  инвариантны относительно индекса " $i$ "  $i \in \mathbf{Z}$  и изоморфны.<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Хотя в леммах 2.1-2.7 доказывалась изоморфность  $\omega$  – отображений, в лемме 2.12 вновь подробно разбирается этот вопрос в связи с его доминирующей ролью в доказательствах предлагаемых утверждений.

**Доказательство.** Обозначим  $\varphi \equiv \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash$ ,  $\varphi$  – взаимно однозначное отображение множества  $\Delta$  на множество  $\mathbf{R}$  в силу, как уже указывалось, однозначности функции  $y = \text{slog}_k a$ .  $\mathbf{R} \backslash \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \backslash \Delta$ , а функция отображения  $\backslash \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \backslash$  равна  $(-1 + \text{slog}_k x) * k = \log_k x$  ( $k > 0, k \neq 1$ ), т.е. для любого  $x = a \in \mathbf{R}$  можно записать:

$$|a| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k |a|.$$

Пусть  $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ ,  $|a_1| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k |a_1|$ ,  $|a_2| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k |a_2|$ . Тогда  $|a_1| \cdot |a_2| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k (|a_1| \cdot |a_2|) = \log_k |a_1| + \log_k |a_2|$ . В общем случае  $\prod_{i=1}^n |a_i| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \sum_{i=1}^n \log_k |a_i|$ . Следовательно,

$$\backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash - \text{изоморфизм.} \quad \text{Аналогично,} \quad |a_1| \odot |a_2| \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k |a_1| \cdot \log_k |a_2| = \log_k (|a_1|)^{\log_k |a_2|} = \log_k (|a_1| \odot |a_2|) \quad \text{или}$$

$$|a_1| \odot |a_2| = |a_1|^{\log_k |a_2|} \backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \log_k (|a_1|)^{\log_k |a_2|} = \log_k (|a_1| \odot |a_2|).$$

Обозначив  $\omega_0$  за  $\omega_1$ , а  $\omega_{-1}$  за  $\omega_0$ , получим: для всех  $a \in \mathbf{R}$

$$\log_k |a| \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash k^{\log_k |a|} = |a|, \text{ а } |a| \backslash \omega_0 \rightarrow \omega_1 \backslash \log_k |a|.$$

Последовательно изменяя индекс "i" путем увеличения его на "1", получим  $\backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash \equiv \backslash \omega_0 \rightarrow \omega_1 \backslash \equiv \dots \equiv \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash$ , т.е. отображение  $\backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash$  инвариантно относительно индекса "i".

$$\text{Итак, если } (a_i, a'_i) \in \omega_i, \text{ то из } \begin{cases} |a_i| \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \log_k |a_i| \\ |a'_i| \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \log_k |a'_i| \end{cases} \text{ следует,}$$

$$\text{что } |a_i| \cdot |a'_i| \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \log_k (|a_i| \cdot |a'_i|) = \log_k |a_i| + \log_k |a'_i| \quad \text{и}$$

$$|a_i| \odot |a'_i| \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \log_k (|a_i| \odot |a'_i|) = \log_k (|a_i|)^{\log_k |a'_i|} = \log_k |a_i| \times \log_k |a'_i|, \text{ что подтверждает изоморфизм отображения } \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \text{ по обык-}$$

новенному и рефлексивному умножениям, а также инвариантность  $\varphi$  относительно " $i$ ".

**Следствие.** Отображение  $\omega_i \rightarrow \omega_{i+1}$  изоморфно по любой операции умножения (идентифицированного, обыкновенного, рефлексивного и др.). Иерархия операций такова:  $\dots, \circ, +, \cdot, \odot, \dots$ . Любая из этих операций может быть принята за умножение при соответствующей корректировке ранга других операций. Однако, не следует забывать, что операция " $\circ$ " в отличие от операций  $\{+, \cdot, \odot\}$  не является адекватной операции проще сложения полученной путём  $\omega$  – процедуры, т.е., если  $+\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \cdot \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \odot$  и т.д., то, отображая " $+$ "  $\backslash \omega_0 \rightarrow \omega_1 \backslash$ , в результате мы не получим операцию " $\circ$ ". Итак, " $\circ$ " – не входит в ряд операций, идентичных умножению, а является одной из основополагающих (фундаментальных) операций.

**Лемма 2.13 (об иерархии чисел).** Множество  $\mathbf{R}_0$  содержит подмножество  $\{\mathbf{R}_0^i\} (\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\})$ , состоящее из родственных по структуре и свойствам классов чисел со следующей иерархией:  $\{\mathbf{R}_0^i\} = \{\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots\}$ .

**Доказательство.**<sup>16</sup> Любое множество чисел из  $\{\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots\}$  на множестве  $\mathbf{R}_0$  ( $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_\Delta \cup \mathbf{R}$ ) можно рассматривать как результат последовательной цепи однородных  $\omega$  – отображений. Действительно,

$$\mathbf{R}_\Delta \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \mathbf{R}_-, \quad \mathbf{R}_- \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \mathbf{R}_f,$$

$$\mathbf{R}_f \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \mathbf{R}_{ir} \quad \text{или} \quad \mathbf{R}_\Delta \backslash \omega_{i+3} \rightarrow \omega_{i+2} \backslash \mathbf{R}_-,$$

$$\mathbf{R}_- \backslash \omega_{i+2} \rightarrow \omega_{i+1} \backslash \mathbf{R}_f, \quad \mathbf{R}_f \backslash \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \backslash \mathbf{R}_{ir}.$$

Пусть  $\{\mathbf{R}_0^i\} = \{\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots\}$ , причем,  $\{\mathbf{R}_0^i\} \subset \mathbf{R}_0$ , так как  $\mathbf{R}_0^i$  формируется из  $\mathbf{R}_0$  исключением некоторых классов чисел.

**Теорема 2.7 (о фактормножестве).**

В множестве  $\mathbf{R}_0$  вложено фактормножество  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  с индуцированными классами  $\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots$ .

<sup>16</sup> Подробное доказательство леммы 2.13 не приводится в связи с очевидностью результатов  $\omega$  – отображений и доказательством леммы 2.12.

**Доказательство.** Все классы  $(\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots)$  множества  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  являются классами эквивалентности по любому фиксированному отношению эквивалентности, т.е. по бинарному отношению, обладающему свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Более того, переход от одного класса к любому другому связан с соответствующим отображением сложения и умножения в аналогичные трансформированные операции. (Например, “идентифицированные” сложение и умножение отображаются в *обыкновенные* сложение и умножение, которые, в свою очередь, отображаются в *рефлексивные* формы этих операций. Деление ( $:$ ) при отображении  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  трансформируется в рефлексивное ( $\Delta$ )). Отображение одного класса  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  в любой другой осуществляется с помощью функции  $\varphi = (i + \log_k a) * k$ ,  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ . Например, указанные выше последовательные отображения классов в цепи

$$\mathbf{R}_\Delta \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{R}_- \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{R}_f \xrightarrow{\varphi_1} \mathbf{R}_{ir}$$

реализуются с помощью функции  $\varphi_1 = (1 + \log_k a) * k$ , а  $\left. \begin{array}{l} \mathbf{R}_\Delta \rightarrow \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_- \rightarrow \mathbf{R}_{ir} \end{array} \right\} \varphi_2 = (2 + \log_k a) * k$  и т.д.

С учетом лемм 2.12 и 2.13  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  является *фактормножеством* с индуцированными классами  $\dots \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir} \dots$ . Причем, согласно лемме 2.13  $\{\mathbf{R}_0^i\} \subset \mathbf{R}_0$ , т.е.  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  вложено в  $\mathbf{R}_0$ .

**Теорема 2.8.** *Отображение любого класса в фактормножество  $\{\mathbf{R}_0^i\}$  является каноническим отображением.*

**Доказательство.** Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.7. Рассмотрим доказательство на примерах. Пусть  $\Delta a \in \mathbf{R}_\Delta$ ,  $k > 0$ ,  $k \neq 1$ . Тогда отображение  $\mathbf{R}_\Delta \rightarrow \mathbf{R}_0^i$  порождает множество (класс) идентифицированных по

$\omega$  – отображению элементов:  $A_1 = \left\{ \Delta a; -(k^a); : (k^{k^a}); \Delta (k^{k^{k^a}}) \right\}$ . Дей-

ствительно,  $\Delta a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\Delta a} = -(k^a); -(k^a) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{-(k^a)} =$

$$= \frac{1}{k k^a} = \left( k^{k^a} \right); \left( \left( k^{k^a} \right) \right) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k \Delta \left( k^{k^a} \right) = \Delta \left( k^{k^a} \right).$$

Отобразим  $\mathbf{R}_-$  в  $\mathbf{R}_0^i$ . Результатом будет следующий класс идентифицированных элементов:  $A_2 = \left\{ -a; \frac{1}{k^a}; \Delta \left( k^{k^a} \right) \right\}$ . Действительно,  $-a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{-a} = \frac{1}{k^a} = k^a, \left( \left( k^a \right) \right) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k \Delta \left( k^{k^a} \right) = \Delta \left( k^{k^a} \right)$ .

Аналогично, для дробных чисел:

$$\mathbf{R}_f \rightarrow \mathbf{R}_0^- \Rightarrow A_3 = \left\{ (:a); \Delta \left( k^a \right) \right\}.$$

Очевидны закономерности формирования классов  $A_i$ .

Все классы  $A_1 = \left\{ \Delta a; - \left( k^a \right); \left( k^{k^a} \right); \Delta \left( k^{k^a} \right) \right\}$ ,  $A_2 = \left\{ -a; \left( k^a \right); \Delta \left( k^{k^a} \right) \right\}$ ,  $A_3 = \left\{ (:a); \Delta \left( k^a \right) \right\}$  являются классами эквивалентности, так как для любого  $A_i$  выполняются все условия, необходимые для классов эквивалентности. Во все  $A_i$  входят элементы-прообразы (элементы их образующие), поэтому всё это *канонические отображения*.

**Теорема 2.9 (о башне полей).**

Множества  $\mathbf{R}_0, \left\{ \mathbf{R}_0^i \right\}, \mathbf{R}'_0, \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir}$  образуют однородные по  $\omega$ -отображению башни полей.

**Доказательство.** На основании вышеизложенного цепочка полей  $\mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir}$  представляет дискретный спектр полей, взаимосвязанных  $\omega$ -отображением. Иерархия их требует соблюдения последовательного перехода  $\mathbf{R}_\Delta \rightarrow \mathbf{R}_- \rightarrow \mathbf{R}_f \rightarrow \mathbf{R}_{ir}$ , где каждый акт перехода описывается одной и той же функцией отображения и равнозначен по трансформации объектов.

Множество  $\left\{ \mathbf{R}_0^i \right\}$  является надполем для любого объекта-множества из спектра полей  $\left\{ \dots, \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir}, \dots \right\}$ , т.е.  $\left\{ \left\{ \mathbf{R}_0^i \right\} \supset \mathbf{R}_\Delta; \left\{ \mathbf{R}_0^i \right\} \supset \mathbf{R}_-; \left\{ \mathbf{R}_0^i \right\} \supset \mathbf{R}_f; \left\{ \mathbf{R}_0^i \right\} \supset \mathbf{R}_{ir} \right\}$ . В свою очередь,  $\mathbf{R}_0$  является расширением

ем поля  $\{\mathbf{R}_0^i\}$ , т.е. *надполем*  $\{\mathbf{R}_0^i\}$ . Из  $\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\}$  следует, что  $\mathbf{R}_0$  — *надполе* каждого из объектов поля  $\{\mathbf{R}_0^i\}$ .

Сформируем *башни полей*:  $\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\} \supset \mathbf{R}_\Delta$ ;  $\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\} \supset \mathbf{R}_-$ ;  $\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\} \supset \mathbf{R}_f$ ;  $\mathbf{R}_0 \supset \{\mathbf{R}_0^i\} \supset \mathbf{R}_{ir}$ . Все они отличаются последним элементом. Множество этих элементов, как известно, связано с  $\omega$ -отображением. Теорема доказана.

**Теорема 2.10 (об идеале).**

Множество  $\mathbf{I} = \{\Delta b \in \mathbf{R}_\Delta, b \in N_2\}$  является левым идеалом кольца  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел ( $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}_\Delta$ ) по обыкновенному умножению.

**Доказательство.** Пусть  $a, b \in \mathbf{Z}$ . Тогда для любого  $\Delta a \in \mathbf{R}_\Delta$  и  $\Delta b \in \mathbf{I}$  имеет место соотношение  $\Delta a \cdot \Delta b \in \mathbf{R}_\Delta$ , так как  $\Delta a \cdot \Delta b = \Delta((\Delta a) \cdot b) = \Delta(a \cdot b) \in \mathbf{R}_\Delta$  для  $b \in N_2$ . Более того,  $\Delta(a \cdot b) \in \mathbf{I}$  в связи с тем, что  $a, b \in N_2$ . Т.е. из

$\mathbf{R}_\Delta \cdot \mathbf{I} = \{\Delta a \cdot \Delta b \mid \Delta a \in \mathbf{R}_\Delta, \Delta b, \Delta a \cdot \Delta b \in \mathbf{I}\} \Rightarrow \mathbf{R}_\Delta \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$ . Следовательно,  $\mathbf{I}$  — *левый идеал*, что и требовалось доказать.

**Примечание.**  $\Delta b \cdot \Delta a = \Delta((\Delta b) \cdot a) = b \cdot a \notin \mathbf{I}$  при  $a \in N_1$ , т.е.  $\mathbf{I}$  — не является правым идеалом.

**Лемма 2.14.** Результат логарифмирования множества  $\mathbf{R}^i$  является множеством  $\mathbf{R}^{i-1}$ , где  $\mathbf{R}^i \equiv \{\mathbf{R}_0^i\}$ .

**Доказательство.**

Рассмотрим частные случаи:  $\mathbf{R}^i = \{\dots, \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \dots\}$ , где  $\mathbf{R}_f = \mathbf{R}^j$ ,  $\mathbf{R}_- = \mathbf{R}^{j-1}$ ,  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}^{j-2}$ ,  $\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}^{j-3}$ . Пусть  $a \in \mathbf{R}_+$ ,  $a \neq \{0; 1\}$ . Для любого  $a$  справедливы соотношения:  $(:a) \in \mathbf{R}_f = \mathbf{R}^j$ ,  $\ln(:a) = (-\ln a + 0) \in \mathbf{R}_- = \mathbf{R}^{j-1}$ , т.е.  $\ln(\mathbf{R}^j) = \mathbf{R}^{j-1}$ .

Аналогично, для  $a \in \mathbf{R}_-$ , т.е.  $a \in \mathbf{R}^{j-1}$  и  $\ln(-|a|) = \Delta 0 + \ln|a| = \Delta \ln|a|$ . Тогда  $\ln\{-a_i\} = \{\Delta \ln a_i\} = \mathbf{R}_\Delta = \mathbf{R}^{j-2}$ , т.е.  $\ln \mathbf{R}^{j-1} = \mathbf{R}^{j-2}$ .



$$\ln(\Delta a) = \ln a + \Delta 0 = \Delta \ln a \in \mathbf{R}_{\Delta} = \mathbf{R}^{j-3}, \text{ т.е.}$$

$$\ln(\mathbf{R}^{j-2}) = \mathbf{R}^{j-3}.$$

$$\text{В общем случае, } \ln(\mathbf{R}^i) = \mathbf{R}^{i-1}.$$

$$\text{Следствие. } \mathbf{R}_+ \mathbf{R}^- = \mathbf{R}_f; \mathbf{R}_+ \mathbf{R}_{\Delta} = \mathbf{R}_-; \mathbf{R}_+ \mathbf{R}^{\Delta} = \mathbf{R}_{\Delta}.$$

**Теорема 2.11.** Если  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_0^i$  — множества чисел (классы), полученные  $\omega$ -отображением элементов иерархической цепочки, сконструированной по признаку отображения  $\omega_i \rightarrow \omega_0$  и представленной в лемме 2.13, а  $(a_i, b_i) \in \mathbf{R}_0^i$ ,  $\odot_i$  — операция умножения для данного класса, то

$$a_i \odot_i b_i = a \odot b.$$

**Доказательство.** Не останавливаясь на общем доказательстве теоремы (оно достаточно сложно и требует специальной терминологии и индексации), рассмотрим некоторые наиболее распространенные частные случаи.

а). Пусть  $a_i = \Delta a$ ,  $b_i = \Delta b$ , где  $\Delta a, \Delta b \in \mathbf{R}_{\Delta}$ . Тогда  $\odot_i \equiv (+)$  — "идентифицированное" умножение первого порядка.

$$\Delta a + \Delta b = a + b \text{ согласно свойствам } \Delta \text{ — чисел.}$$

б). Если  $(a_i, b_i) \in \mathbf{R}_-$ , то  $\odot_i \equiv (\cdot)$  — обыкновенное умножение и  $(-|a|) \cdot (-|b|) = |a| \cdot |b|$ .

в). Пусть  $(a_i, b_i) \in \mathbf{R}_f$ , то  $\odot_i \equiv (\odot)$  — рефлексивное умножение первого порядка ( $i = 1$ ):

$$(:a) \odot (:b) = (:a)^{\log_k (:b)} = a^{\log_k b} = a \odot b.$$

г). Пусть  $a_i = \Delta a$ ,  $b_i = \Delta b$ , т.е.  $\odot_i \equiv \boxtimes$  — рефлексивное умножение второго порядка ( $i = 2$ ). Тогда

$$\begin{aligned} (\Delta a) \boxtimes (\Delta b) &= \left( k^{(1/\log_k a)} \right) \boxtimes \left( k^{(1/\log_k b)} \right) = \\ &= k^k \left( \left( \log_k \log_k k^{(1/\log_k a)} \right) / \left( \log_k \log_k k^{(1/\log_k b)} \right) \right) = \\ &= k^k \left( (-\log_k \log_k a) / (-\log_k \log_k b) \right) = k^k \left( (\log_k \log_k a) / (\log_k \log_k b) \right) = a \boxtimes b. \end{aligned}$$

д). Пусть  $a_i = \boxtimes a$ ,  $b_i = \boxtimes b$ , т.е.  $\odot_i \equiv \blacklozenge_3$  – рефлексивное умножение третьего порядка ( $i = 3$ ). Тогда обозначив за  $A = k^k^{(1/\log_k \log_k a)}$  и  $B = k^k^{(1/\log_k \log_k b)}$ , получим:

$$(\boxtimes a) \blacklozenge_3 (\boxtimes b) = k^k^{k \left( \frac{\log_k \log_k \log_k A}{\log_k \log_k \log_k B} \right)} = k^k^{k \left( \frac{-\log_k \log_k \log_k a}{-\log_k \log_k \log_k b} \right)} = a \blacklozenge_3 b,$$

что и требовалось доказать.

**Лемма 2.15.** При  $a \in \mathbf{R}_+$ ,  $a \neq 1$  справедливо равенство

$$\left\{ a^{\mathbf{R}_+^i} \right\} = \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^{i-1},^{16}$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots$  и  $\mathbf{R}_+^1 \equiv : \mathbf{R}_+$ ,  $\mathbf{R}_+^2 \equiv -\mathbf{R}_+ = \mathbf{R}_-$ ;  $\mathbf{R}_+^3 \equiv \Delta \mathbf{R}_+$ ,  $\mathbf{R}_+^4 \equiv \triangle \mathbf{R}_+, \dots$ .

**Доказательство.** Рассмотрим частные случаи:

$$\text{а). } \left\{ a^{\mathbf{R}_-} \right\} = \left\{ a^{-\mathbf{R}_+} \right\} = \left\{ \frac{1}{a^{\mathbf{R}_+}} \right\} = \left\{ : (a^{\mathbf{R}_+}) \right\} = : \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}. \text{ Откуда,}$$

$$\left\{ a^{\mathbf{R}_+^2} \right\} = \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^1.$$

$$\text{б). } \left\{ a^{\Delta \mathbf{R}_+} \right\} = \left\{ - (a^{\mathbf{R}_+}) \right\} = - \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}, \text{ т.е. } \left\{ a^{\mathbf{R}_+^3} \right\} = \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^2.$$

$$\text{в). } \left\{ a^{\triangle \mathbf{R}_+} \right\} = \left\{ \Delta (a^{\mathbf{R}_+}) \right\} = \Delta \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}; \left\{ a^{\mathbf{R}_+^4} \right\} = \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^3 \text{ и т.д.. В}$$

$$\text{общем случае, } \left\{ a^{\mathbf{R}_+^i} \right\} = \left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^{i-1}.$$

---

<sup>16</sup> В выражениях подобных  $\left\{ a^{\mathbf{R}_+^i} \right\}$  и  $\left\{ a^{\mathbf{R}_+} \right\}^{i-1}$  числа  $i$  и  $i-1$  означают индекс множества, а не степень.

**Лемма 2.16.** Если  $\mathbf{R}^j$  – глобальные множества<sup>17</sup>, где  $\mathbf{R}^0 \equiv \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}^1 \equiv \mathbf{R}_\Delta$ ,  $\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R}_\triangle$ , ..., то  $\mathbf{R}^j + \mathbf{R}^0 = \mathbf{R}^j$ .

**Доказательство.** Рассмотрим частные случаи.

а). Пусть  $a, b \in \mathbf{R}$ , то  $(a + b) \in \mathbf{R}$ , т.е.  $\mathbf{R}^0 + \mathbf{R}^0 = \mathbf{R}^0$ .

б). Пусть  $a, b \in \mathbf{R}$ , то  $\Delta a + b = \Delta(a + b) \in \mathbf{R}_\Delta$ , т.е.  $\mathbf{R}^1 + \mathbf{R}^0 = \mathbf{R}^1$ .

в). Если  $a, b \in \mathbf{R}$ , то  $\triangle a + b = \triangle(a + b) \in \mathbf{R}_\triangle$ , т.е.  $\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^0 = \mathbf{R}^2$  и

т.д..

Исследуя множества чисел, получаемых  $\omega$ -отображениями, т.е. систематизированных по  $\omega$ -фактору, можно заметить что:

$\mathbf{R}_- = ]-\infty; 0[$ ,  $\lim_{a \rightarrow \infty} (-a) = (-\infty)$ , т.е. предел является нулевым

элементом множества  $\Delta$ -чисел, а  $\lim_{a \rightarrow 0} (-a) = 0$  – второй крайний

элемент – это нулевой элемент множества чисел  $\mathbf{R}_-$ .

$\mathbf{R}_f = ]0; 1[$ ,  $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right) = 0$  – нулевой элемент отрицательных чи-

сел;  $\lim_{a \rightarrow 1} \left(\frac{1}{a}\right) = 1$  – это нулевой элемент дробных чисел  $(:a)$ .

$\mathbf{R}_\Delta = ]1; k[$ ,  $\lim_{a \rightarrow \infty} (\Delta a) = 1$  – нулевой элемент чисел  $(:a)$ ,

$\lim_{a \rightarrow k} (\Delta a) = k^{1/\log k} k = k$ . Нулевой элемент  $\triangle$ -чисел равен  $k$ .

$\mathbf{R}_\nabla = ]^2 k; k[$ ,  $\lim_{a \rightarrow \infty} (\nabla a) = \lim_{a \rightarrow \infty} k^{k^{(1/\log k \log_k a)}} = k$  – это нуле-

---

<sup>17</sup>  $\{\mathbf{R}^j\} = \{\mathbf{R}, \mathbf{R}_\Delta, \dots\}$ .

вой элемент чисел  $\vartriangleleft \triangle$  и т.д.  $\left( \lim_{a \rightarrow 2^k} \vartriangleleft a = 2^k \right)$ .

**Примечание 1.** Нетрудно провести также аналогичный анализ множеств чисел  $\mathbf{R}_{\Delta_i}$  с целью получения интервалов, в которых эти числа “расположены” и нахождения нулевых элементов исследуемых множеств.

**Примечание 2.** При рассмотрении данного вопроса необходимо учитывать доминирующие бинарные операции (сложение и умножение) для исследуемого класса чисел. Например, для множества  $\mathbf{R}$  – отрицательных чисел это будут обыкновенные сложение и умножение  $(-a + 0 = -a; (-a) \cdot 0 = 0)$ , а для дробных чисел – рефлексивные операции, т.е.  $(:a) \cdot 1 = (:a); (:a) \odot 1 = 1$  и т.д..

## §2.6 Классификация операций и чисел по $\omega$ -фактору. [50]

Не останавливаясь подробно на проведенном исследовании операций с двумя операндами, констатируем факт существования инфинитного спектра этих операций.

Известная часть этих операций приведена в таблице 1.

Таблица 1. Операции с двумя операндами  $(n \in \mathbf{Z} \wedge i \in \{1, 2, 3\})^{18}$ .

$n \setminus i$	1	2	3
...	...	...	...
0	$a \circ b = c$	$c \triangle b = a$	$c \triangle a = b$
1	$a + b = c$	$c - b = a$	$c - a = b$
2	$a \cdot b = c$	$c / b = a$	$c / a = b$
3	$a^b = c$	$\sqrt[b]{c} = a$	$\log_a c = b$
4	${}^b a = c$	${}^b \hat{\smile} c = a$	$\text{slog}_a c = b$
...	...	...	...

<sup>18</sup>  $n \in \mathbf{Z}$  – это классический случай, в общем случае  $n \in \mathbf{R}$ .

Вполне очевиден факт продолжения цикла определений операций в сторону увеличения  $n$  ( $n > 4$ ). Причем, в этом инфинитность операций вполне понятна. Действительно, возьмем операцию  $n = 5$ . При  $i = 1$  операция  $\left. \begin{matrix} a \\ \vdots \\ a \end{matrix} \right\} b$  (по аналогии  $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_b = a^b$  и  $\left. \begin{matrix} b \\ \vdots \\ a \end{matrix} \right\} b$ ).

Например,  ${}^3_2 = {}^2_2 = {}^4_2 = 2^{16}$ . При  $i = 2$   $\hat{b}c = a$ , а при  $i = 3$   $\text{sslog}_a c = b$  (из операции  $\text{sslog}_a c = b$  следует  $\hat{b}a = c$ ). Снижение  $n < 0$  тоже должно вести к инфинитности операций, хотя эту ситуацию достаточно трудно математически описать. Следует также заметить, что при  $n \notin \mathbf{Z}$ , возможно, существуют операции, описание которых основано на другом принципе (при  $n \in \mathbf{Z}$  операции формировались по методу аналогий).

Как видно из таблицы, в инфинитном множестве операций реализуется транспозиция отношений инверсии ( $i = 2, 3$ ).

Экстраполяция операций в сторону увеличения их индекса ( $n > 4$ ) осложняется, с одной стороны, в связи с необходимостью оперировать с множествами, обладающими специфическими и малоизученными свойствами, с другой стороны, с возникновением ряда альтернативных и парадоксальных ситуаций, которые только частично могут быть разрешимы методами дескриптивной теории множеств и путем инъектирования в известные аксиоматики (Пeano, Цермело-Френкеля и др.) дополняющих уточнений для областей достаточно больших величин и стремящихся к бесконечности. Следует заметить, что получение результатов операций при  $n = 4$  не представляет большой сложности.

Данная классификация операций не единственная. Рассмотрим классификацию операций и чисел по  $\omega$ -фактору. Как следует из леммы 2.13, любое множество из  $\{\mathbf{R}_\Delta, \mathbf{R}_-, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir}\}$  на множестве  $\mathbf{R}_0$  — это результат последовательной цепи однородных  $\omega$ -отображений, так как

$$\mathbf{R}_\Delta \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_- \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_{ir}$$

Эту цепь можно продолжить влево или вправо до бесконечности. При этом  $\mathbf{R}_\Delta = ]\Delta^\infty, -\infty[$ ,  $\mathbf{R}_- = ]-\infty, 0[$ ,  $\mathbf{R}_f = ]0, 1[$ . Множество  $\mathbf{R}_{ir}$ , как указывалось, представляет собой инфинитный спектр инфинитных множеств типа:

$\mathbf{R}_{\Delta} = ]1, k[$ , где  $k \in \mathbf{R}_0$  (в простейшем случае  $k \in \mathbf{R}$ ) и  $k \neq 1$ .  
 $\Delta$  – числа получаются по формуле  $\Delta a = k\Delta a = k^{1/\log_k a}$ ;  $\mathbf{R}_{\nabla} = ]k, {}^2k[$ ,  
где  $\nabla a = {}^2k\nabla a = k^{k(1/\log_k \log_k a)}$ ;  $\mathbf{R}_{\diamond} = ]{}^2k, {}^3k[$ , где  $\diamond a =$   
 $= {}^3k\diamond a = k^{k^{k(1/\log_k \log_k \log_k a)}}$  и т.д..

Множество операций  $\{\dots; \Delta; \Delta; -; \div; \Delta; \nabla; \diamond; \dots\}$  и множества чисел  $\{\dots; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{-}; \mathbf{R}_f; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\nabla}; \mathbf{R}_{\diamond}; \dots\}$  представляет собой наиболее логически обоснованную последовательность классов операций и чисел, сформированную по  $\omega$ -фактору. Заметим, что вышеуказанная цепь операций и чисел позволяет нам выделить во множестве положительных чисел  $\mathbf{R}_+$  множества чисел, которые по значимости соответствуют таким классам чисел как отрицательные  $\mathbf{R}_{-}$  или дробные

$\mathbf{R}_f$   $\left( \mathbf{R}_f = \left\{ a \mid a = \frac{1}{a}, a \in \mathbf{R} \right\} \right)$ . Более того, одновременно

определяется доминирующая операция для этих чисел. Фактически, операции типа  $\Delta, \Delta, \Delta, \nabla, \diamond$  и чисел  $\mathbf{R}_{\Delta}, \mathbf{R}_{\Delta}, \mathbf{R}_{\Delta}, \mathbf{R}_{\nabla}, \mathbf{R}_{\diamond}$  являются математическими объектами новой природы.

Инфинитность каждого из множеств типа  $\mathbf{R}_{\Delta} \equiv \{k\Delta a\} \equiv \{\Delta a\}$ ,  
 $\mathbf{R}_{\nabla} \equiv \{{}^2k\nabla a\} \equiv \{\nabla a\}$ ,  $\mathbf{R}_{\diamond} \equiv \{{}^3k\diamond a\} \equiv \{\diamond a\}$  достигается двумя путями: изменением значений коэффициента  $k$  и основного компонента  $a$ .

**Теорема 2.12.** Если  $\mathbf{R}^i$  одно из множеств в инфинитном спектре множеств чисел, классифицированных по  $\omega$ -признаку, т.е. в ряду  $\dots; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{-}; \mathbf{R}_f;$   
 $\mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\nabla}; \mathbf{R}_{\diamond}; \dots$ , где  $i$  – номер множества при условии фиксации какого-то множества в качестве основного, то

$$\underbrace{\log_k \log_k \dots \log_k}_j \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-j},$$

где  $\mathbf{R}^{i-j}$  – множество в указанном ряду, удаленное на  $j$  – единиц влево от множества  $\mathbf{R}^i$ .

**Доказательство.** В ряду множеств чисел  $\dots; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{-}; \mathbf{R}_f;$   
 $\mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\nabla}; \mathbf{R}_{\diamond}; \dots$  каждое образуется из последующего путем отображения

$\backslash \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \backslash$ . В силу леммы 2.12 можно заменить  $\backslash \omega_{i+1} \rightarrow \omega_i \backslash$  на  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$ . Тогда  $\mathbf{R}^i \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash k \mathbf{R}^i$ . После логарифмирования получим  $\log_k \mathbf{R}^i \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \mathbf{R}^i$ .  $\mathbf{R}^{i-j}$  — это множество полученное из множества  $\mathbf{R}^i$  путем  $j$  актов обратных  $\omega$ -отображений, т.е. отображений типа  $\backslash \omega_0 \rightarrow \omega_1 \backslash$ . Учитывая лемму 2.14, запишем  $\log_k \mathbf{R}^{i-j} \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \mathbf{R}^{i-j+1}$  и  $\log_k \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-1}$ . Откуда следует, что

$$\underbrace{\log_k \log_k \dots \log_k}_{j} \mathbf{R}^i = \mathbf{R}^{i-j}$$

В заключение заметим, что в главе “Разное” (приложения) к основному тексту книги изложены некоторые дополнительные факты о числах новой природы.

## §2.7 Проблематика чисел новой природы

Представленные выше результаты математического поиска чисел новой природы (чисел типа  $\mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\boxtimes}; \mathbf{R}_{\diamond}$  и других) являются лишь начальной попыткой *крупного* математического исследования. Разумеется, в небольшой работе невозможно даже перечислить все множество возникающих в этом направлении проблем. Более того, некоторые вопросы, которые уже были решены автором не включены в текст книги. Ниже перечисляется только часть проблем, которые, по мнению автора, возникают в этом исследовании:

1). Необходимо математически обосновать и проанализировать все множество *операций* “проще” сложения. Найти общие закономерности в этих операциях, а также изыскать и доказать новые инвариантные формулы.

2). Изучить спектр чисел, расположенных на числовой прямой за  $(-\infty)$ . Найти дилатационные свойства и дать аксиоматику чисел типа  $\mathbf{R}_{\Delta}, \mathbf{R}_{\Delta}$  и т.п.. *Создать общую теорию  $\Delta$ -алгебр*. В частности, показать действия над числами во множестве  $\Delta$ -алгебр.

3). Уточнить и расширить примеры доказательств в  $\omega$ -символике. При этом провести цикл доказательств с точки зрения высшей алгебры в плоскости *строгого* теоретико-множественного описания.

Исследовать топологию  $\omega$ -пространств.

4). Получить более четкое представление о спектре иррациональных чисел типа  $\mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\nabla}; \mathbf{R}_{\diamond}$  и других. Найти *общие свойства* их и *действия* над этими числами.

Создать алгоритмы вычисления этих чисел с высокой точностью и определения, к какому  $\omega$ -классу принадлежит то или иное иррациональное число, т.е. решить *обратную задачу* по сравнению с той, что решена в данной работе.<sup>19</sup>

Более четко доказать иррациональность математических структур типа  $\Delta a = k^{1/\log_k a}$ ,  $\nabla a = k^{k^{(1/\log_k \log_k a)}}$  и т.д.. В частности, определить, при каких соотношениях  $k$  и  $a$  числа типа  $\Delta a$  перестают быть иррациональными. Найти иррациональные числа, не принадлежащие множеству  $\omega$ -классов.

5). Дать классификацию всему инфинитному множеству чисел, принадлежащих инфинитному расширению поля действительных чисел, т.е. систематизировать всю информацию о *надполях*, для которых поле  $\mathbf{R}$  действительных чисел является полем.

6). Объяснить сжатие полей при  $\omega$ -переходах (например,  $\mathbf{R}_{\Delta} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_{-}$ ,  $\mathbf{R}_{-} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_f$ , т.е. в ряду  $\mathbf{R}_f; \mathbf{R}_{-}; \mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}$  и т.д. слева направо инфинитность “возрастает”, так как  $\mathbf{R}_{-}$  включает в себя все отрицательные дробные числа как отдельный объект; аналогично,  $\mathbf{R}_{\Delta}$  содержит объект, состоящий из множества  $\Delta(\mathbf{R}_{-})$  и т.д.).

7). Компактизировать весь материал и высказать соображения о практическом его применении.

8). Исследовать функции на  $\Delta$ -полях  $(\mathbf{R}_{\Delta}; \mathbf{R}_{\Delta}; \dots)$ .

9). Описывая операции  $n > 4$ , изыскать числа новой природы.

Даже неполный перечень возникающих проблем наводит на мысль о их неразрешимости. Более того, может появиться желание вообще отказаться от предлагаемой в данной книге теории расширения поля действительных чисел. Однако, *это* расширение – *объективная реальность*. В частности, возникновение множества дробных чисел путем  $\omega$ -отображений отрицательных чисел  $\mathbf{R}_{-} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{R}_f$  естественно ставит вопрос о существовании чисел, из которых подобным же способом можно получить отрицательные числа, т.е.  $\mathbf{R}_{-} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \mathbf{R}_{\Delta}$  и т.д.. Может соз-

<sup>19</sup> Например, автору не удалось доказать принадлежность чисел  $\pi, e$ , к какому-нибудь из  $\omega$ -классов иррациональных чисел, хотя таких классов бесконечно много.



даться впечатление об искусственности  $\omega$ -преобразований, так как все результаты  $\omega$ -отображений находятся на одной числовой оси. Серьезное же изучение данного вопроса свидетельствует о том, что такая геометрическая интерпретация  $\omega$ -отображений числовых полей лишь подчеркивает структурное единство этих преобразований. В то же время различие в результатах  $\omega$ -переходов чисел и соответственно операций говорит об  $\omega$ -иерархии чисел и операций. По мнению автора, предлагаемый в главе 2 материал – это *глобальная* область для размышления и творчества. При этом *полезны* как путь, предлагаемый автором, так и альтернативный путь – попытка разрушить теорию расширения поля действительных чисел. Путь отрицания нового, нестандартного, нетрадиционного – это вполне естественное выражение несогласия с зарождающейся *истиной*. Как правило, этот путь лишь укрепляет и способствует её становлению и признанию.

### ГЛАВА 3. НОВЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ

#### § 3.1 Основные принципы формирования $\omega$ -образов производной

В основе получения  $\omega$ -образов производной функции  $f(x)$  лежат *соответствующие*  $\omega$ -отображения глобального объекта  $O_j$  ( $j \in \mathbf{Z}$ ), которым является формула производной

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

и элементарных объектов  $o_k$ , входящих в состав  $O_j$   $\left( O_j = \bigcup_{k=1}^n o_k \right)$ .

Обозначим  $O_j = \Psi(o_k) = \Psi(x, f(x), f'(x), \Delta x, 0, \lim, +, -, \div, =, \rightarrow)$ , где  $\Psi$  – определённая последовательность (система) связей элементарных объектов  $o_k$ , под которыми понимается не только числа, переменные, функции, но и операции (действия), а также отношения. В частности, в нашем случае,  $o_1 \equiv x$ ,  $o_2 \equiv f(x)$ , ...,  $o_9 \equiv \div$ . Объекты  $o_6 \equiv \lim$ ,  $o_{10} \equiv (=)$ ,

$o_{11} \equiv (\rightarrow)$  инвариантны относительно пространств  $\omega$ . Следует обратить внимание на специфику  $\omega$ -отображения объекта  $o_2 \equiv f(x)$ , который при  $\omega$ -переходе может сохранять свой первоначальный вид при записи производной, а все изменения будут автоматически произведены в образе производной при соблюдении *двух принципов*:

1) соответствующей  $\omega$ -трансформации объектов множества  $O'_k = \{\Delta x, 0, +, -, \div\}$ ;

2) сохранения первоначальной последовательности связей между объектами  $\Psi$ . Например,  $f'(x) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus 'f(x)$ , где  $'f(x)$  – образ в  $\omega_0$  производной  $f'(x)$ , “находящейся” в пространстве  $\omega_1$ . Для правильного формирования образа  $'f(x)$  реализуем следующие отображения элементарных объектов:  $\Delta x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \delta x$  ( $\Delta x = x - x_0$ , а  $\delta x = \frac{x}{x_0}$ , где

$x$  – переменное значение аргумента, а  $x_0$  – постоянное начальное его значение, причем  $x > x_0$ ,  $x \neq x_0$ );  $0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^0 = 1$ , т.е.  $0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus 1$ ;  $+\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \bullet$ ;  $-\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \div$ ;  $\div \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus 'f(x) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right) \Delta \delta x \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доминирующей процедурой при конструировании образа  $'f(x)$  производной  $f'(x)$  стала замена операций  $\{+; -; \div\} \setminus \omega_1 \rightarrow \rightarrow \omega_0 \setminus \{\cdot, \div, \Delta\}$ .

Кроме того, при  $\omega$ -отображении необходимо установить значение, к которому стремится  $\delta x$  ( $\delta x$  – это  $\omega$  – образ  $\Delta x$ ), а также учесть вид неопределенности, записанной под знаком предела. Например, как известно, в обычной первоначальной производной  $\Delta x \rightarrow 0$ , а вид неопределенности  $\frac{0}{0} \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$ ; в образе  $'f(x)$  приращение  $\delta x \rightarrow 1$ , а не-

определенность  $1^\infty \left( \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right)^\Delta \delta x \Rightarrow \Rightarrow 1^\Delta 1 = 1^{1/\log_k 1} = 1^\infty \right)$

и т.д.. Это нужно для вывода формулы, связывающей  $\omega$ -образ и производную  $f'$ , путём раскрытия соответствующей неопределённости.

Если объект  $o_2 = f(x)$  отобразить согласно существующим правилам (лемма 1.1), то аналогично отобразится и производная  $f'(x)$ . Итак,

$$f'(x) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{f'(\log_k x)} = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( \frac{k^{f(\log_k(x \cdot \delta x))}}{k^{f(\log_k x)}} \right)^\Delta \delta x =$$

$$= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( k^{f(\log_k x + \log_k(\delta x)) - f(\log_k x)} \right)^{1/\log_k(\delta x)}.$$

Обозначим  $\log_k x = z$  ( $x = k^z$ ,  $\delta x = k^{\delta z}$ ,  $\delta z = \log_k \delta x$  и  $\lim_{\delta x \rightarrow 1} = \lim_{\delta z \rightarrow 0}$ ). После логарифмирования образа производной  $k^{f'(\log_k x)}$  найдем:

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}.$$

Получили формулу обычной производной. Это и понятно, так как суть  $\omega$ -отображения состоит в изменении масштабов значений функций и аргументов. Вид функции в логарифмических координатах не меняется. Например, возьмем функцию  $f = \sin x$ . Тогда

$$f = \sin x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sin \log_k x} = F \quad (k \neq 1).$$

После логарифмирования:

$$\log_k F = \sin \log_k x.$$

Обозначим  $F^* = \log_k F$ ,  $\log_k x = z$ . Откуда  $F^* = \sin z$ . В итоге получили исходную функцию, в логарифмических координатах (при этом логарифмируется не исходная функция, а её  $\omega$ -образ).

Отобразим  $f' = \cos x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\cos \log_k x} = F'$ . После логарифмирования:

$$\log_k F' = \cos \log_k x \Rightarrow F'^* = \cos z,$$

что и следовало ожидать.

В отдельных случаях при конструировании образа производной даже целесообразно осуществлять замену функции  $f(x)$  на её идентифициро-

ванный  $\omega$ -образ. Например, образ  $\overset{o}{f}(x)$  в  $\omega_0$  производной, записанной изначально в пространстве  $\omega_{-1}$  будет выглядеть так:

$$\overset{o}{f}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \log_k \left( k^{f \left( \log_k (k^x + k^{\delta x}) \right)} - k^{f(x)} \right) - \delta x \right) \quad (3.2)$$

В образе  $\overset{o}{f}(x)$  приращение аргумента  $\delta x \rightarrow (-\infty)$ , а неопределенность имеет вид  $\infty - \infty$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \log_k \left( k^{f \left( \log_k (k^x + k^{\delta x}) \right)} - k^{f(x)} \right) - \delta x \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \log_k \left( k^{f \left( \log_k (k^x + k^{-\infty}) \right)} - k^{f(x)} \right) - (-\infty) &= \\ = \log_k \left( k^{f \left( \log_k (k^x) \right)} - k^{f(x)} \right) + \infty &= (-\infty) + \infty. \end{aligned}$$

В данной работе отсутствует анализ возможных функций связи между  $\omega$ -пространствами. Автор ограничился только одной показательной функцией  $k^x$  ( $k \neq 1$ ). Однако, любая непрерывная, монотонная функция  $\mathbf{F}$ , имеющая **обратную** непрерывную, монотонную функцию  $\mathbf{G}$  в общей области определения  $\mathbf{J}$  может являться функцией связи. Естественно, что обязательное условием  $\omega$ -отображения – это взаимоднозначное соответствие функций  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ .<sup>20</sup> В настоящей работе приведена  $\omega$ -алгебра, сформированная на функции  $k^x$  ( $k \neq 1$ ), как пример возможности и целесообразности такого подхода с целью упорядочения от-

<sup>20</sup> Формулировка и доказательство подобной теоремы выходит за рамки данной монографии.

дельных фрагментов, трансформации существующих математических аппаратов и открытия новых математических объектов.

Представляют определенный интерес и образы производной с сохранённым первоначальным масштабом. Например, при отображениях  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  и  $\backslash \omega_2 \rightarrow \omega_0 \backslash$  можно получить псевдообразы  $'f$ ,  ${}^P f$ . Реализуя замену операций  $\{+; -; \div\} \rightarrow \{\cdot, \div, \log\}$  ( $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$ ), получим

$$'f(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right), \quad (3.3)$$

а при замене операций  $\{+; -; \div\} \rightarrow \{\cdot, \log, \log\}$  ( $\backslash \omega_2 \rightarrow \omega_0 \backslash$ ), получим

$${}^P f(x) = \lim_{\delta_0 x \rightarrow 1} \log_{\delta_0 x} \log_{f(x)} f(x^{\delta_0 x}) \quad (3.4)$$

Нетрудно заметить равнозначность замены операций  $\{+; -; \div\} \rightarrow \{\cdot, \log, \log\}$  и  $\{+; -; \div\} \rightarrow \{\odot, \Delta, \log/\log\}$ .

**Примечание.** В дальнейшем это будет доказано.

Как уже указывалось, каждый образ производной может быть использован для формирования модифицированного математического анализа, являющегося  $\omega$ -образом общеизвестного аппарата. Рассматривая различные разделы математики как глобальные объекты, нетрудно получить инфинитный спектр новых трансформированных  $\omega$ -образов этих глобальных объектов, в основе которых, разумеется, лежат общеизвестные разделы (аппараты) математики. Причем, инфинитность достигается как за счет качественного изменения порядка  $\omega$ -отображения (из некоторого пространства  $\omega_j$  в пространство  $\omega_i$ ,  $j \neq i$ ), так и за счет инфинитности значений коэффициента  $k$ . Кроме того, применяя разные функции связи  $\mathbf{F}$ , можно менять в целом структуру  $\omega$ -отображений, что даёт неисчерпаемые возможности для оперирования с тем или иным локальным или глобальным объектом.

Однако, не только  $\omega$ -образы, но и  $\omega$ -псевдообразы (названные нами как образы производной, не приведенные к масштабу результирующего  $\omega$ -пространства) могут служить основой для создания специфичного модернизированного математического аппарата. Дело в том, что все  $\omega$ -псевдообразы входят как доминирующие компоненты (составляющие)

в соответствующие действительные  $\omega$ -образы производной, т.е. образы, приведенные к масштабу конечного результирующего  $\omega$ -пространства.

В заключение, заметим, что кажущаяся простота математических преобразований, наличие аналогий, возможность получения результата за счет элементарных подстановок и т.д. создает впечатление об *искусственности* существования образов производной, трудности получения за счет  $\omega$ -отображений каких-либо практических результатов. Разумеется, в какой-то степени, небольшие серии подстановок частично нивелируют результаты концепции  $\omega$ -отображений. Более же глубокое изучение этой теории в плоскости объектно-ориентированного математического моделирования может привести к интересным выводам. В первую очередь, это касается исследования инфинитных спектров различных  $\Delta$ -чисел, функций и интегро-дифференциальных объектов с аргументом, определенным в области  $\Delta$ -полей, а так же изучения сути трансформированных физических законов. В настоящей книге даны только отдельные инструктивные штрихи к получению подобных результатов и их осмысливанию. Автору представляется, что это безмерное неизведанное пространство, позволяющее любому любознательному читателю погрузиться в творчество и добиться, возможно, уникальных результатов. Собственно, это и является основной целью книги, о чем было сказано в “Предисловии”.

### §3.2 Образы $'f$ , $-f$ , $^p f$ .

Исследование образов начинаем с простейшего  $'f(x)$ .

**Определение 3.1.** *Неприведенным к масштабу результирующего пространства  $\omega_0$  образом  $'f(x)$  производной  $f'(x)$  непрерывной, монотонной положительной функции  $f(x)$  ( $f(x) > 0$ ), записанной в стандартном<sup>21</sup> виде в пространстве  $\omega_1$  называется выражение:*

$$'f(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right)$$

В параграфе 3.1 эта формула встречалась под номером (3.3).

---

<sup>21</sup> Стандартным видом производной называется общеизвестное выражение производной функции  $f(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Поясним формулу (3.3).  $x + \Delta x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus x \cdot \delta x$

$$\left( \Delta x = x - x_0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \delta x = \frac{x}{x_0} \right), \quad \text{а} \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$$

$$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right) \Delta \delta x = \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right)^{1/\log_k(\delta x)}$$

$(k \in \mathbf{R}_+, k \neq 1)$ .

Прологарифмируем это выражение:

$$\log_k \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right)^{1/\log_k(\delta x)} = \frac{\log_k \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right)}{\log_k(\delta x)} = \log_{(\delta x)} \left( \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} \right).$$

Откуда следует формула 3.3.

Замена операций  $\{+; -; \div\} \rightarrow \{\cdot, \div, \log\}$  при формировании образа  $'f(x)$  производной  $f'(x)$ , связанная с изменением масштаба объекта, влияет на все глобальные математические объекты, представленные в виде формул, теорем и отдельных разделов математики.

Установим связь между  $'f(x)$  и  $f'(x)$ .

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную  $f'(x)$ , то при  $x \neq 0$  и  $f(x) \neq 0$  связь между образом функции  $'f(x)$  и производной функции устанавливается с помощью формулы:

$$'f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \quad (3.5)$$

**Доказательство.** Раскроем неопределенность в формуле (3.3) по правилу Лопиталя:

$$'f(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{(\ln f(x \cdot \delta x) - \ln f(x))'_{\delta x}}{(\ln \delta x)'_{\delta x}}.$$

Здесь производные берутся по переменной  $\delta x$ , а не по  $x$  ( $x$ , как нетрудно догадаться, в данной ситуации не изменяется). Тогда

$$\begin{aligned} 'f(x) &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{f(x \cdot \delta x)} \cdot (f'(x \cdot \delta x))_{\delta x} \cdot (x \cdot \delta x)'_{\delta x} - (\ln f(x))'_{\delta x}}{\frac{1}{\delta x}} = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{f'_{\delta x}(x \cdot \delta x) \cdot x}{f(x \cdot \delta x)} \cdot \delta x = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (3.5) запишем некоторые свойства  $'f(x)$ :

$$\begin{aligned} 'f^n(x) &= n \cdot 'f(x) \quad (n = \text{const}); \quad 'f(\varphi(x)) = 'f_{\varphi} \cdot '\varphi_x; \quad \left( \prod_{i=1}^n f(x_i) \right)' = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( 'f(x_i) \right); \quad '(f(x) + g(x)) = '(f + g) = \frac{f \cdot f' + g \cdot g'}{f + g}; \quad \left( \frac{f}{g} \right)' = 'f - 'g; \\ '(\log_k^x) &= \frac{1}{\ln x}; \quad '(\sin x) = x \cdot \text{ctg } x; \quad '(\cos x) = -x \cdot \text{tg } x; \quad '(tg x) = \frac{2x}{\sin 2x}; \\ '(ctg x) &= -\frac{2x}{\sin 2x}; \quad '(c \pm x) = \frac{x}{c \pm x} \quad (c = \text{const}); \quad '(x^n) = n; \\ '(a^x) &= x \cdot \ln a; \quad '(e^x) = x; \quad '(\log_{\varphi}^f) = \frac{f}{\ln f} - \frac{\varphi}{\ln \varphi}; \quad '(c + n \cdot x) = \frac{n \cdot x}{c + n \cdot x}; \\ '(c + k \cdot x^n) &= \frac{k \cdot n \cdot x^n}{c + k \cdot x^n}; \quad '(f^{\varphi}) = '\varphi \cdot \ln f^{\varphi} + f \cdot \varphi \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Эта таблица может быть расширена следующим обобщением.

**Теорема 3.2.** Если  $f(g(x))$ ,  $g(x)$ ,  $'g_x$ ,  $'f_g$ ,  $'f_x$  непрерывны и не обращаются в 0 в некоторой области  $\mathbf{D}$  ( $x \in \mathbf{D}$ ), то в этой области



$$'f_x = 'f_g \cdot 'g_x \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Из (3.3) запишем  $'f_g$ :

$$'f_g = \lim_{\delta g \rightarrow 1} \log_{\delta g} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right) = \lim_{\delta g \rightarrow 1} \frac{\log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right)}{\log_{\delta x} \delta g}.$$

Так как  $\delta g = \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)}$   $\lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)} = 1$ , то

$$'f_g = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{\log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right)}{\log_{\delta x} \delta g} = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{\log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right)}{\log_{\delta x} \left( \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)} \right)}, \text{ а}$$

$$'g_x = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)}.$$

Найдем  $'f_g \cdot 'g_x$ :

$$'f_g \cdot 'g_x = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( \frac{\log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right)}{\log_{\delta x} \left( \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)} \right)} \cdot \log_{\delta x} \left( \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)} \right) \right).$$

В связи с тем, что выражение  $'f_g \cdot 'g_x$  имеет неопределённость вида

$$\frac{\log_1^1}{\log_1^1} \cdot \log_1^1, \text{ можно записать}$$

$$\begin{aligned}
'f_g \cdot g_x &= \frac{\left( \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right) \right) \cdot \left( \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{g(x \cdot \delta g)}{g(x)} \right) \right)}{\lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)} \right)} = \\
&= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{f(g \cdot \delta g)}{f(g)} \right) = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \frac{f\left(g \cdot \frac{g(x \cdot \delta x)}{g(x)}\right)}{f(g)} = \\
&= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \frac{f(g(x \cdot \delta x))}{f(g)} = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \frac{f(x \cdot \delta x)}{f(x)} = 'f_x.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

На основе  $\omega$ -псевдообраза производной  $'f(x)$  можно построить любой более глобальный математический объект. Например, сформулируем модифицированную теорему Лагранжа: *если функция  $f$  дифференцируемая в каждой точке выпуклой области  $\mathbf{G}$   $n$ -мерного евклидова пространства, то для каждой пары точек  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{G}$ ,  $x + \Delta x = (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \in \mathbf{G}$  существует такая точка  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , лежащая на отрезке с концами  $x$  и  $x + \Delta x$ , что*

$$\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} = \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) 'f_{x_i}(\xi_i). \quad (3.8)$$

Докажем теорему Лагранжа для функции одной переменной.

**Теорема 3.3** (теорема отношений).

*Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемая во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка  $[a, b]$  найдется по крайней мере одна точка  $\varepsilon$  ( $a < \varepsilon < b$ ), что*

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \left( \frac{b}{a} \right) 'f(\varepsilon) \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Обозначим  $Q$  число  $\log_{b/a} \left( \frac{f(b)}{f(a)} \right)$  и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \frac{f(x)/f(a)}{\left(\frac{x}{a}\right)^Q} = \frac{f(x)}{f(a) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^Q}.$$

$'F(\varepsilon) = 0$  (согласно второй модернизированной теореме Ролля<sup>22</sup>).

$$'F(x) = \left( \frac{f(x)}{f(a) \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^Q} \right)' = \left( \frac{1}{f(a)/a^Q} \right) \cdot (f(x) - Q) = 0$$

Значит  $'F(\varepsilon) = \frac{a^Q}{f(a)} \cdot (f(\varepsilon) - Q) = 0$ , т.е.  $Q = f(\varepsilon)$  и  $\frac{f(b)}{f(a)} = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\varepsilon)}$ ,

что и требовалось доказать.

В главе 5 “Разное (приложения)” приведены ещё доказательства образов теорем анализа.

Соблюдая строго последовательность соответствующей замены операций (например, для  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  и  $\omega$  – псевдообраза  $'f(x)$  эта замена такова:

$\{ +; -; \div; \sum_i; f'; \int f \cdot dx; \dots \} \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \{ \cdot; \div; \log; \prod_i; 'f; \ln \int (\delta x)^{x \cdot f}; \dots \}$ , можно переписать в новых терминах весь математический анализ. Конечно, в данном случае, не надо забывать, что процедура модифицирования анализа весьма проста, так как достаточно прологарифмировать конечный результат и провести некоторые замены переменных как мы получим обычные выражения из общеизвестного анализа.

<sup>22</sup> Эта теорема здесь не приводится, но может быть легко доказана читателем из общеизвестной.

Несмотря на это,  $\omega$ -образы анализов не только качественно отличаются от обычного, так как в основе их лежит *идентифицированная замена операций*, связанная с нелинейностью преобразований, но иногда содержат в себе совершенно новые интересные результаты.

**Определение 3.2.** *Неприведенным к масштабу  $\omega_0$  образом производной функции  $f = f(x)$ , полученным путем отображения в  $\omega_0$  производной из пространства  $\omega_2$  называется выражение:*

$$P_{f(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow k} \log_{\log_k \Delta x} \log_k (f(x \odot \Delta x) \Delta f(x)) \quad (3.10)$$

$P_f$  формируется заменой операций  $\{+, -, : \} \rightarrow \left\{ \odot, \Delta, \frac{\log}{\log} \right\}$  в выражении производной  $f'$ . Формула (3.10) является записью образа  $P_f$  в рефлексивных терминах.

**Лемма 3.1.** Образ  $P_f$  в обычных терминах записывается выражением:

$$P_{f(x)} = \lim_{\delta_0 x \rightarrow 1} \log_{\delta_0 x} \log_{f(x)} f(x \delta_0 x)^{23}$$

**Доказательство.** Обозначив в (3.10)  $\delta_0 x \equiv \Delta x$  и  $A = \log_k (f(x \odot \Delta x) \Delta f(x))$ , преобразуем  $A$ . При этом используем определение операций " $\odot$ " и " $\Delta$ ". Тогда  $A = \log_k (f(x^\alpha) \Delta f) = \log_k \left( \log f / \log k \sqrt[k]{f(x^\alpha)} \right) = \frac{\log_k f(x^\alpha)}{\log_k f} = \log_f f(x^\alpha)$ , где  $\alpha = \log_k \Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow k$ ), т.е.

$$P_{f(x)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \log_\alpha \log_{f(x)} f(x^\alpha) \quad (*)$$

Заменим переменную величину  $\alpha$  на  $\delta_0 x$ , учитывая что  $\delta_0 x$  стремится к 1 ( $\delta_0 x \rightarrow 1$ ). В результате (\*) совпадет с (3.4), что и требовалось доказать.

<sup>23</sup> В п 3.1 эта формула встречалась под номером (3.4).

Докажем модернизированное правило Лопиталья.

**Лемма 3.2** Пусть  $f_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$  и существует  $\lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{{}'f_1}{{}'f_2}$ , то

$$\lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \log_{f_2} f_1 = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{{}'f_1}{{}'f_2}. \quad (3.11)$$

Доказательство можно провести двумя способами:

$$\begin{aligned} \text{а). } \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \log_{f_2} f_1 &= \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{\ln f_1}{\ln f_2} = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{(\ln f_1)'}{(\ln f_2)'} = \\ &= \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{x \cdot (\ln f_1)'}{x \cdot (\ln f_2)'} = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{{}'f_1}{{}'f_2}, \text{ что и требовалось доказать.} \end{aligned}$$

б).  $'f(x) = \log_{\delta x} \delta f(x)$  – это запись образа  $'f$  через дифференциалы.

Она вполне согласуется с образом дифференциала функции:

$$\delta f(x) = \delta x {}'f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда из } \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \log_{f_2} f_1 &\Rightarrow \lim_{(\delta f_1, \delta f_2) \rightarrow 1} \log_{\delta f_2} \delta f_1 = \\ &= \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \log_{(\delta x) {}'f_2} (\delta x) {}'f_1 = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{{}'f_1}{{}'f_2} \cdot \log_{(\delta x)} (\delta x) = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{{}'f_1}{{}'f_2}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.4.** Неприведенные образы производной  $'f$  и  ${}^P f$  связаны соотношением  ${}^P f = {}'f \cdot \log_f^x$  (3.12).

**Доказательство.** Выведем формулу (3.12) двумя способами: используя выражения  ${}^P f$  в рефлексивных (3.10) и обычных (3.4) терминах.

а). В *рефлексивных* терминах для раскрытия неопределенности типа “ $\log_1^1$ ” в (3.10) применим модернизированное (заменой  $f'$  на  $'f$ ) правило Лопиталья:

$${}_p f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow k} \frac{{}'(\log_k(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x)))}{{}'(\log_k \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow k} \frac{{}'(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x)) \cdot \ln \Delta x}{\ln(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x))}.$$

Заметим, что

$$'(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x)) = \left( (\log f(x) / \log k) \sqrt{f(x \odot \Delta x)} \right)^{24}$$

$$= (\log_k f(x))^{-1} \cdot 'f(x \odot \Delta x), \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} {}_p f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow k} \frac{\ln \Delta x \cdot 'f(x \odot \Delta x)}{\log_k f(x) \cdot \ln(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x))} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow k} \frac{\log \Delta x}{\log(f(x \odot \Delta x) \Delta f(x))} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow k} \frac{'f(x \odot \Delta x)}{\log_k f(x)}. \end{aligned}$$

Из записи образа  $'f$  производной через дифференциалы следует:

$$'f(x \odot \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow k} \log_{\delta(x \odot \Delta x)}^{\delta f(x \odot \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow k} \log_{\delta(\Delta x)}^{\delta(x \odot \Delta x)}.$$

$$\text{Тогда } {}_p f = \frac{1}{\log_k f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow k} \log_{\delta(x \odot \Delta x)}^{\delta f(x \odot \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow k} \log_{\delta(\Delta x)}^{\delta(x \odot \Delta x)}$$

---

<sup>24</sup>  $'(x^a) = a \quad (a = \text{const})$  и  $'\left((f(x \boxtimes \Delta x))^{\log k / \log f}\right) = (\log_k f)^{-1} \times$   
 $\times 'f(x \boxtimes \Delta x).$

Так как  $\log_{\delta x}^{\delta f} = 'f$ , то

$${}_P f = \frac{1}{\log_k f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow k} 'f(x \odot \Delta x) \cdot '(x \odot \Delta x)_{\Delta x}.$$

В связи с тем, что  $'(x \odot \Delta x)_{\Delta x} = '(\Delta x^{\log_k(x)})_{\Delta x} = \log_k x$ , то

$${}_P f = 'f(x) \cdot \log_f x,$$

что и требовалось доказать.

б). Выведем формулу (3.12), используя образ  ${}_P f$ , записанный в обычных терминах (3.4). Для раскрытия неопределенности " $\log_1^1$ " применим правило Лопиталя для производной  $f'$ :

$$\begin{aligned} {}_P f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{(\ln \log_f f(x^{\Delta x}))'_{\Delta x}}{(\ln(\Delta x))'_{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{\Delta x \cdot (\log_f f(x^{\Delta x}))'_{\Delta x}}{\log_f f(x^{\Delta x})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{\Delta x \cdot (\ln f(x^{\Delta x}))'_{\Delta x}}{\ln f(x^{\Delta x})}. \end{aligned}$$

По определению образа  $'f$  ( $'f = x \cdot f' / f = x \cdot (\ln f)'$ ):

$${}_P f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{(f(x^{\Delta x}))'_{\Delta x}}{\ln f(x^{\Delta x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{(f(x^{\Delta x}))_{x \Delta x} \cdot '(x^{\Delta x})_{\Delta x}^{25}}{\ln f(x^{\Delta x})}.$$

---

<sup>25</sup> Где  $'f(x^{\Delta x}) = \log_{\delta(x^{\Delta x})}^{\delta f(x^{\Delta x})}$ , а  $'(x^{\Delta x}) = \log_{\delta(\Delta x)}^{\delta(x^{\Delta x})}$ .

Заметим, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 1} {}' (x^{\Delta x})_{\Delta x} = \ln x$   $\left( {}' (a^x) = x \cdot \ln a, \text{ где } a = \text{const} \right)$ . Тогда

$${}_p f = \frac{\ln x}{\ln f(x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \log_{\delta(x^{\Delta x})}^{\delta f(x^{\Delta x})} = {}' f(x) \cdot \log_f x,$$

что и требовалось доказать.

**Определение 3.3** Приведенным к масштабу  $\omega_0$  образом производной от функции  $f = f(x)$ , полученным путем отображения в  $\omega_0$  производной из пространства  $\omega_1$  называется выражение:

$${}_-' f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \Delta(\Delta x) \quad (3.13)$$

${}_-' f$  формируется заменой операций  $\{+, -, \div\} \rightarrow \{\cdot, \div, \Delta\}$  в выражении производной  $f'$ .

**Теорема 3.5** Приведенный  ${}_-' f$  связан с неприведенным образом  ${}_' f$  соотношением:

$${}_-' f = k {}' f. \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Прологарифмируем (3.13):

$$\log_k {}_' f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \log_k \left( \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \Delta(\Delta x) \right).$$

Преобразуем это выражение, обозначив  $\log_k {}_' f(x) = C$ . Из определения действия  $\Delta$  следует, что

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \log_k \left( \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\log_k(\Delta x)}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \left( \log_k^{\Delta x} \right)^{-1} \cdot \log_k \left( \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \log_{\Delta x} \left( \frac{f(x \cdot \Delta x)}{f(x)} \right), \text{ т.е. } C = {}' f(x) \text{ (по определению } {}' f \text{)}. \end{aligned}$$



Откуда  $'f = k'f$ , что и требовалось доказать.

**Примечание.** Легко записать таблицу. Например,  $'f : ' (x^n) = k^n$ ,

$$'(u \cdot v) = 'u \cdot 'v, \quad '\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{'u}{'v}, \quad '(\log_a x) = k^{1/\ln x} = \exp\left(\frac{1}{\log_k x}\right),$$

$$'(a^x) = a^{x/\log_k e} = (a^x)^{\ln k}, \quad '(e^x) = k^x, \quad '(\sin x) = k^{x \cdot \text{ctg } x} \text{ и т.д..}$$

**Теорема 3.6** Пусть  $f_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$  и существует

$$\lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{'f_1 \Delta 'f_2}{f_1 \Delta f_2}, \text{ то } \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} f_1 \Delta f_2 = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} 'f_1 \Delta 'f_2 \quad (3.15)$$

**Доказательство.** Через дифференциалы образ  $'f$  записывается так:

$$'f = \delta f(x) \Delta \delta x \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} f_1 \Delta f_2 &= \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \delta f_1 \Delta \delta f_2 = \\ &= \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} ('f_1 \odot \delta x) \Delta ('f_2 \odot \delta x) = \lim_{(f_1, f_2) \rightarrow 1} \frac{'f_1 \Delta 'f_2}{f_1 \Delta f_2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Найдем образ  $'f$  производной от сложной функции.

**Теорема 3.7** Пусть  $f_1 > 0$ ,  $f_2 > 0$  и существуют  $'f_2$ ,  $'f_1(f_2(x))$ ,

то

$$'f_1(f_2(x)) = ('f_2(x))'f_1(f_2(x)) \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Найдем образ производной  $\underline{f}_1(f_2(x))$  в рефлексивных терминах:

$$\begin{aligned} \underline{f}_1(f_2(x)) &= \delta(f_1(f_2(x))) \Delta \delta x = \\ &= (\delta f_1(f_2(x)) \Delta \delta f_2(x)) \odot (\delta f_2(x) \Delta \delta x) = f_1(f_2(x)) \odot \underline{f}_2(x), \text{ где} \\ f &\text{ — производная от первообразной } f_1(x), \text{ а} \end{aligned}$$

$$\underline{f}_2(x) = \delta f_2 \Delta \delta x$$

Тогда  $\underline{f}_1(f_2(x)) = k \underline{f}_1(f_2(x)) \cdot \underline{f}_2(x) = (k \underline{f}_2(x)) \underline{f}_1(f_2(x)) =$

$$= (\underline{f}_2(x)) \underline{f}_1(f_2(x)), \text{ что и требовалось доказать.}$$

**Примечание.** Доказательство (3.17) можно реализовать, используя обычную терминологию:

$$\underline{f}_1(f_2(x)) = k \underline{f}_1(f_2(x)) = k \underline{f}_1(f_2(x))_{f_2} \cdot \underline{f}_2(x) = (\underline{f}_2(x)) \underline{f}_1(f_2(x))$$

**Теорема 3.8** Приведенный образ в  $\omega_0$  производной логарифмической функции из пространства  $\omega_1$  в рефлексивных терминах записывается так:

$$\underline{y} = \Delta x \odot \text{ilog}_a(k^e), \quad (3.18)$$

где  $y = \log_a x$  ( $\log_a x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \text{ilog}_a x$ ).

**Доказательство.** Образ в  $\omega_0$  производной логарифмической функции  $y = \log_a x$ , записанной в  $\omega_1$ :  $\underline{y} \cdot \underline{\Delta y} = \text{ilog}_a(x \cdot \Delta x)$ , где  $\underline{y} = \text{ilog}_a x$ , т.к.  $\underline{y}$  — образ  $y$  в  $\omega_0$ , и

$$\begin{aligned} \underline{\Delta y} &= \frac{\text{ilog}_a(x \cdot \Delta x)}{\text{ilog}_a x} = \text{ilog}_a(x \cdot \Delta x) \Delta x = \text{ilog}_a((x \Delta x) \cdot (\Delta x \Delta x)) = \\ &= \text{ilog}_a(k \cdot (\Delta x \Delta x)). \text{ Обозначив } \Delta x \Delta x = \alpha \quad (\Delta x = \alpha \odot x), \text{ запишем:} \end{aligned}$$

$$\underline{y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \left( (\alpha \Delta(\Delta x)) \odot \text{ilog}_a(k \cdot \alpha)^{\Delta \alpha} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \left( \Delta x \odot \text{ilog}_a(k \cdot \alpha)^{\Delta \alpha} \right) =$$

$$= \Delta x \odot \lim_{\alpha \rightarrow 1} \text{ilog}_a (k \cdot \alpha)^{\Delta \alpha} = \Delta x \odot \text{ilog}_a \left( \lim_{\alpha \rightarrow 1} (k \cdot \alpha)^{\Delta \alpha} \right) = \Delta x \odot \text{ilog}_a k^e,$$

что и требовалось доказать.

**Примечание.** Найдем  $\omega$ -образ замечательного предела

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e. \quad \text{Очевидно, что } e \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^e, \quad \text{а}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus L = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (k \cdot \alpha_1)^{\rightarrow (k \Delta \alpha_1)} \Rightarrow \log_k L =$$

$$= \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (1 + \log_k \alpha_1)^{\log_k p}, \quad \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} p = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} \Delta \alpha_1 = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} k^{1/\log_k \alpha_1} = \infty,$$

$$\text{т.е. } \log_k L = e \text{ и } L = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (k \cdot \alpha_1)^{\rightarrow (k \Delta \alpha_1)} = k^e.$$

(Поясним это равенство, переводя *рефлексивную* символику в *обычную*. Так как  $a^{\rightarrow b} = a^{(\log_k a)^{\log_k b}}$ , то  $(k \cdot \alpha_1)^{\rightarrow (k \Delta \alpha_1)} =$

$$= (k \cdot \alpha_1)^{(\log_k (k \cdot \alpha_1))^{\log_k (k \Delta \alpha_1)}}. \quad \text{Замечая, что } \log_k (k \cdot \alpha_1) = 1 + \log_k \alpha_1,$$

а  $k \Delta \alpha_1 = k^{1/\log_k \alpha_1}$  и обозначив  $\log_k \alpha_1 = \alpha_2$ , получим:

$$L = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (k \cdot \alpha_1)^{(1 + \alpha_2)^{1/\alpha_2}} = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (k \cdot \alpha_1)^e = k^e,$$

так как  $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} \alpha_2 = \lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} \log_k \alpha_1 = 0$ , а  $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (1 + \alpha_2)^{1/\alpha_2} = e$ .

Равенство  $\lim_{\alpha_1 \rightarrow 1} (k \cdot \alpha_1)^{\rightarrow (k \Delta \alpha_1)} = k^e$  доказано.

### §3.3 Образ $f$ .

Пусть в  $\omega_{-1}$  имеется производная функции  $f(x)$ :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для формирования ее образа  $f'(x)$  в пространстве  $\omega_0$  необходимо отобразить  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  все компоненты (объекты  $O_k$ ) формулы производной. Известно, что отображение  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  функции  $f(x)$  запишется как  $k^{f(\log_k x)}$ , т.е.  $f(x) \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus k^{f(\log_k x)}$ . Тогда обратным отображением функции  $k^{f(\log_k x)}$  будет функция  $f(x)$ :  $k^{f(\log_k x)} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus f(x)$ . Как видно, для обратного отображения необходимо заменить  $\log_k x$  на  $x$  и вместо  $k^{f(x)}$  записать  $f(x)$ . В силу равнозначности (см. “Лемма 2.12”) отображений  $\omega_0 \rightarrow \omega_{-1}$  и  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  ( $\omega$ -отображения, как указывалось выше, инвариантны относительно индекса  $\omega$ -пространств) можно записать:

$$k^{f(\log_k x)} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x).$$

Отобразим  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  объект

$$\Phi(x) = \log_k \left( k^{f(\log_k (k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)} \right).$$

Для этого согласно вышеизложенному изменим элементы объекта  $\Phi(x)$ :  $k^x \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus x$ ,  $k^{\delta x} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta x$  ( $\delta x$  превращается в  $\Delta x$ , так как изменяется предел, к которому стремится приращение аргумента),

$$k^{f(\log_k (k^x + k^{\delta x}))} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x + \Delta x),$$

$$k^{f(x)} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x).$$

**Примечание.** Кажущееся противоречие  $k^{f(\log_k x)} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus$   
 $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x)$  и  $k^{f(x)} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x)$  объясняется просто.

В первом случае, функция  $k^f(\log_k x)$  трансформируется в две стадии (фазы):

а) приведение значения аргумента, которым является  $\log_k x$  к масштабу пространства  $\omega_0$  ( $\log_k x \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus x$ );

б) приведение значений функции к масштабу  $\omega_0$   $k^{f(x)} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x)$ .

Во втором случае,  $\omega$  – отображение осуществляется только в одну стадию; так как первая фаза уже реализована. Итак,

$$\Phi(x) \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f(x + \Delta x) - f(x).$$

В данном случае, можно было бы записать  $\Phi(x) = \log_k Z$ , где  $Z = k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)}$ . Откуда  $\log_k Z \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{Z}$ , где  $\underline{Z}$  – образ функции  $\log_k Z$ . По аналогии с вышеизложенным отображение объекта  $\Phi(x)$  осуществляется в две стадии: сначала отображаем  $Z$  в связи с тем, что  $Z$  – сложная функция, а не простой аргумент; затем, рассматривая образ  $Z$  ( $\underline{Z}$ ) как независимую переменную отображаем  $\log_k \underline{Z}$ , опуская  $\log_k$ . Однако, для завершения

формирования образа  $f'(x)$  производной  $f'(x)$ , требуется установить еще два факта: а) к какому значению стремится в пределе приращение аргумента  $\delta x$ ; б) во что превратится операция деления при отображении

$\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus$ . Оба факта устанавливаются из формулы производной. Действительно,  $\Delta x \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k \Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_k \Delta x = (-\infty)$  но

$\Delta x \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \delta x$ , т.е.  $\delta x \rightarrow (-\infty)$ . Наконец,  $- \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_{-1} \setminus \div$ , т.е.

$\div \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus -$ . Тогда  $f'(x) \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus f'(x) =$

$$= \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \log_k \left( k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)} \right) - \delta x \right).$$

Всё это позволяет дать следующее определение.

**Определение 3.4.** Образом в  $\omega_0$  производной  $f'(x)$ , записанной в пространстве  $\omega_{-1}$  называется выражение

$$\overset{0}{f}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \log_k \left( k^f \left( \log_k \left( k^x + k^{\delta x} \right) \right) - k^{f(x)} \right) - \delta x \right)$$

В терминах  $\omega_{-1}$  – пространства  $\overset{0}{f}(x)$  выглядит так:

$$\overset{0}{f}(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} (f(x \oplus \delta x) \ominus f(x)) \oslash \delta x,$$

т.е. в данном случае при отображении  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  реализуется следующая замена операций:

$$\{+, -, \div\} \rightarrow \{\oplus, \ominus, \oslash\},$$

где  $\oplus, \ominus, \oslash$  – соответственно образы операций  $+, -, \div$  при отображении  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$ .

**Теорема 3.9.** Образ  $\overset{0}{f}(x)$  функции  $f(x)$ , непрерывной, монотонной на некотором промежутке области её определения  $I$  ( $J \in I$ ), связан с исходной производной  $f'(x)$  следующей формулой, справедливой на промежутке  $J$ :

$$f'(x) = k^{\overset{0}{f}(x) - f(x) + x}, \quad (3.19)$$

где  $k$  – коэффициент перехода между пространствами  $\omega_{-1}$  и  $\omega_0$  ( $k \neq 1$ ).

**Доказательство.** Пусть выполнены все условия для функции  $f(x)$  и  $k \in \mathbf{R}_+$ ,  $k \neq 1$ . Обозначим за  $A$  предел

$$\lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \log_k \left( k^f \left( \log_k \left( k^x + k^{\delta x} \right) \right) - k^{f(x)} \right) - \delta x \right).$$

Имеющаяся неопределенность имеет вид  $\infty - \infty$ . Пусть  $\varphi = \log_k \left( k^f \left( \log_k \left( k^x + k^{\delta x} \right) \right) - k^{f(x)} \right)$ ,  $\psi = \delta x$ . Тогда

$$A = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} (\varphi - \psi) \Rightarrow B = k^A = k^{\left( \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} (\varphi - \psi) \right)} =$$

$= \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \frac{k^\varphi}{k^\psi}$ . Получили неопределенность  $\frac{0}{0}$ , которую раскрываем по правилу Лопиталя:

$$B = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \left( \frac{k^\varphi \cdot \varphi'}{k^\psi \cdot \psi'} \right). \quad \text{Так как } k^\varphi = k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)}, \quad \text{то} \quad \varphi' = \frac{k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} \cdot f'(\log_k(k^x + k^{\delta x}))}{k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} - k^{f(x)}}, \quad \psi' = 1,$$

$$k^\psi = k^{\delta x}.$$

$$B = \lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} \frac{k^{f(\log_k(k^x + k^{\delta x}))} \cdot f'(p) \cdot p'}{k^{\delta x}},$$

где  $p = \log_k(k^x + k^{\delta x})$ , т.е.

$$B = \frac{k^{f(x)} \cdot f'(x)}{\lim_{\delta x \rightarrow (-\infty)} (k^x + k^{\delta x})} = \frac{k^{f(x)} \cdot f'(x)}{k^x}.$$

$$\text{Откуда } A = \log_k B = f(x) - x + \log_k f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0}{f(x) - f(x) + x} = \log_k f'(x), \quad \text{т.е.}$$

$$f'(x) = k^{\frac{0}{f(x) - f(x) + x}},$$

что и требовалось доказать.

**Примечание.** Из сравнения выражений  $f'(x) = k^{\frac{0}{f(x) - f(x) + x}}$  и  $f' = k^{(f' \cdot x)/f}$  следует идентичность  $f'$  и  $f'$  для  $\omega$  — пространств разного индекса с учетом изменения порядка (ранга) операций. Действитель-

но, заменив соответственно в формуле (3.19) операции  $\{-; +\}$  на  $\{\div; \cdot\}$ , получим вместо зависимости  $f'$  и  $\overset{0}{f}$  зависимость  $\overset{0}{f}$  и  $f'$ .

Нетрудно, составить таблицу  $\overset{0}{f}(x)$ . Например, для  $f(x) = c = \text{const}$   $\overset{0}{f} = -\infty$ ; для  $f = x$   $\overset{0}{f} = 0$ ; для  $f = x^n$   $\overset{0}{f} = x^n - x + (n-1) \cdot \log_k x + \log_k n$ ; для  $f = a^x$   $\overset{0}{f} = a^x - x + x \cdot \log_k a + \log_k \ln a$ ;  $f = e^x$   $\overset{0}{f} = e^x - 0,57 \cdot x$ ;  $\overbrace{(f + \varphi)}^0 = (f + \varphi) - x + \log_k (f + \varphi)$ ;  $\overbrace{(f \cdot \varphi)}^0 = f \cdot \varphi - x + \log_k (f \cdot \varphi)$  и т. д.

Формирование образа  $\overset{0}{f}$  позволяет дополнить пункт 3.1 настоящей главы формулировкой следующей теоремы, которая поможет, в какой-то степени, глубже понять общую концепцию  $\omega$ -отображений сложных функциональных конструкций.

**Теорема 3.10.** Пусть на множестве аргументов  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  с областями определения  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  задана сложная функция  $Y = \Psi(f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)))$ , причем существует область  $J$ , в которой определены все функции  $(\psi, f, \varphi)$ . Тогда при отображении  $\omega_j \rightarrow \omega_i$  с функцией связи  $F(x)$  между пространствами  $\omega_j$  и  $\omega_i$  получается образ  $Y^*$  функции  $Y$  в виде выражения:

$$Y^* = F\left(\psi\left(F^{-1}\left(f\left(F\left(\varphi\left(F^{-1}(x_1), F^{-1}(x_2), \dots, F^{-1}(x_n)\right)\right)\right)\right)\right)\right). \quad (3.20)$$

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, которое выходит за рамки данной монографии, отметим некоторые важные моменты). Формирование любого  $\omega$ -образа сложной функции начинается с отображения множества аргументов  $X$ :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus \omega_j \rightarrow \omega_i \setminus X^* = \{F^{-1}(x_1), F^{-1}(x_2), \dots, F^{-1}(x_n)\},$$

т.е. каждый аргумент  $x_k$  нужно записать в виде функции  $F^{-1}(x_k)$ , об-



ратной функции связи  $F(x)$ .

б). Затем находится  $\omega$ -образ функции  $\varphi$  (первой внутренней функции) в виде  $F\left(\varphi\left(F^{-1}(x_1), F^{-1}(x_2), \dots, F^{-1}(x_n)\right)\right)$ , т.е. записывается функция связи  $F$ , а аргументом ее является функция  $\varphi$  с трансформированными аргументами  $\left(F^{-1}(x_1), F^{-1}(x_2), \dots, F^{-1}(x_n)\right)$ .

в). Наконец, записывается последовательно все внутренние функции (в нашем случае, это только  $f$  – вторая внутренняя функция) и внешняя функция  $\psi$ . При этом идет последовательное чередование зависимостей  $F$  и  $F^{-1}$ . В итоге, в записи фигурируют прямая функция  $F$  и обратная ей  $F^{-1}$ .

г). Доказательство теоремы основано на отмеченном в лемме 1.1 факте:

$$f(x) \setminus \omega_j \rightarrow \omega_i \setminus F\left(f\left(F^{-1}(x)\right)\right),$$

где  $F(x)$  – функция связи.

Постепенно усложняя в соответствии с (3.20) структуру функции  $f(x)$ , можно получить требуемый результат. Например, простейшее  $\omega$  – отображение функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будет таково:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$$

$$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus F\left(f\left(F^{-1}(x_1), F^{-1}(x_2), \dots, F^{-1}(x_n)\right)\right).$$

**Примечание.** Конструировать функцию надо таким образом, чтобы сумма внешней и всех внутренних функций была нечетной.

### §3.4 Смежные $\omega$ -пространства и образ $f_{k2}'$ .

В связи с произвольностью выбора константы  $k$  (единственные условия, которым она должна удовлетворять - это  $k \neq 1$  и, в простейшем случае,  $k \in \mathbf{R}$ ) по этому признаку ( $k$ ) можно получить инфинитный спектр смежных  $\omega$ -пространств. Меняя значение  $k$ , мы всегда получаем новое  $\omega$ -пространство.

Пусть известные математические объекты расположены в пространствах  $\omega_i$  и  $\omega_i'$ , которые связаны с пространством  $\omega_1$  функцией  $k^x$  ( $k_1^x$  — для  $\omega_i$  и  $k_2^x$  — для  $\omega_i'$ ). Рассмотрим процедуру отображения объектов из пространства  $\omega_i'$  в пространство  $\omega_i$  (или наоборот). Если объектом является число  $a$  (в  $\omega_1$ ), то очевидно  $a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_i \setminus k_1^a$  и  $a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_i' \setminus k_2^a$ . Тогда  $k_2^a \setminus \omega_i' \rightarrow \omega_i \setminus k_1^a$ . Обозначив  $a_i' = k_2^a$ ,  $a_i = k_1^a$ , получим  $a = \log_{k_2} a_i' = \log_{k_1} a_i$ , т.е.  $a_i' = k_2^{\log_{k_1} a_i}$ , а  $a_i = k_1^{\log_{k_2} a_i'}$ . Итак,  $a_i' \setminus \omega_i' \rightarrow \omega_i \setminus k_1^{\log_{k_2} a_i'} = (a_i')^{1/p}$  (3.21)

$$a_i \setminus \omega_i \rightarrow \omega_i' \setminus k_2^{\log_{k_1} a_i} = (a_i)^{p_1},$$

где  $p_1 = \log_{k_1} k_2$ .

Пусть в  $\omega_i$  задана функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Найдем формулу  $\omega$ -перехода этой функции в некоторое пространство  $\omega_i'$ .

**Теорема 3.11.** Если в пространстве  $\omega_i$  записана функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то при  $\omega$ -отображении ее  $\setminus \omega_i \rightarrow \omega_i' \setminus$  из одного пространства в смежное<sup>26</sup> пространство  $\omega_i'$  функция  $f$  трансформируется в следующую  $P\sqrt{f(x_1^P, x_2^P, \dots, x_n^P)}$ , где  $p = \log_{k_2} k_1$ , а  $k_1$  и  $k_2$  — соответственно коэффициенты перехода между пространствами  $\omega_i, \omega_i'$  и пространством  $\omega_1$ , т.е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_i' \setminus P\sqrt{f(x_1^P, x_2^P, \dots, x_n^P)} \quad (3.22)$$

---

<sup>26</sup> Итак,  $\omega$  — пространства  $(\omega_i)$  с различным значением  $k$  в функции связи  $k^x$  будем называть смежными. Переход от одного смежного  $\omega$  — пространства к другому назовем горизонтальным  $\omega$  — отображением.

**Доказательство.** Пусть коэффициенты (параметры) перехода из  $\omega_1$  в пространства  $\omega_i$  и  $\omega_i'$  соответственно равны  $k_1$  и  $k_2$ . Отобразим функцию  $f$  из  $\omega_i$  в  $\omega_1$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i \rightarrow \omega_1 \setminus \log_{k_1} f(k_1^{x_1}, k_1^{x_2}, \dots, k_1^{x_n}).$$

Отобразим полученный образ функции  $f$  в пространство  $\omega_i'$ :

$$\log_{k_1} f(k_1^{x_1}, k_1^{x_2}, \dots, k_1^{x_n}) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_i' \setminus \log_{k_1} f(k_1^{x_1^*}, k_1^{x_2^*}, \dots, k_1^{x_n^*})$$

Аргументы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  изменяются в  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , где  $x_1^* = \log_{k_2} x_1, x_2^* = \log_{k_2} x_2, \dots, x_n^* = \log_{k_2} x_n$ , т.е.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \setminus \omega_i &\rightarrow \omega_i' \setminus \log_{k_1} f(k_1^{\log_{k_2} x_1}, k_1^{\log_{k_2} x_2}, \dots, k_1^{\log_{k_2} x_n}) = \\ &= k_2^{\log_{k_1} f} \left( (k_1)^{\frac{\log_{k_1} x_1}{\log_{k_1} k_2}}, (k_1)^{\frac{\log_{k_1} x_2}{\log_{k_1} k_2}}, \dots, (k_1)^{\frac{\log_{k_1} x_n}{\log_{k_1} k_2}} \right) = \\ &= k_2^{\log_{k_1} f} \left( x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p \right), \text{ где } p = \log_{k_2} k_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Наконец, преобразуем } k_2^{\log_{k_1} f} \left( x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p \right) &= \\ = k_2^{\left( \left( \log_{k_2} f \left( x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p \right) \right) / \log_{k_2} k_1 \right)} &= p \sqrt[p]{f(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 3.12.** Если функция  $f(x)$ , ее производная  $f'(x)$  и псевдообраз производной  $f'(x)$  непрерывны и дифференцируемые в некоторой

области  $D$  и в этой области  $x \neq 0$  и  $f(x) \neq 0$ , то образ в  $\omega_0'$  производной  $f'(x)$ , записанной в пространстве  $\omega_0$  определяется по формуле

$$f'_{k_2}(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot f'_{k_1}(x)}{f(x)} \right)^p, \quad (3.23)$$

где  $f'_{k_1} \equiv f'(x)$ ,  $p = \log_{k_2} k_1$ ,  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты связи смежных пространств  $\omega_0$  и  $\omega_0'$  с пространством  $\omega_1$ .

**Доказательство.** Отображая  $f'(x)$  из пространства  $\omega_1$  в смежные  $\omega_0$  и  $\omega_0'$ , получим следующие образы:

$$\begin{aligned} f'(x) \setminus \omega_1 &\rightarrow \omega_0 \setminus k_1 \quad f'_{k_1}(x) = \cdot f_{k_1} \\ f'(x) \setminus \omega_1 &\rightarrow \omega_0' \setminus k_2 \quad f'_{k_2}(x) = \cdot f_{k_2}. \end{aligned}$$

Из формулы (3.22) следует:

$$k^\varphi \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \sqrt[p_1]{k \varphi^{p_1}} = k \left( \varphi^{p_1} \right) / p_1,$$

где  $p_1 = \frac{1}{p} = \log_{k_1} k_2$ ,  $k = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi(x)$  – некоторая непрерывная функция.

Образ в  $\omega_0$  производной  $f'(x)$ , записанной в  $\omega_1$ :

$$\cdot f_{k_1} = k_1 \cdot f_{k_1}(x) \Rightarrow k_1 \cdot \frac{f' \cdot x}{f} = \cdot f_{k_1} \Rightarrow f' = \frac{f}{x} \cdot \log_{k_1} \cdot f_{k_1}.$$

Найдем:

$$k_2 \cdot f_{k_2}(x) \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus k_2 \left( \left( \cdot f_{k_2}(x) \right)^{p_1} \right) / p_1.$$

С другой стороны,

$$'f_{k_2} \backslash \omega_0' \rightarrow \omega_0 \backslash 'f_{k_1}, \quad \text{т.е.}$$

$$'f_{k_1} = k_2 \left( \left( 'f_{k_2}(x) \right)^{p_1} \right) / p_1 \Rightarrow k_1 \frac{f' \cdot x}{f} = k_2 \left( \left( 'f_{k_2}(x) \right)^{p_1} \right) / p_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f' \cdot x}{f} = \log_{k_1} k_2 \left( \left( 'f_{k_2}(x) \right)^{p_1} \right) / p_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot \log_{k_1} k_2 \left( \left( 'f_{k_2}(x) \right)^{p_1} \right) / p_1 =$$

$$= \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{\left( 'f_{k_2}(x) \right)^{p_1}}{p_1} \cdot \log_{k_1} k_2 = \frac{f(x)}{x} \cdot p \sqrt[p]{'f_{k_2}(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} \right)^p = 'f_{k_2}(x), \quad \text{т.е.} \quad \left( 'f_{k_1}(x) \right)^{\log_{k_2} k_1} = 'f_{k_2}(x).$$

$$\text{Так как} \quad 'f_{k_2}(x) = \frac{x \cdot f'_{k_2}(x)}{f(x)}, \quad f'(x) \equiv f'_{k_1}(x), \quad \text{а}$$

$$p = \frac{1}{p_1} = \log_{k_2} k_1, \quad \text{то} \quad f'_{k_2}(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot f'_{k_1}(x)}{f(x)} \right)^p, \quad \text{что и требо-}$$

валось доказать.

**Примечание.** На основании вышеизложенного можно записать дилатационный образ в  $\omega_0$  производной, получаемый при отображении из любого пространства  $\omega_i$ :

$$f' \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus [i]_f = \lim_{\delta x \rightarrow \alpha} {}^{i+1}_3 \mathfrak{R}_{\delta x} \left( {}^i_3 \mathfrak{R}_f \left( f \left( {}^i_1 \mathfrak{R}_x^{\delta x} \right) \right) \right), \quad (3.24)$$

где  $\alpha$  — нейтральный (нулевой) элемент,  $\mathfrak{R}$  — символ, введённый для записи формулы инвариантных относительно  $\omega$ -пространств (см. “Обозначения”).

Если идёт отображение в  $\omega_0$  из смежного пространства  $\omega_i'$ , причём запись ведётся в терминах образа  $[i]_f$ , то необходимо выражение (3.24) подставить в (3.23) вместо  $f'_{k_1}$ . Тогда  $[i]_f{}_{k_2}(x) \equiv f'_{k_2}(x)$  будет искомым результатом, т.е. процедура учёта смежности пространства в данном случае достаточно проста.

Представляет интерес интегрирование в смежных пространствах, так как специфика полученных формул при  $\omega$ -отображениях интегральных объектов, позволяет иногда решать весьма сложные задачи. В настоящей главе приведен лишь небольшой фрагмент этого незаконченного исследования, но, по мнению автора, нижеизложенного текста достаточно, чтобы получить первоначальные навыки и импульс для творческого развития данного направления интегрирования.

Начнем с общеизвестных рассуждений. Пусть в пространстве  $\omega_0$  задан

определенный интеграл  $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ . Геометрически его можно интерпретировать как площадь  $S_*$  криволинейной трапеции  $ABCD(a)$ .

Для получения такого результата в математическом анализе  $S_*$  аппроксимируют площадью ступенчатой фигуры  $(\delta)$  и затем берут ее предел при условии, что длина максимального элементарного отрезка  $(\max \Delta x_i)$  стремится к нулю, т.е.

$$I = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \Phi(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$

где  $\xi_i \in \Delta x_i$ ;  $\alpha, \beta$  – пределы интегрирования;  $\Phi(x)$  – первообразная функция ( $\Phi'(x) = f(x)$ ).

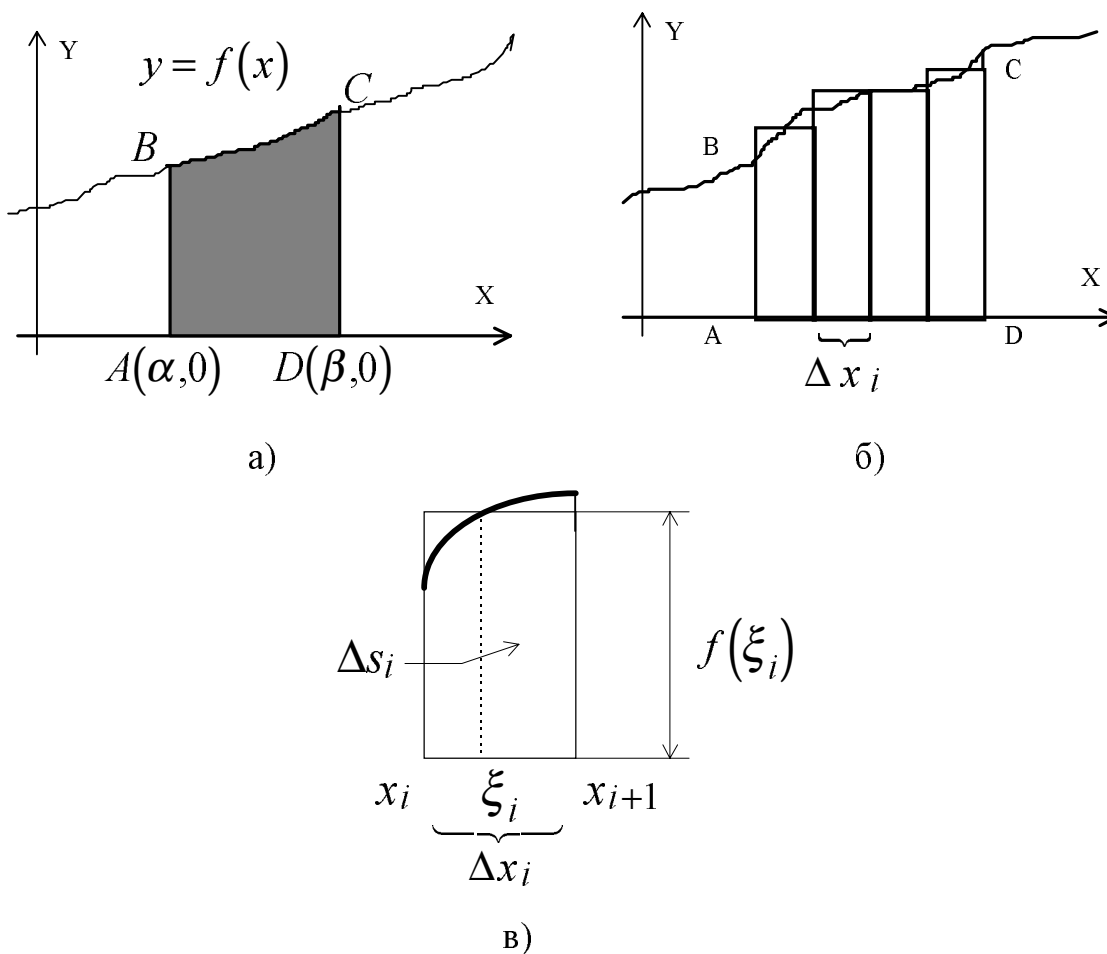


Рис. 2. Криволинейная трапеция ABCD (а), ее аппроксимация ступенчатой фигурой (б) и изображение элементарной ячейки  $\Delta s_i$  в пространстве  $\omega_0$ .

Площадь  $S_*$  ступенчатой фигуры, аппроксимирующая площадь криволинейной трапеции, является сложной функцией  $S_* = \varphi(f(\xi_i) \cdot \Delta x_i)$ .

Отображение суммы  $S_*$  возможно после доказательства следующей теоремы.

**Теорема 3.13.** Если в пространстве  $\omega_0$  задана непрерывная положительная сложная функция  $y = \varphi(f(x))$ , то ее  $\omega$ -образ в смежном пространстве равен  $\sqrt[p]{\varphi(f(x^p))}$ , т.е.

$$\varphi(f(x)) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus \sqrt[p]{\varphi(f(x^p))}.^{27}$$

**Доказательство.** Рассматривая три пространства  $\omega_0$ ,  $\omega_0'$ ,  $\omega_1$  и отображая объекты в этих пространствах можно записать:

$$\varphi(f(x)) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus k_2^{\log_{k_1} \varphi(k_1^{\log_{k_2} f_*})},$$

где  $f_* = k_2^{\log_{k_1} f(k_1^{\log_{k_2} x})}$  –  $\omega$ -образ функции  $f(x)$

$$\left( f(x) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus k_2^{\log_{k_1} f(k_1^{\log_{k_2} x})} \right). \text{ Откуда,}$$

$$k_1^{\log_{k_2} f_*} = k_1^{\log_{k_2} k_2^{\log_{k_1} f(k_1^{\log_{k_2} x})}} = f(k_1^{\log_{k_2} x}), \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} k_2^{\log_{k_1} \varphi(k_1^{\log_{k_2} f_*})} &= k_2^{\log_{k_1} \varphi(f(k_1^{\log_{k_2} x}))}; & k_1^{\log_{k_2} x} &= \\ = x_* &\Rightarrow \log_{k_1} x_* = \log_{k_2} x &\Rightarrow \frac{\ln x_*}{\ln k_1} = \frac{\ln x}{\ln k_2} &\Rightarrow \ln x_* = \\ = \log_{k_2} k_1 \cdot \ln x &\Rightarrow x_* = x^p. \end{aligned}$$

---

<sup>27</sup> При замене  $p = \log_{k_2} k_1$  на  $p_1 = \frac{1}{p} = \log_{k_1} k_2$  следует поменять наименования пространств, т.е. вместо  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus$  надо писать  $\setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus$ .



В результате,  $k_2^{\log_{k_1} \varphi(f(x^p))} = \varphi_* \Rightarrow \log_{k_2} \varphi_* =$   
 $= \log_{k_1} \varphi(f(x^p)) \Rightarrow \frac{\ln \varphi_*}{\ln k_2} = \frac{\ln \varphi(f(x^p))}{\ln k_1} \Rightarrow \varphi_* = \sqrt[p]{\varphi(f(x^p))}$ , что  
 и требовалось доказать.

**Примечание.** Заметим, что произведение переменных величин при отображении  $\omega_0 \rightarrow \omega_0'$  превращается тоже в произведение, что не-  
 трудно доказать.

Из теоремы 3.13 следует, что  $S_* \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus S_*^0 =$   
 $= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n f(\xi_i^p) \cdot \Delta x^p}$ .

$$\text{Найдем } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_*^0: \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_*^0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n f(\xi_i^p) \cdot \Delta x^p} =$$

$$= \sqrt[p]{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^p) \cdot \Delta x^p} = \sqrt[p]{\int_{\alpha}^{\beta} f(x^p) dx^p},$$

т.е.  $\omega$ -образ определенного интеграла в смежном пространстве  $\omega_0'$  будет:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus I_* = \sqrt[p]{\int_{\alpha}^{\beta} f(x^p) dx^p}, \quad (3.25)$$

где  $I_*$  –  $\omega$ -образ интеграла, полученного путем  $\omega_0 \rightarrow \omega_0'$ .

Отобразим первообразную функцию  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus \sqrt[p]{\Phi(x^p)}$$

Этот результат совпадает с формулой (3.25). Действительно, заменим  $x^p = z$ . Тогда

$I = \int f(x) dx = \Phi(x) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus I_* = \sqrt[p]{\int f(z) dz} = \sqrt[p]{\Phi(z)}$ , так как  $\int f(z) dz = \Phi(z)$  в силу инвариантности вида первого дифференциала функции, а значит, инвариантности вида интеграла.

Несмотря на кажущуюся простоту вопрос интегрирования в смежных пространствах достаточно проблематичен. При его разработке читатель может найти широкое поле для творчества ...

Применяя формулу (3.23) несложно записать таблицу образов производных в смежном пространстве  $\omega_0'$ . Например,  $\left(x^n\right)'_{k_2} = n^p \cdot x^{n-1}$ .

Индекс  $k_2$  означает, что производная взята в пространстве  $\omega_0'$ . Действи-

тельно, так как  $f'_{k_2} = \left( \frac{f^{1/p-1}}{x^{1/p-1}} \cdot f'_{k_1} \right)^p$ , то

$$\left(x^n\right)'_{k_2} = \left( \frac{x^{n \cdot (1/p-1)}}{x^{1/p-1}} \cdot n \cdot x^{n-1} \right)^p = n^p \cdot x^{n-1}.$$

$$(\sin x)'_{k_2} = \left( \frac{(\sin x)^{(1/p)-1}}{x^{(1/p)-1}} \cdot \cos x \right)^p = \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1-p} \cdot \cos^p x,$$

$$(\arctg x)'_{k_2} = \left( \frac{\arctg x}{x} \right)^{1-p} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^p} \text{ и т.д..}$$

Зная таблицу производных в смежных пространствах, нетрудно составить аналогичную таблицу для  $\omega$ -образов интегралов; обозначая их  $\int_{k_2}$ :

$$\int_{k_2} x^{n-1} \delta x = \frac{x^n}{n^p},^{28}$$

<sup>28</sup> Произвольную постоянную мы не записываем для упрощения понимания сути  $\omega$ -образов интеграла в смежных пространствах.

$$\int_{k_2} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1-p} \cdot \cos^p x \delta x = \sin x,$$

$$\int_{k_2} \left( \frac{\arctg x}{x} \right)^{1-p} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^p} \delta x = \arctg x \text{ и т.д..}$$

Итак,

$$\int_{k_2} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^{1-p} \cdot (f'(x))^p \delta x = f(x). \quad (3.26)$$

В этом случае,  $\int_{k_1} f'(x) dx = f(x)$ ,  $\int_{k_1} \equiv \int$  и

$$\int_{k_2} \left( \frac{f(x)}{x} \right)^{1-p} \cdot (f'(x))^p \delta x = \int_{k_1} f'(x) dx.$$

Отсюда видно, что для записи интеграла  $\int_{k_2}$  надо найти первообразную функцию  $f(x)$ , т.е. решить исходный интеграл  $\int_{k_1}$ .

Например,  $I_{k_1} = \int \cos x dx \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus I_{k_2} =$

$$= \int \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1-p} \cdot \cos^p x \delta x.$$

Тогда переходя к стандартной записи первообразной, получим

$$\begin{aligned} \int_{k_2} \left( \frac{p\sqrt[p]{\Phi(x^p)}}{x} \right)^{1-p} \cdot \left( \frac{1}{p} \cdot (\Phi(x^p))^{1/p-1} \cdot \Phi'_{x^p}(x^p) \cdot p \cdot x^{p-1} \right)^p \delta x = \\ = \int_{k_2} \left( \frac{p\sqrt[p]{\Phi(x^p)}}{x} \right)^{1-p^2} \cdot (\Phi'_{x^p}(x^p))^p \delta x = p\sqrt[p]{\Phi(x^p)}, \end{aligned}$$

где  $\Phi(x)$  — первообразная функция в обычном интеграле ( $I = \int f(x) dx = \Phi(x)$ ).

Если существует такая функция  $\Psi(x)$ , что ее первообразные в пространствах  $\omega_0$  и  $\omega_0'$  совпадают, то должно выполняться следующее равенство:

$$\int_{k_2} \left( \frac{\Psi(x)}{x} \right)^{1-p} \cdot (\Psi'(x))^p \delta x = \Psi(x),$$

$$\text{или} \quad \int_{k_2} \left( \frac{\Psi(x)}{x} \right)^{1-p} \cdot \Psi^p(x) \delta x = \Psi(x),$$

$$\text{где} \quad \int_{k_1} \Psi(x) dx = \int \Psi(x) dx = \Psi(x).$$

Можно попытаться также отобразить  $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  из  $\omega_0$  в  $\omega_0'$  непосредственно. Это значит попытаться записать  $\int_{k_2}$  как обычный интеграл  $\left( \int \equiv \int_{k_1} \right)$  в пространстве  $\omega_0'$ :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus \int_{\sqrt[p]{\alpha}}^{\sqrt[p]{\beta}} \sqrt[p]{f(x^p)} \delta x$$

(Константы  $\alpha$  и  $\beta$  отображаются так:  $\alpha \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_{k_1} \alpha \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0' \setminus k_2^{\log_{k_1} \alpha} = \alpha_*$ , т.е.  $\log_{k_2} \alpha_* = \log_{k_1} \alpha \Rightarrow \frac{\ln \alpha_*}{\ln k_2} = \frac{\ln \alpha}{\ln k_1} \Rightarrow \alpha_* = \sqrt[p]{\alpha}$ ).

Для приближенных расчетов следует искать формулу, содержащую дифференциал  $\delta x$  примерно того же порядка, что и  $dx$ . Например, пригодится такая формула:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_0' \setminus I' \approx p \cdot \int_{\sqrt[p]{\alpha}}^{\sqrt[p]{\beta}} \sqrt[p]{f(x^p)} dx \quad (3.27)$$

**Пример.** Методом Симпсона вычислим интегралы  $I'$  используя их выражение по формуле (3.27):

$$a) \quad I' = \left\{ \begin{array}{ll} 2 \cdot \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sqrt{\sin x^2} \delta x \approx 0,6923; & 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[3]{\sin x^3} \delta x \approx 0,6908; \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot \int_{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[4]{\sin x^4} \delta x \approx 0,6908; & 7 \cdot \int_{\sqrt[7]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[7]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[7]{\sin x^7} \delta x \approx 0,6913; \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 101 \cdot \int_{\sqrt[101]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[101]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[101]{\sin x^{101}} \delta x \approx 0,6929, \dots \end{array} \right\}.$$

$$б) \quad I' = 2 \cdot \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \sqrt{\sin x^2 + \cos x^2} \delta x \approx 0,7087$$

$$I' = 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}} \sqrt[3]{\sin x^3 + \cos x^3} \delta x \approx 0,7027$$

$$I' = 4 \cdot \int_{\sqrt[4]{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{3}}} \sqrt[4]{\sin x^4 + \cos x^4} \delta x \approx 0,7000$$

$$I' = 100 \cdot \int_{\sqrt[100]{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt[100]{\frac{\pi}{3}}} \sqrt[100]{\sin x^{100} + \cos x^{100}} \delta x \approx 0,6934.$$

в) 
$$I' = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{\delta x}{\sqrt{x^2 + 4}} \approx 0,6079$$

$$I' = 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{5}} \frac{\delta x}{\sqrt[3]{x^3 + 4}} \approx 0,6966$$

$$I' = 4 \cdot \int_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{5}} \frac{\delta x}{\sqrt[4]{x^4 + 4}} \approx 0,7458.$$

Можно доказать, что  $\delta x \approx p \cdot dx$  при определённых условиях.

Однако формула (3.27) иногда дает результат противоречащий прогнозируемому.

Например, если для интегралов

г) 
$$I' = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{5}} \frac{\delta x}{\sqrt{3 \cdot x^2 - 2}} \approx 1,1627$$

$$I' = 3 \cdot \int_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{\delta x}{\sqrt[3]{3 \cdot x^3 - 2}} \approx 1,2933$$

$$I' = 5 \cdot \int_1^{\sqrt[5]{5}} \frac{\delta x}{\sqrt[5]{3 \cdot x^5 - 2}} \approx 1,41036.$$

д) 
$$I' = 2 \cdot \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \cdot \sqrt{\cos \frac{x^2}{3}} \delta x \approx 0,26$$

$$I' = 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} x \cdot \sqrt[3]{\cos \frac{x^3}{3}} \delta x \approx 0,30.$$

Ошибка прогноза при вычислении сравнительно невелика, но встречаются функции, результат интегрирования которых не предсказуем. Например,

е) 
$$I' = 2 \cdot \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sqrt{3 + \cos x^2} \delta x \approx 1,3518;$$

$$I' = 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[3]{3 + \cos x^3} \delta x \approx 1,0814;$$

$$I' = 4 \cdot \int_{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}} \sqrt[4]{3 + \cos x^4} \delta x \approx 0,9673.$$

$$\text{ж)} \quad I' = 2 \cdot \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4}} \sqrt{e^{x^2}} \delta x \approx 5,3208;$$

$$I' = 3 \cdot \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{e^{x^3}} \delta x \approx 2,6524;$$

$$I' = 4 \cdot \int_{\sqrt[4]{2}}^{\sqrt[4]{4}} \sqrt[4]{e^{x^4}} \delta x \approx 1,8845;$$

$$I' = 11 \cdot \int_{\sqrt[11]{2}}^{\sqrt[11]{4}} \sqrt[11]{e^{x^{11}}} \delta x \approx 0,9928 \text{ и т.д..}$$

**Теорема 3.14.** Если  $\{\omega_0'\}$  — множество смежных с  $\omega_0$  пространств, а  $\{p_1 = \log_{k_1} k_2\}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — соответствующие коэффициенты связи пространств  $\omega_0$  и  $\{\omega_0'\}$  с пространством высшего ранга  $\omega_1$ , то

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \{\omega_0'\} = \omega_1, \quad (3.28)$$

при  $k_1 = \text{const}$ ,  $k_2 = \text{var}$ .

Строгое доказательство теоремы выходит за пределы данной монографии. Предлагаем для частного доказательства теоремы 3.14 экскурс в численные методы решения дифференциальных уравнений. Используя известную формулу Эйлера, запишем

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i, y_i), \quad (3.29)$$

где  $y_i, y_{i+1}$  —  $i$ -е и  $i+1$ -е значения функции;  $f(x_i, y_i) = y'$  в точке  $(x_i, y_i)$ .



Пусть формула (3.29) как объект принадлежит пространству  $\omega_0'$ . Отобразим этот объект в смежное пространство  $\omega_0$ , применяя формулы (3.23) и (3.24):

$$y_{k_2}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p_1 \sqrt[p_1]{f^{p_1} \cdot \left( p_1 \sqrt[p_1]{x^{p_1} + (\Delta x)^{p_1}'} \right)} - f^{p_1}(x)}{\Delta x},$$

$$y_{k_2}' = \frac{f}{x} \cdot p_1 \sqrt[p_1]{\frac{f' \cdot x}{f}} \Rightarrow \left( \frac{x \cdot f_{k_2}'}{f} \right)^{p_1} = \frac{f' \cdot x}{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f' = \frac{f}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot f_{k_2}'}{f} \right)^{p_1} = \left( \frac{x}{f} \right)^{p_1-1} \cdot (f_{k_2}')^{p_1}.$$

$$f(x_i, y_i) = y' = \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^{p_1-1} \cdot \frac{y_{i+1}^{p_1} - y_i^{p_1}}{x_{i+1}^{p_1} - x_i^{p_1}}.$$

(Предварительно формулу (3.29) переписали в виде

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Итак, при отображении  $\omega_0' \rightarrow \omega_0$  объекта (3.29) получили  $\omega$ -образ формулы (3.29):

$$f(x_i, y_i) = \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^{p_1-1} \cdot \frac{y_{i+1}^{p_1} - y_i^{p_1}}{x_{i+1}^{p_1} - x_i^{p_1}} \quad (3.30)$$

Найдем предел (3.30) при  $p_1 \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
f(x_i, y_i) &= \lim_{p_1 \rightarrow 0} \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^{p_1-1} \cdot \frac{y_{i+1}^{p_1} - y_i^{p_1}}{x_{i+1}^{p_1} - x_i^{p_1}} = \\
&= \frac{y_i}{x_i} \cdot \lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{y_{i+1}^{p_1} - y_i^{p_1}}{x_{i+1}^{p_1} - x_i^{p_1}} \Rightarrow \frac{x_i \cdot f(x_i, y_i)}{y_i} = \lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{y_{i+1}^{p_1} - y_i^{p_1}}{x_{i+1}^{p_1} - x_i^{p_1}} =^{28} \\
&= \lim_{p_1 \rightarrow 0} \frac{y_{i+1}^{p_1} \cdot \ln y_{i+1} - y_i^{p_1} \cdot \ln y_i}{x_{i+1}^{p_1} \cdot \ln x_{i+1} - x_i^{p_1} \cdot \ln x_i} = \frac{\ln y_{i+1} - \ln y_i}{\ln x_{i+1} - \ln x_i} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \ln y_{i+1} = \ln y_i + \frac{x_i}{y_i} \cdot f(x_i, y_i) \cdot (\ln x_{i+1} - \ln x_i).
\end{aligned}$$

$$\text{Откуда} \quad y_{i+1} = y_i \cdot \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^{\frac{x_i \cdot f(x_i, y_i)}{y_i}} \quad (3.31)$$

$$\text{где} \quad \frac{x_i \cdot f(x_i, y_i)}{y_i} = 'y \text{ в точке } (x_i, y_i)'.$$

Как видно, (3.31) – это образ в  $\omega_0$  формулы (3.29), записанной в

$$\omega_1: \quad y_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i, y_i) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus y_i \cdot \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)'^f =$$

---

<sup>28</sup> Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья: так как  $y_{i+1} = \text{const}$ , а

$p_1 = \text{var}$ , то  $\left( y_{i+1}^{p_1} \right)' = y_{i+1}^{p_1} \cdot \ln y_{i+1}$  и т.д. (берется производная от показательной функции).

$$= y_i \cdot \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^{\frac{x_i \cdot f(x_i, y_i)}{y_i}},$$
 т.е. пространство  $\omega_1$  является предельным смежным пространством  $\{\omega_0'\}$  при  $p_1 \rightarrow 0$ :  $\lim_{p_1 \rightarrow 0} \{\omega_0'\} = \omega_1$ , что и требовалось доказать.<sup>29</sup>

Из (3.23) следует, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{f}{x} \cdot p \sqrt{\frac{x \cdot f_{k_1}}{f}} = k_2 \frac{x \cdot f_{k_1}}{f},$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \left( f(x_1^{1/p}, x_2^{1/p}, \dots, x_n^{1/p}) \right)^{1/p} = \\ = k_2^{f(\log_{k_2} x_1, \log_{k_2} x_2, \dots, \log_{k_2} x_n)}, \end{aligned}$$

так как при  $p_1 \rightarrow 0$   $\omega_0'$  трансформируется в  $\omega_1$ .

Приведенная теорема доказывает *непрерывность* перехода от смежных  $\omega$ -пространств к пространству другой ступени иерархии  $\omega$ -пространств. Инфинитное множество  $\{\omega_i'\}$  смежных пространств связано с пространством  $\omega_1$  одной и той же функцией  $k^x$  (аналогия смежных пространств). В то же время каждое  $\omega_i'$  — пространство отличается от любого другого смежного значением коэффициента связи  $k$  (*изменчивость* смежных пространств). Компромисс аналогии и изменчивости  $\omega$ -пространств достигается путем перебора (исчерпывания) всех

---

<sup>29</sup> Вышеизложенный факт может быть использован для решения некоторых пределов и других задач. Записав  $\omega$ -образ функции в  $\omega_0'$  и взяв его предел, получим  $\omega$ -образ функции в  $\omega_1$ . Например,  $\lim_{p \rightarrow \infty} p \sqrt{\sin x^p} = k_2^{\sin \log_{k_2} x}, k_2 \neq 1, k_2 > 0, p = \log_{k_2} k_1, \lim_{p \rightarrow \infty} k_2 = 1.$

возможных значений  $k$ . В итоге получаем переход к *качественно* новому пространству  $\omega_1$ , отображение операций из которого при переходе  $\omega_1 \rightarrow \omega_i$  связано с появлением *новых* операций.

При изучении  $\omega$ -отображений четко наблюдается также компромисс между *дискретностью* глобальных объектов и их *непрерывностью*. Действительно, между двумя произвольно взятыми  $\omega$ -пространствами  $\omega_i$  и  $\omega_j$  имеет место *гомеоморфизм*, т.е. взаимно однозначные отображения в обе стороны  $(\omega_i \leftrightarrow \omega_j)$  любых объектов. В силу отсутствия ограничений на значения индексов  $i$  и  $j$  очевидно существует *непрерывность* в глобальных множествах пространств  $\{\omega_i\}$ ,  $\{\omega_j\}$  и т.д.. В то же время качественные различия  $\omega$ -образов одних и тех же объектов, расположенных в разных пространствах  $\omega$ , свидетельствует о наличии *дискретности* в “текстуре”  $\omega$ -пространств.

В заключение рассмотрим два примера.

(Хотя в главе 5 будут проиллюстрированы примеры решения дифференциальных уравнений путем  $\omega$ -отображений).

а). Пусть в  $\omega_0'$  записано уравнение  $f'' = x \cdot \cos x$ . Одним из его частных решений будет функция  $f = 2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x$ . Отобразим все уравнение и его решение в  $\omega_0$ , т.е.

$$\{f'' = x \cdot \cos x\} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \left\{ f_{k_2}'' = \sqrt[k]{x^k \cdot \cos x^k} \right\}.$$

$$\{f = 2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x\} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \left\{ \varphi = \left( 2 \cdot \sin x^k - x^k \cdot \cos x^k \right)^{1/k} \right\}$$

$$f_{k_2}'' = \left( \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\left( f^k \right)'' \cdot x^{k-1} - (k-1) \cdot x^{k-2} \cdot \left( f^k \right)'}{x^{3 \cdot (k-1)}} \right)^{1/k}, \quad (3.32)$$

где  $k = \log_{k_1} k_2$ , т.е.  $k \equiv p_1$ . Уравнение (3.32) нетрудно получить, взяв вторую производную от  $f_{k_2}'$  (3.23). Уравнение  $f_{k_2}'' = \sqrt[k]{x^k \cdot \cos x^k}$  весьма сложное, но его решение уже найдено в виде  $\varphi$ .

$$f_{k2}'' = k \sqrt{\frac{Z'}{k^2 \cdot x^{2 \cdot (k-1)}} - \frac{(k-1) \cdot Z}{k^2 \cdot x^{2 \cdot k-1}}} \quad (3.33)$$

Проверим является ли образ  $f(f \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \varphi)$   $\varphi = (2 \cdot \sin x^k - x^k \cdot \cos x^k)^{1/k}$  решением этого уравнения:

$$\begin{aligned} Z &= (2 \cdot \sin x^k - x^k \cdot \cos x^k)' = 2 \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot \cos x^k - k \cdot x^{k-1} \times \\ &\times \cos x^k + x^k \cdot \sin x^k \cdot k \cdot x^{k-1} = k \cdot x^{k-1} \cdot (\cos x^k + x^k \cdot \sin x^k), \\ Z' &= k \cdot ((k-1) \cdot x^{k-2} \cdot (\cos x^k + x^k \cdot \sin x^k) + x^{k-1} \cdot (-\sin x^k \times \\ &\times k \cdot x^{k-1} + k \cdot x^{k-1} \cdot \sin x^k + x^k \cdot k \cdot x^{k-1} \cdot \cos x^k)). \end{aligned}$$

$$\text{Пусть } B = \frac{k-1}{k^2} \cdot \frac{Z}{x^{2 \cdot k-1}} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\cos x^k + x^k \cdot \sin x^k}{x^k};$$

$$A = \frac{Z'}{k^2 \cdot x^{2 \cdot (k-1)}} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{\cos x^k + x^k \cdot \sin x^k}{x^k} + x^k \cdot \cos x^k.$$

Тогда  $A - B = x^k \cdot \cos x^k$ , а из (3.33)  $f_{k2}'' = \sqrt[k]{A - B} = \sqrt[k]{x^k \cdot \cos x^k}$ , что и требовалось доказать.

Итак, отображая дифференциальное уравнение вместе с его решением из одного  $\omega$ -пространства в другое, получим новое дифференциальное уравнение с готовым решением. В рассматриваемом случае уравнение  $f'' = x \cdot \cos x$  трансформировалось при отображении

$$\setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \text{ в уравнение } f_{k2}'' = k \sqrt{\frac{Z'}{k^2 \cdot x^{2 \cdot (k-1)}} - \frac{(k-1) \cdot Z}{k^2 \cdot x^{2 \cdot k-1}}}, \text{ а}$$

решение  $f = 2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x$  в следующее  $\varphi = (2 \cdot \sin x^k - x^k \cdot \cos x^k)^{1/k}$ . Проверкой убедились, что данное решение удовлетворяет трансформированному дифференциальному уравнению.

б). Пусть в  $\omega_0'$  дано уравнение  $f'' = 3 \cdot x^2 - \cos x$ . Его решение в этом пространстве  $f = \frac{x^4}{4} + \cos x$ . Тогда в  $\omega_0$  решение будет

$f = \sqrt[k]{\frac{x^{4k}}{4} + \cos x^k}$ . Отобразим всё уравнение по формулам (3.22; 3.33):

$$\left\{ f'' = 3 \cdot x^2 - \cos x \right\} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \left\{ f_{k_2}'' = \right. \\ \left. = \sqrt[k]{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\left( f^k \right)'' \cdot x^{k-1} - (k-1) \cdot x^{k-2} \cdot \left( f^k \right)'}{x^{3 \cdot (k-1)}}} = \sqrt[k]{3 \cdot x^{2 \cdot k} - \cos x^k} \right\}.$$

Проверкой легко убедиться, что  $f = \sqrt[k]{\frac{x^{4k}}{4} + \cos x^k}$  является решением уравнения  $f_{k_2}'' = \sqrt[k]{3 \cdot x^{2 \cdot k} - \cos x^k}$ .

### § 3.5. $\omega$ -образы интегралов.

Выше были изложены элементы отображения интегрального объекта в смежных пространствах. В настоящем параграфе приведены примеры  $\omega$ -образов интегралов, записанных в пространствах высших рангов. Сначала определим интеграл новой природы  $I_*$  на основе

псевдообраза  $'f$  производной:

$$I_* = \lim_{\max \delta x_i \rightarrow 1} \prod_i (\delta x_i) {}'f(\xi_i), \quad (3.34)$$

где  $\delta x_i = \frac{x_i + \Delta x}{x_i} = 1 + \frac{\Delta x}{x_i}$  (при  $\Delta x_i \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \delta x_i = 1$ ),

$$\xi_i \in (x_i, x_i + \Delta x) \equiv (x_i, x_i \cdot \delta x_i).$$

Формула (3.34) аналогична формуле обычного интеграла  $I$  с учетом изменения ранга операций и числа, к которому стремится приращение аргумента. Можно записать:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \lim_{\max \delta x_i \rightarrow 1} \prod_i (\delta x_i)^{f(\xi_i)},$$

где  $\int$  — будет обозначать интеграл новой природы (“суперинтеграл первого рода”).

Докажем некоторые свойства  $I_*$ :

1. Если подинтегральная функция содержит постоянный множитель  $k$ , то

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{k \cdot f(x)} = \left( \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \right)^k \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{k \cdot f(x)} &= \lim_{\delta x_i \rightarrow 1} \prod_i (\delta x_i)^{k \cdot f(\xi_i)} = \\ &= \lim_{\delta x_i \rightarrow 1} \prod_i \left( (\delta x_i)^{f(\xi_i)} \right)^k = \left( \lim_{\delta x_i \rightarrow 1} \prod_i (\delta x_i)^{f(\xi_i)} \right)^k = \\ &= \left( \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \right)^k. \end{aligned}$$

$$\text{Следствие. } \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \frac{1}{\int_{\beta}^{\alpha} (\delta x)^{f(x)}}.$$

$$2. \quad \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\sum_{i=1}^n f_i(x)} = \prod_{i=1}^n \left( \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x_i)^{f_i(x)} \right) \quad (3.36)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\sum_{i=1}^n f_i(x)} = \lim_{\delta x_i \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta x_i)^{\sum_{i=1}^n f_i(x)} = \lim_{\delta x_i \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta x_i)^{f_i(x)} \times$$

$$\times (\delta_{x_i})^{f_2} \dots (\delta_{x_i})^{f_n} = \prod_{i=1}^n \left( \int_{\alpha}^{\beta} (\delta_{x_i})^{f_i(x)} \right),$$

$$\text{так как } \lim_{\delta_{x_i} \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n = \lim_{\delta_{x_i} \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta_{x_1})^{f_1} \cdot \lim_{\delta_{x_2} \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta_{x_2})^{f_2} \dots$$

Нетрудно установить связь между суперинтегралом  $\int (\delta x)^{f(x)}$  и обычным интегралом  $\int f(x) dx$ <sup>31</sup>:

$$3. \quad \int f(x) dx = \ln \int (\delta x)^{x \cdot f(x)} \quad (3.37)$$

$$\exp \left( \int \frac{f(x)}{x} dx \right) = \int (\delta x)^{f(x)}$$

4. Если на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , где  $\alpha < \beta$ , функция  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяет условию  $f(x) \leq \varphi(x)$ , то

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\varphi(x)}$$

**Доказательство.** Рассмотрим отношение

$$\frac{\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\varphi(x)} dx}{\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} dx} = \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \right) =$$

$$= \exp \left( \lim_{\delta_{x_i} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)}{\xi_i} \Delta x_i \right) \geq 1, \text{ так как}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)}{\xi_i} \Delta x_i \geq 0. \text{ Откуда } \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\varphi(x)} \geq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)}.$$

5. Если  $m$  и  $M$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на  $[\alpha, \beta]$  и  $\alpha \leq \beta$ , то

<sup>31</sup> Доказательство формул (3.37) предоставляется читателю.



$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^M \quad (3.38)$$

**Доказательство.** Пусть  $m \leq f(x) \leq M$ . На основании свойства 4

имеем 
$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^m \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^M.$$

Но 
$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^m = \left(\int_{\alpha}^{\beta} \delta x\right)^m = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m; \quad \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^M = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^M.$$

Откуда следует (3.38).

6. Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то на этом отрезке найдется такая точка  $\varepsilon$ , что справедливо равенство (теорема о среднем):

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{f(\varepsilon)} \quad (3.39)$$

**Доказательство.** Пусть для определенности  $\alpha < \beta$ . Если  $m$  и  $M$  суть соответствующие наименьшее и наибольшее значения  $f(x)$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то в силу неравенства (3.38) имеем:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \leq \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^M.$$

Откуда 
$$m \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} \leq \ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq M \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha},$$

$$m \leq \frac{1}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \leq M, \text{ т.е. } m \leq \mu \leq M,$$

где 
$$\mu = \frac{1}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)}.$$

Так как  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то она принимает все промежуточные значения между  $m$  и  $M$ . Следовательно, при некотором значении  $\varepsilon$  ( $\alpha \leq \varepsilon \leq \beta$ ) будет  $\mu = f(\varepsilon)$ , т.е.

$$\frac{1}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \cdot \ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = f(\varepsilon) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{f(\varepsilon)}, \quad \text{что и}$$

требовалось доказать.

**Следствие.** Из (3.39) следует, что  $f(\varepsilon) \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx$ . С другой

стороны,  $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx = (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\kappa)}{\kappa}$ . Откуда  $f(\varepsilon) \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} =$

$$= (\beta - \alpha) \cdot \frac{f(\kappa)}{\kappa} \Rightarrow \left( \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha} \right) \cdot \kappa = \frac{f(\kappa)}{f(\varepsilon)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\varepsilon) = \frac{f(\kappa)}{\kappa} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\ln \frac{\beta}{\alpha}} \quad (3.40)$$

Формула (3.40) устанавливает связь между средними значениями для подынтегральной функции, записанной в суперинтеграле и обычном интеграле.

7. Пусть  $\Phi(x)$  — первообразная функция для подсуперинтегральной функции  $f(x)$ , т.е.  $\Phi'(x) = f(x)$  и  $c \cdot \Phi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)}$ . Заметим, что  $(c \cdot \Phi(x))' = (c)' + \Phi'(x) = \Phi'(x)$ , где  $c$  — произвольная постоянная.

$$\text{Тогда} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \frac{\Phi(\beta)}{\Phi(\alpha)} \quad (3.41)$$

(Это модифицированная теорема Ньютона-Лейбница).

Доказательство.

$$\Phi(x \cdot \delta x) = \int_{\alpha}^{x \cdot \delta x} (\delta t)^{f(t)} = \int_{\alpha}^x (\delta t)^{f(t)} \times$$

$$\times \int_x^{x \cdot \delta x} (\delta t)^{f(t)}. \quad \text{Приращение функции} \quad \delta \Phi = \frac{\Phi(x \cdot \delta x) - \Phi(x)}{\delta x} =$$

$$= \frac{\int_{\alpha}^x (\delta t)^{f(t)} \cdot \int_x^{x \cdot \delta x} (\delta t)^{f(t)}}{\int_{\alpha}^x (\delta t)^{f(t)}} = \int_x^{x \cdot \delta x} (\delta t)^{f(t)}. \quad \text{По формуле (3.39)}$$

$$\delta \Phi = \left( \frac{x \cdot \delta x}{x} \right)^{f(\varepsilon)}, \text{ где } x < \varepsilon < x \cdot \delta x. \text{ Найдем } \log_{\delta x} \delta \Phi:$$

$$\log_{\delta x} \delta \Phi = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \delta \Phi = \lim_{\delta x \rightarrow 1} f(\varepsilon) \quad \left( \delta \Phi = \frac{\Phi(x \cdot \delta x) - \Phi(x)}{\delta x} \right). \quad \text{При}$$

$$\varepsilon \rightarrow x, \delta x \rightarrow 1, \text{ а } \lim_{\delta x \rightarrow 1} f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow x} f(\varepsilon).$$

В виду непрерывности функции  $f(x)$  имеем  $\lim_{\varepsilon \rightarrow x} f(\varepsilon) = f(x)$  и

$$\log_{\delta x} \delta \Phi = f(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^x (\delta t)^{f(t)} = c \cdot \Phi(x).$$

$$\text{Тогда } \int_{\alpha}^{\alpha} (\delta t)^{f(t)} = \exp \left( \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt \right) = 1 \Rightarrow c \cdot \Phi(\alpha) = 1 \Rightarrow$$

$$c = \frac{1}{\Phi(\alpha)}. \int_{\alpha}^x (\delta t)^{f(t)} = \frac{\Phi(x)}{\Phi(\alpha)}. \text{ При } x = \beta \int_{\alpha}^{\beta} (\delta t)^{f(t)} = \frac{\Phi(\beta)}{\Phi(\alpha)}, \text{ что}$$

и требовалось доказать, так как в силу инвариантности интеграла относительно независимой переменной можно записать:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \frac{\Phi(\beta)}{\Phi(\alpha)}.$$

8. Интегрирование<sup>32</sup> по частям. Пусть  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  
 $u^v = \exp(\ln u^v) = e^{v \cdot \ln u} = e^{\int (v \cdot \ln u)' dx} = e^{\int (v' \cdot \ln u + (\ln u)' \cdot v) dx} =$   
 $= \int (\delta x)^{x \cdot v' \cdot \ln u + x \cdot v \cdot (\ln u)'} = \int (\delta x)^{v \cdot v \cdot \ln u} \cdot \int (\delta x)^{u \cdot v}$ . Откуда

$$\int (\delta u)^v = \frac{u^v}{\int (\delta v)^{v \cdot \ln u}} \quad (3.42)$$

**Примечание 1.** Дифференцирование по частям  $(u^v)' = u \cdot v' + v' \cdot v \cdot \ln u = v' \cdot (u + v \cdot \ln u)$ .

Пусть  $f_2 = (f_1 \cdot \varphi)'$ . Тогда  $\int f_2 dx = f_1 \cdot \varphi \Rightarrow e^{\int f_2 dx} = e^{f_1 \cdot \varphi} \Rightarrow \int (\delta x)^{f_2 \cdot x} = e^{f_1 \cdot \varphi} \Rightarrow \left( \int (\delta x)^{\varphi' \cdot x} \right)^{f_1} =$   
 $= \left( \int (\delta x)^{v \cdot \varphi} \right)^{f_1}$ , что следует из формулы суперинтегрирования по частям.

Полезными формулами являются также такие

$$\int (\delta x)^{v \cdot \varphi} = \int (\delta x)^{\varphi' \cdot x} = e^{\varphi}, \quad \int (\delta x)^{(\varphi \cdot f)' \cdot x} = e^{\varphi \cdot f}, \quad \int (\delta x)^{v \cdot \varphi \cdot \ln \varphi} =$$

<sup>32</sup> Употребляя термины “интегрирование”, “дифференцирование” в суперинтегрировании и супердифференцировании, мы преследовали цель не только сокращения записи, но и подчеркивания родственности этих операций.

$$= \int (\delta x) (e^\varphi) \cdot \ln \varphi = \frac{\varphi^\varphi}{e^\varphi} \text{ и другие, которые легко можно получить из из-}$$

ложенных выше.

9. Приближенное вычисление суперинтегралов.

а). Формула прямоугольников.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \approx \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \right) \approx \exp \left( \frac{\beta - \alpha}{n} \cdot \left( \frac{y_0}{x_0} + \frac{y_1}{x_1} + \dots + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \right) \right) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \exp \left( \frac{y_i}{x_i} \right) \right)^{\frac{\beta - \alpha}{n}}.$$

**Примечание 1.**  $\ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \approx \frac{\beta - \alpha}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i}{x_i}.$

б). Формула парабол (Симпсона).

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} \approx \left( e^{y_0/x_0} \cdot e^{y_{2 \cdot m}/x_{2 \cdot m}} \cdot \left( e^{y_2/x_2} \cdot e^{y_n/x_n} \cdot \dots \times \right. \right. \\ \left. \left. \times e^{y_{2 \cdot m-1}/x_{2 \cdot m-1}} \right)^2 \cdot \left( e^{y_1/x_1} \cdot e^{y_3/x_3} \cdot \dots \cdot e^{y_{2 \cdot m-1}/x_{2 \cdot m-1}} \right)^4 \right)^{\frac{\beta - \alpha}{6 \cdot m}}$$

в). Вычисление суперинтеграла по формуле Чебышева:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{f(x)} = \left( \prod_{i=1}^n e^{f(x_i)} \right)^{\frac{\beta - \alpha}{n}},$$

где  $x_i = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$

Нетрудно составить таблицу суперинтегралов:

$$\int (\delta x)^{x^n} = c \cdot \exp\left(\frac{x^n}{n}\right), \quad \int (\delta x)^{1/\ln(1/x)} = \frac{c}{\ln \frac{1}{x}}, \quad \int (\delta x)^{\ln x} =$$

$$= c \cdot x^{\ln x/2}, \quad \int (\delta x)^k = c \cdot x^k, \quad \int (\delta x)^{x \cdot \sin x} = c \cdot e^{-\cos x},$$

$$\int (\delta x)^{x/\sin x} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \int (\delta x)^{k+x} = c \cdot x^k \cdot e^x \quad (k = \text{const}) \text{ и т.д..}$$

Как видим, получение “модернизированного” анализа на основе псевдообраза  $'f$  производной и суперинтеграла  $\int (\delta x)^{f(x)}$  не представляет никакой трудности. Более того, термин “модернизированного” взят автором в кавычки, так как, фактически, это тот же математический анализ с измененным рангом операций (осуществлена соответствующая замена операций

$\{+; -; \div; \sum; f'; \int f dx; \dots\} \rightarrow \left\{ \cdot; \div; \log; \prod; 'f; \ln \int (\delta x)^{x \cdot f(x)}; \dots \right\}$ ). В связи с простотой связи образов производной  $'f$  и  $\_f$  ( $\_f = k 'f$ ), очевидно,

построение анализа на основе образа  $\_f$  тоже достаточно несложно. Например, формула Тейлора, отображенная из  $\omega_1$  в пространство  $\omega_0$ , имеет вид:

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( \binom{n}{n} f(a) \right)^{\left( \log_k \left( \frac{x}{a} \right) \right)^n / n!} \quad (3.43)$$

Модернизированный анализ на основе образа производной  $\_f$  формируется путем соответствующей замены операций  $\{+; -; \div; \sum_n; n!; \dots\} \rightarrow \left\{ \cdot; \div; \Delta; \prod_n; \ln n!; \dots \right\}$  при сохранении постоянным числа слагаемых в  $\sum_n$  и числа членов в  $\prod_n$ . Образ же в  $\omega_0$  интеграла  $\int f(x) dx$ , записанного в  $\omega_1$  найдем так:

$$\int f(x) \cdot dx \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \int f(x) \odot \delta x = \int (\delta x)^{\log_k f(x)}.$$

Нетрудно показать, что определенный суперинтеграл первого рода<sup>33</sup>  $I_*$  связан с обыкновенным определенным интегралом соотношением:

$$\underline{I_*} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \odot \delta x = \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\log_k f(x)}{x} dx \right), \quad (3.44)$$

Действительно, из общеизвестного выражения

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i \text{ следует}$$

$$\begin{aligned} I \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_* &= \lim_{\max \delta x_i \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta x_i) \odot f(\xi_i) = \\ &= \lim_{\max \delta x_i \rightarrow 1} \prod_{i=1}^n (\delta x_i)^{\log_k f(\xi_i)} = \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{\log_k f(x)} = \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\log_k f(x)}{x} dx \right) \end{aligned}$$

согласно свойству (3.37), что и требовалось доказать.

Заметим, что  $\int_{\alpha}^{\beta} \log_k f(x) dx = \ln \int_{\alpha}^{\beta} (\delta x)^{x \cdot \log_k f(x)}$  согласно тому же свойству (3.37).

$$\text{Аналогично,} \quad \int f(x) \odot \delta x = \exp \left( \int \frac{\log_k f(x)}{x} dx \right),$$

$$\int f(x) dx = \ln \int k^{x \cdot f(x)} \odot \delta x = \ln \int (\delta x)^{\log_k f(x)}. \quad (3.45)$$

В качестве примера применения формул (3.44 и 3.45) приведем формулу прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла, используя  $\omega$ -образ интеграла, полученного отображением  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$ .

Из (3.44 и 3.45), а также из доказательства (3.44) следует:

<sup>33</sup> Под определенным суперинтегралом первого рода будем понимать образ определенного интеграла, полученного отображением в  $\omega_0$  из пространства  $\omega_1$ .

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \ln \prod_{i=1}^n e^{x_i f(x_i)} \odot H,$$

где  $H$  — новый шаг ( $\omega$ -образ шага  $h$ ), равный  $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ , так как разность заменяется на операцию деления.

$$\begin{aligned} I &\approx \ln \prod_{i=1}^n e^{x_i f(x_i)} \odot \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) = \ln \prod_{i=1}^n \left( e^{x_i f(x_i)} \right)^{\ln \frac{x_{i+1}}{x_i}} = \\ &= \ln \prod_{i=1}^n \left( e^{x_i f(x_i) \cdot \ln \frac{x_{i+1}}{x_i}} \right) = \ln e^{\sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \cdot \ln \frac{x_{i+1}}{x_i}} = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \cdot \ln \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right), \end{aligned}$$

где  $n = \frac{|b-a|}{h}$  при  $x_{i+1} - x_i = h$ .

Итак, для приближенного вычисления определенного интеграла можно пользоваться формулой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i) \cdot \ln \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) \quad (3.46)$$

При уменьшении шага  $\ln \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right) = \ln \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right) \approx \frac{h}{x_i}$ , т.е. (3.46) становится формулой обычного метода прямоугольников при  $h \gg x_i$ .

Из выражения для *неприведенного* к масштабу  $\omega_0$  образа производной  ${}^P f$ , полученного путем отображения  $\omega_2 \rightarrow \omega_0$

$${}^P f = f'(x) \cdot \log_{2_f}^2 x$$

можно получить запись  $\omega$ -образа интеграла:

$$\int (\delta x)^{f(x)} = \exp \left( \int (\delta x)^{\frac{f(x)}{\ln x}} \right) = \exp \left( \exp \left( \int \frac{f(x) dx}{\ln(2_x)} \right) \right).$$



В случае образа интеграла, полученного отображением  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  следует использовать такие формулы:

$$\int f(x) + vx = \log_k \left( \ln k \int k^{f(x)+x} dx \right),$$

а при  $k = e$   $\int f(x) + vx = \ln \left( \int \exp(f(x) + x) dx \right)$ , где  $vx - \omega$ -образ дифференциала, полученный отображением  $dx \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus vx$ .

Не останавливаясь на различных аспектах “суперинтегрирования”, заметим, что к этим вопросам мы вернемся в п. 3.7 настоящей главы, где рассматриваются  $\omega$ -образы кратных интегралов, в главе 4, где разбирается методика отображения криволинейных и поверхностных интегралов.

### §3.6 $\omega$ -образы производных высших порядков

Для описания  $\omega$ -образов производных и интегралов необходимо получить формулы, позволяющие находить результаты отображений  $\omega_i \rightarrow \omega_j$  при  $i \neq j$  интегро-дифференциальных объектов высшего ранга. Ниже приведен фрагмент этого исследования для случаев отображений  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  и  $\omega_0 \rightarrow \omega_0'$ .

**Теорема 3.15.** Если положительная функция  $f(x)$  непрерывна, монотонна и дифференцируемая  $n+1$  раз в некоторой области значений аргумента  $G$ , то вычисление  $\omega$ -образа производной  $n$ -го порядка  $\frac{(n)}{f}(x)$  в области  $G$  осуществляется по рекуррентной формуле

$$\frac{(n)}{f}(x) = k^x \left( \ln \frac{(n-1)}{f}(x) \right), \quad (3.47)$$

где  $\frac{(n)}{f}(x)$  — образ производной  $f^{(n)}(x)$ , полученный отображением её  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ .

**Доказательство.** Докажем теорему методом математической индукции. Рассмотрим частные случаи:

1). При  $n = 1$   $\frac{(1)}{f}(x) = k' f(x) = k^{(x \cdot f')/f} = k^{x \cdot (\ln f)'}.$

2). При  $n = 2$   $\frac{(2)}{f}(x) = \left( \frac{(1)}{f}(x) \right)'$ . Обозначим  $\frac{(1)}{f}(x) = \varphi(x)$ . Тогда

$${}''f(x) = {}' \varphi(x) = k {}' \varphi(x) = k \frac{x \cdot \varphi'(x)}{\varphi(x)} = k^{x \cdot (\ln \varphi)'} = k^{x \cdot \left( \ln {}'f(x) \right)'}$$

3). При  $n = 3$   ${}'''f(x) = {}' \left( {}''f(x) \right)$ . Обозначим  ${}''f(x) = \psi(x)$ .

Тогда

$${}'''f(x) = {}' \psi(x) = k {}' \psi(x) = k \frac{x \cdot \psi'(x)}{\psi(x)} = k^{x \cdot (\ln \psi)'} = k^{x \cdot \left( \ln {}''f(x) \right)'}$$

Допустим, что формула (3.47) верна. Докажем, что в этом случае верна формула:

$$\frac{(n+1)}{f(x)} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(n)}{f(x)} \right)'}$$

Действительно, обозначив  $\frac{(n)}{f(x)} = \chi(x)$ , получим

$$\frac{(n+1)}{f(x)} = {}'(\chi(x)) = k {}' \chi(x) = k^{x \cdot (\ln \chi(x))'} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(n)}{f(x)} \right)'}$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Для вычисления  $\omega$ -образов производных высших порядков иногда удобно пользоваться формулами, выраженными через аргумент  $x$  и функцию  $y = \ln f(x)$ :

$$\begin{aligned} {}'f(x) &= k^{x \cdot y'}; & {}''f(x) &= k^{\ln k \cdot x \cdot (y' + x \cdot y'')}; & {}'''f(x) &= \\ &= k^{(\ln k)^2 \cdot x \cdot (y' + 3 \cdot x \cdot y'' + x^2 \cdot y''')}; & \frac{(4)}{f(x)} &= k^{(\ln k)^3 \cdot x \cdot (y' + 7 \cdot x \cdot y'' + \\ &+ 6 \cdot x^2 \cdot y''' + x^3 \cdot y^{(4)})}; & \frac{(5)}{f(x)} &= k^{(\ln k)^4 \cdot x \cdot (y' + 15 \cdot x \cdot y'' + 25 \cdot x^2 \cdot y''' + \\ &+ 10 \cdot x^3 \cdot y^{(4)} + x^4 \cdot y^{(5)})}; & \frac{(6)}{f(x)} &= k^{(\ln k)^5 \cdot x \cdot (y' + 31 \cdot x \cdot y'' + 90 \cdot x^2 \cdot y''' + \\ &+ 65 \cdot x^3 \cdot y^{(4)} + 15 \cdot x^4 \cdot y^{(5)} + x^5 \cdot y^{(6)})} \text{ и т.д..} \end{aligned}$$

**Теорема 3.16.** Если положительная функция  $f = f(x)$  непрерывна, монотонна и дифференцируемая дважды в некоторой области  $G$  значений аргумента, то связь между производной второго порядка  $f''$

$\left(f'' \equiv f''_{k_1}\right)$ , принадлежащей пространству  $\omega_0$ , и ее образом  $f''_{k_2}$ , полученным отображением  $\omega_0 \rightarrow \omega'_0 \setminus (f'' \setminus \omega_0 \rightarrow \omega'_0 \setminus f''_{k_2})$ , устанавливается формулой:

$$f''_{k_2} = \left( p^2 \cdot \frac{\left(f^{1/p}\right)'' \cdot x^{1/p-1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) \cdot x^{1/p-2} \cdot \left(f^{1/p}\right)'}{x^{3 \cdot (1/p-1)}} \right)^p, \quad (3.48)$$

где  $\left(f^{1/p}\right)'' \equiv \left(f^{1/p}\right)''_{k_1}$ ;  $\left(f^{1/p}\right)' \equiv \left(f^{1/p}\right)'_{k_1}$ ;  $p = \log_{k_2} k_1$ ;

$k_1, k_2$  — коэффициенты связи соответственно пространств  $\omega_0$  и  $\omega'_0$  с пространством  $\omega_1$ .

**Доказательство.** Так как  $f'_{k_2} = \frac{f}{x} \cdot \left(\frac{x \cdot f'}{f}\right)^p$ , то

$$\begin{aligned} f''_{k_2} &= \frac{f'_{k_2}}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot \left(f'_{k_2}\right)'_{k_1}}{f'_{k_2}} \right)^p = \left( \frac{\left(f'_{k_2}\right)^{1/p-1} \cdot \left(f'_{k_2}\right)'_{k_1}}{x^{1/p-1}} \right)^p = \\ &= \left( \frac{p \cdot \left(\left(f'_{k_2}\right)^{1/p}\right)'_{k_1}}{x^{1/p-1}} \right)^p = \left( \frac{p^2}{x^{1/p-1}} \cdot \left( \frac{\left(f^{1/p}\right)'_{k_1}}{x^{1/p-1}} \right)'_{k_1} \right)^p. \end{aligned}$$

Откуда

$$\left( \frac{p \cdot \left( f^{1/p} \right)'_{k_1}}{x^{1/p-1}} \right)'_{k_1} = \frac{p \cdot \left( \left( f^{1/p} \right)'' \cdot x^{\frac{1}{p}-1} - \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \cdot x^{\frac{1}{p}-2} \cdot \left( f^{1/p} \right)' \right)}{x^{2 \cdot \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}} \quad \text{и}$$

$$f''_{k_2} = \left( p^2 \cdot \frac{\left( f^{1/p} \right)'' \cdot x^{\frac{1}{p}-1} - \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \cdot x^{\frac{1}{p}-2} \cdot \left( f^{1/p} \right)'}{x^{3 \cdot \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}} \right)^p, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

### §3.7 $\omega$ -образы кратных интегралов

Пусть в пространстве  $\omega_1$  дана непрерывная функция  $f(x, y)$  по правильной области  $D$ . При этом полагаем, что область  $D$  — правильная в направлении оси  $OY$  и ограничена линиями:  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ ,  $x = a$ ,  $y = b$ .

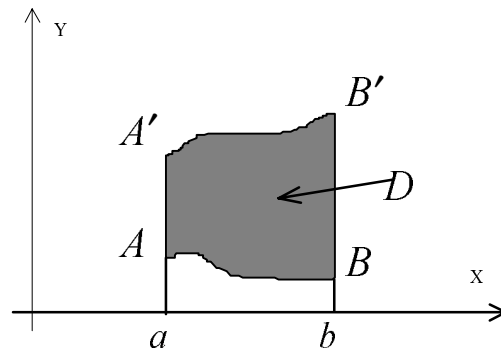


Рис.3. Область  $D$ :  $\check{A}B - \varphi_1(x)$   $\check{A}'B' - \varphi_2(x)$ .

Обозначим двойной интеграл в пространстве за  $I$ :

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Запишем  $\omega$ -образ двойного интеграла через повторный:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{I_*} = \\ &= \exp \left( \int_a^b \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\log_k f(x, y)}{y} dy \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\text{Откуда} \quad \underline{I_{**}} = \int_a^b \frac{dx}{x} \cdot \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\ln f(x, y)}{y} dy,$$

$$\text{где } \underline{I_{**}} = \ln^2 k \cdot \ln \underline{I_*}.$$

Рассмотрим пример.

Пусть в  $\omega_1$  дано тело  $P$ , ограниченное поверхностями:  $z = x^3 + 3 \cdot \ln y$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ . Объем этого тела равен:

$$V_P = I = \iint_D (x^2 + 3 \cdot \ln y) dx dy = \int_1^2 dx \cdot \int_x^{x^2} (x^2 + 3 \cdot \ln y) dy \approx 4,4648 \quad \text{куб.}$$

ед..

Найдем  $\omega$ -образ этого двойного интеграла  $\left( I \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{I_*} \right)$ :

$$\underline{I_{**}} = \ln^2 k \cdot \ln \underline{I_*} = \int_1^2 \frac{dx}{x} \cdot \int_x^{x^2} \frac{x^2 + 3 \cdot \ln y}{y} dy.$$

Реализуем замену  $x^2 + 3 \cdot \ln y = t$ :

$$\begin{aligned} \underline{I_{**}} &= \int_1^2 \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{2+6 \cdot \ln x}}{x^{2+3 \cdot \ln x}} \int \ln t \, dt = \int_1^2 \frac{dx}{x} \cdot (t \cdot \ln t - t) \Big|_{x^{2+3 \cdot \ln x}}^{x^{2+6 \cdot \ln x}} = \\ &= \int_1^2 \left( (x^2 + 6 \cdot \ln x) \cdot \ln(x^2 + 6 \cdot \ln x) - (x^2 + 3 \cdot \ln x) \cdot \ln(x^2 + 3 \cdot \ln x) - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot \ln x \right) \cdot \frac{dx}{x} \approx 1,071018. \end{aligned}$$

При этом  $\underline{I_*} \approx 9,2923$  куб. ед. при  $k = 2$ .

При  $\omega$ -отображении необходимо отображать непосредственно *метод* (способ), представляющий определённый набор последовательных операций (кстати, этот набор может состоять всего из одной универсальной операции: например, интегрирования). В этом случае, в пространстве  $\omega_0$  можно получить формулу (закономерность), в которой целесообразно применять общеизвестные числа и функции (из  $\omega_0$ ). Меняя  $a, b, \varphi_1, \varphi_2$  в формуле (3.49), мы вычисляем *новый математический объект* –  $\omega$ -образ двойного интеграла, который имеет самостоятельное значение как и двойной интеграл.

**Примечание.** Если отобразить все элементарные объекты, входящие в формулу двойного интеграла (3.49), в том числе, и операции, то получим *тривиальный*  $\omega$ -образ двойного интеграла.

Для этого запишем (3.49) в виде

$$I_* = \int_{k^a}^{k^b} (\delta x) \odot \int_{k^{\varphi_1(\log_k x)}}^{k^{\varphi_2(\log_k x)}} \delta y \odot k^f(\log_k x, \log_k y),$$

где,  $\{\Delta x, \Delta y, a, b, \varphi_1, \varphi_2, \bullet, \int\} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$

$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \{\delta x, \delta y, k^a, k^b, k^{\varphi_1(\log_k x)}, k^{\varphi_2(\log_k x)}, \odot, f\}.$

Откуда

$$I_{1*} = \int_{k^{\varphi_1(\log_k x)}}^{k^{\varphi_2(\log_k x)}} \delta y \odot k^f(\log_k x, \log_k y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{\varphi_2(\log_k x)}}{k^{\varphi_1(\log_k x)}} (\delta y)^{\log_k k^{f(\log_k x, \log_k y)}} = \\
&= \frac{k^{\varphi_2(\log_k x)}}{k^{\varphi_1(\log_k x)}} (\delta y)^{f(\log_k x, \log_k y)} = \\
&= \exp \left( \frac{k^{\varphi_2(\log_k x)}}{k^{\varphi_1(\log_k x)}} \frac{f(\log_k x, \log_k y)}{y} dy \right).
\end{aligned}$$

Обозначим  $\log_k y = Z$ , а  $\frac{dy}{\ln k \cdot y} = dz$ , т.е.

$$\begin{aligned}
I_{1*} &= \exp \left( \frac{k^{\varphi_2(\log_k x)}}{k^{\varphi_1(\log_k x)}} \int \ln k \cdot f(\log_k x, Z) dz \right) = \\
&= \frac{k^{\varphi_2(\log_k x)}}{k^{\varphi_1(\log_k x)}} \int f(\log_k x, Z) dz.
\end{aligned}$$

Пусть  $\frac{\varphi_2(\log_k x)}{\varphi_1(\log_k x)} \int f(\log_k x, Z) dz = \Phi_1(\log_k x, Z) \Big|_{Z_1}^{Z_2}$ . Тогда

$$I_{1*} = k^{\Phi_1(\log_k x, Z)} \Big|_{Z_1 = \varphi_1(\log_k x)}^{Z_2 = \varphi_2(\log_k x)} =$$

$$= k \left[ \Phi_1(\log_k x, \varphi_2(\log_k x)) - \Phi_1(\log_k x, \varphi_1(\log_k x)) \right] = k^{\Psi(\log_k x)}.$$

Следовательно,

$$I_* = \int_{k^a}^{k^b} (\delta x) \odot k^{\Psi(\log_k x)} = \int_{k^a}^{k^b} (\delta x)^{\Psi(\log_k x)} =$$

$$= \exp \left( \int_{k^a}^{k^b} \frac{\Psi(\log_k x)}{x} dx \right).$$

Обозначив  $\log_k x = t$ , т.е.  $\frac{dx}{x \cdot \ln k} = dt$ ,

$$I_* = \exp \left( \int_a^b \Psi(t) \cdot \ln k dt \right) = k^{\left( \int_a^b \Psi(t) dt \right)}. \quad (3.50)$$

Решая интеграл  $I$  (3.49), получим

$$I_1 = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \Phi_1(x, \varphi_2(x)) - \Phi_1(x, \varphi_1(x)) = \Psi(x), \text{ а}$$

$$I = \int_a^b \Psi(x) dx, \text{ т.е. с учетом (3.50) } I_* = k^I.$$

Итак, *тривиальный*  $\omega$ -образ двойного интеграла получается в результате простейшей подстановки и не даёт качественно новых результатов как теоретических, так и практических, хотя конфигурация и объем тела меняются (соответственно, меняются также уравнения поверхностей, ограничивающие тело).

По аналогии с  $\omega$ -образом двойного интеграла (3.49) запишем  $\omega$ -образ тройного интеграла.

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{I_*} =$$

$$= \exp \left( \int_a^b \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \log_k \left( \exp \left( \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \frac{\log_k f(x, y, z)}{z} dz \right) \right) \cdot \frac{dy}{y} \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right).$$



Очевидно, что  $\omega$ -образ тройного интеграла – это совершенно *новый математический объект*.

### §3.8 Проблематика интегро-дифференциальных объектов новой природы

Образы интегро-дифференциальных объектов, получаемые путем различных  $\omega$ -отображений, необходимо систематизировать и классифицировать. При этом возникает ряд проблем:

1. Компактизации математического описания  $\omega$ -образов путем создания специальной символики и терминологии. Получение дилатационных формул для  $\omega$ -образов производных любого порядка и интегралов любой кратности. Рационализация процесса получения  $\omega$ -образов независимо от числа элементарных актов  $\omega$ -отображений, т.е. перемещение объекта по горизонтали (переход в смежные пространства  $\backslash \omega_i \rightarrow \omega_i' \backslash$ ) и вертикали (переход в  $\omega$ -пространства высшего или низшего рангов  $\backslash \omega_i \rightarrow \omega_j \backslash$ ) должно осуществляться за одну универсальную процедуру без последовательного перебора всех актов отображений. На рис. 4 изображено поле  $\omega$ -пространств в системе признаков  $k$  и  $m$ , где  $k$  – коэффициент показательной функции связи  $(k^x)$ , а  $m$  – индекс пространства (например,  $\omega_m = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots$  и т.д.)). Общеизвестное математическое пространство  $\omega_0$  изображено в виде точки, соответствующей началу координат. Каждое  $\omega$ -пространство изображается точкой на плоскости.

2. Рассматривая различные разделы математики как глобальные объекты, найти их  $\omega$ -образы.

Формирование единой схемы  $\omega$ -отображений различных глобальных и локальных объектов (математических аппаратов, теорем, формул и т.д.) путем  $\omega$ -перехода из любого заданного пространства  $\omega_i$  в другое  $\omega_j' (\backslash \omega_i \rightarrow \omega_j' \backslash)$ . Получение качественно нового математического аппарата подбором соответствующего цикла  $\omega$ -отображений по горизонтали и вертикали.

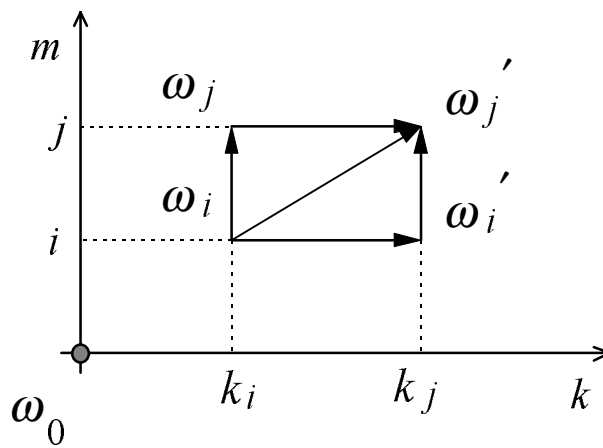


Рис. 4 Изображение  $\omega$ -пространств в системе признаков  $k$  и  $m$ .

3. Изучение вопроса инвариантности объектов при  $\omega$ -отображениях.
4. Нахождение *общих* формул взаимосвязи производных и интегралов с их  $\omega$ -образами (в настоящей работе приведено только несколько формул связи, но уже в них нетрудно заметить закономерности в структуре

и ранге операций; например,  $f' = k^{\frac{f-f+x}{0}}$  и  $f = k^{\frac{f' \cdot x}{f}}$ ).

5. Доказательство теоремы 3.15 для общего случая  $\omega_i \rightarrow \omega_j$  при  $i \neq j$ .

6. Доказательство теоремы 3.16 для производных любого порядка.
7. Создание концепции полимерных  $\omega$ -отображений (в книге представлены только двухмерные  $\omega$ -преобразования, графически изображенные в виде векторов на рис. 4).

8. Исследование природы смежных  $\omega$ -пространств.
9. Реализация  $\omega$ -отображений интегро-дифференциальных объектов на основе других функций связи (в данной работе использована только показательная функция  $k^x$ ).

10. Исследование вопроса интегрирования в произвольных смежных пространствах. Изыскать более точные и универсальные формулы записи  $\omega$ -образа интеграла в виде исходного интеграла, т.е. формулы *адекватности* типа (3.27). Провести численную проверку данных формул. (В настоящей работе этот вопрос, практически, не изучался).

11. Проверка применимости  $\omega$ -отображений в смежных пространствах.

вах в различных математических аппаратах (например, в монографии только вскользь затронут вопрос о нахождении смежных пределов, используя теорему 3.15, а требуется более глубокое исследование в этом направлении).

Естественно, имеются и другие проблемы. Связывая эту проблематику с проблематиками, представленными в главах 4 и 5, где выдвигаются новые гипотезы, решаются различные практические задачи и излагаются спорные вопросы, можно сформировать круг задач, решение которых несомненно приведет к *уникальным* теоретическим и *практическим* результатам.

В заключение, хотелось бы отметить следующий факт, о котором автор неоднократно упоминает в монографии: кажущиеся *тривиальность*  $\omega$ -отображений и *возможно получения* всех результатов путём замены переменных опровергаются при глубоком изучении  $\omega$ -отображений операций (т.к. при  $\omega$ -отображении производится замена операций).

## ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАЗИВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

### §4.1. Общие положения

Математические объекты являются необходимыми компонентами в описании физических фактов. Совокупность последних составляет основу понимания реальности окружающего нас мира. В силу подверженности математических объектов  $\omega$ -отображениям, очевидно, и к физическим законам (фактам) применим аппарат  $\omega$ -отображений. В качестве одного из связующего между  $\omega$ -математикой и  $\omega$ -физикой (понимая под этим возможность конструирования инфинитных спектров любых математических и физических объектов) в данной книге служит *квазивекторный* анализ, получаемый в результате  $\omega$ -отображений векторных величин, идентифицированных с обычными векторами и векторными функциями. Причём, структуры *квазивекторного* и *векторного* анализов аналогичны.

В основе квазивекторного анализа лежит понятие *квазивектора*. Последний *ранжирован* по индексу  $i$  материнского пространства  $\omega_i$ , из которого идет  $\omega$ -отображение в дочернее  $\omega_0$  ( $\omega_i \rightarrow \omega_0$ ) и по параметру  $k$ . В настоящей главе в качестве  $\omega_i$  берется только пространство  $\omega_1$ , т.е.  $\omega_i \equiv \omega_1$ .

Квазивекторный анализ позволяет более масштабнее воспринимать любой физический закон (или факт), а также *физические тела* материального мира, разумея под физическим телом всю гамму микро- и макро-структур материальных объектов.

Согласно нижеизложенному происходит как бы “расслоение” (дисперсия) глобального объекта с возникновением инфинитного спектра его  $\omega$ -образов, т.е. каждый физический факт, закон, формула, материальная “субстанция” имеют бесчисленное множество  $\omega$ -образов. В целом, весь спектр объектов компактизируется в единый блок с ядром, за которое может быть принят общеизвестный объект (величина, факт, закон, формула, тело и т.д.). В силу равнозначности всех элементарных объектов, входящих в инфинитный  $\omega$ -блок (например, равноправности всех записей того или иного закона), в качестве ядра, может быть взят любой из  $\omega$ -образов, а общеизвестный образ выбран ядром только в связи с привычным его математическим описанием. *Концепция* из апостериорно аргументированных фактов об инфинитности *формы* и *содержания* математических объектов и очевидная *конгруэнтность* последних с физическими образами фундаментализуют гипотетические замечания о возможности новых воззрений на природу объектов, их структуру и текстуру. В настоящей работе автор приводит лишь общедоступные<sup>34</sup> изначальные рассуждения которые, помогут читателю сформировать собственную концепцию строения физического пространства как совокупности физических объектов. (Существование пространства надо воспринимать только при наличии в нем объектов).

Особое место в главе занимает вопрос о *квазиполе*, т.е. об  $\omega$ -образе общеизвестного поля. Глобальное квазиполе – это инфинитный спектр частных квазиполей. Причиной инфинитности его является не только наличие инфинитного множества значений признака  $k$ , адекватное изменению по горизонтали – отображению обычных скалярных и векторных полей в смежные пространства, но и наличие инфинитного множества значений признака  $i$  (индекса пространства  $\omega_i$ ), изменению по вертикали, т.е.  $\omega$ -отображению обычных полей из  $\omega$ -пространств другого ранга. При этом наблюдается *непрерывность* ( по признаку  $k$  ) и *дискретность* ( по признаку  $i$  ) инфинитного спектра квазиполя.

---

<sup>34</sup> При глубоком анализе взаимосвязи математических и физических объектов, их  $\omega$ -отображений учитываются “диссипационные” факторы, влияющие на различие абстрактного и реального, а также на трансформацию объектов при  $\omega$ -превращениях.

## §4.2. Квазивекторы

Рассмотрим  $\omega$ -отображение вектора  $\bar{a}$ .

Пусть в  $\omega_1$  задан вектор  $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ . Тогда  $\bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus A_* = (a_x \odot \bar{i}) \cdot (a_y \odot \bar{j}) \cdot (a_z \odot \bar{k}) = a_x^{\log_k \bar{i}} \cdot a_y^{\log_k \bar{j}} \times \times a_z^{\log_k \bar{k}}, k \neq 1, k \in \mathbf{R}$ .

**Примечание.** Не следует путать вектор  $\bar{k}$  и скаляр  $\underline{k}$ , являющийся основанием логарифма.

Прологарифмируем  $A_*$ :

$$\log_k A_* = \log_k a_x \cdot \log_k \bar{i} + \log_k a_y \cdot \log_k \bar{j} + \log_k a_z \cdot \log_k \bar{k},$$

$k \neq 1, k \in \mathbf{R}$ .

По аналогии с разложением вектора  $\bar{a}$  по базису (в декартовой прямоугольной системе координат) запишем:

$$\log_k A_* = (\log_k a_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_z) \cdot \bar{k}_*, \quad \text{где}$$

$$A_* = k^{(\log_k a_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_z) \cdot \bar{k}_*}, \quad \log_k \bar{i} = \bar{i}_*, \quad \log_k \bar{j} = \bar{j}_*,$$

$$\log_k \bar{k} = \bar{k}_*;$$

$\bar{i}_*, \bar{j}_*, \bar{k}_*$  – объекты *новой природы*, которые назовем *квазиортами*, хотя они и не соответствуют общему представлению о квазивекторах. *Квазивектором*  $A_*$  вектора  $\bar{a}$  называется  $\omega$ -образ вектора  $\bar{a}$  при отображении его из  $\omega_1$  в  $\omega_0$   $\left( \bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus A_* \right)$ .

Из определения квазиорт следует:

$\bar{i} = k^{\bar{i}_*}, \bar{j} = k^{\bar{j}_*}, \bar{k} = k^{\bar{k}_*}$ , т.е. если некоторый коэффициент  $k$  ( $k \neq 1, k \in \mathbf{R}$ ) возвести в степень, которой является квазиорт, то получим соответствующий единичный вектор (орт).

Так как орты – единичные векторы, то  $\left| k^{\bar{i}_*} \right| = \left| k^{\bar{j}_*} \right| = \left| k^{\bar{k}_*} \right| = 1$ . При

$k > 0$  получим  $\left| \overline{k^{i_*}} \right| = k^{\left| \overline{i_*} \right|} = 1$ . Откуда  $\left| \overline{i_*} \right| = 0$ . Однако

$\overline{i_*}, \overline{j_*}, \overline{k_*}$  — математические объекты *новой* природы и смысл модуля этого объекта *не соответствует* привычному представлению о модуле вектора...

Для описания квазивекторов найдем  $\omega$ -образы некоторых характеристик обычных векторов и связей между ними. В частности,  $\omega$ -образы модуля вектора, скалярного произведения векторов, косинуса угла между двумя векторами и векторного произведения.

**Теорема 4.1.** Образ модуля вектора  $\overline{a}$   $\left( \overline{a} = \sum_{i=1}^n a_{x_i} \cdot \overline{e_i} \right)$  отображения  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  определяется по формуле:

$$\left| A_* \right| = k^{\sqrt{\sum_{i=1}^n \log_k^2 a_{x_i}}}, \quad (4.1)$$

где  $\left| A_* \right|$  — модуль квазивектора вектора  $\overline{a}$ .

**Доказательство.** Возьмём вектор  $\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}$  в трёхмерном пространстве. Как известно, модуль вектора равен:

$$\begin{aligned} \left| \overline{a} \right| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \text{ Отобразим его из пространства } \omega_1 \text{ в } \omega_0: \\ \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \setminus \omega_1 &\rightarrow \omega_0 \setminus \left| A_* \right| = \left( (a_x \odot a_x) (a_y \odot a_y) \times \right. \\ &\times \left. (a_z \odot a_z) \right)^{\rightarrow(1\Delta 2)}, \quad a_x \odot a_x = k^{\log_k^2 a_x} \quad (k \neq 1, k \in \mathbf{R}). \end{aligned}$$

$$\text{Обозначим } p = k^{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } A^{\rightarrow b} &= \underbrace{A \odot A \odot A \odot \dots \odot A}_{\log_k b} = k^{(\log_k A)^{\log_k b}}, \quad \text{то } \left| A_* \right| = \\ &= p^{\rightarrow(1\Delta 2)} = k^{(\log_k p)^{\log_k(1\Delta 2)}}, \quad \text{где } (1\Delta 2) = (k\Delta k^2) = k^{1/\log_k k^2} = k^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\log_k(\underline{1}\Delta\underline{2}) = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } p^{\rightarrow(\underline{1}\Delta\underline{2})} = k^{\left(\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно,  $|A_*| = k^{\sqrt{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z}}$ , что и требовалось доказать.

**Примечание.** Формула (4.1) может быть получена весьма просто, если учесть, что  $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  является функцией:

$$f(a_x, a_y, a_z) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \text{ где } a_x, a_y, a_z - \text{ аргументы.}$$

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sqrt{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z}}.$$

**Теорема 4.2.** Образ  $C_*$  скалярного произведения  $C$  двух векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , полученного  $\omega$ -отображением  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  определяется по формуле:

$$C_* = k^{\sum_{i=1}^n \log_k a_{x_i} \cdot \log_k b_{x_i}} = \prod_{i=1}^n a_{x_i} \odot b_{x_i}. \quad (4.2)$$

**Доказательство.** Пусть в трёхмерном пространстве  $\omega_1$  заданы векторы  $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$  и  $\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$ . Найдем  $\omega$ -образ скалярного произведения.  $C = \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$   
 $C_* = (a_x \odot b_x)(a_y \odot b_y)(a_z \odot b_z) = a_x^{\log_k b_x} \cdot a_y^{\log_k b_y} \cdot a_z^{\log_k b_z}, k \neq 1, k \in \mathbf{R}.$

Откуда,  $\log_k C_* = \log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z,$

$$C_* = k^{\log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z} =$$

$$= (a_x \odot b_x) \cdot (a_y \odot b_y) \cdot (a_z \odot b_z),$$

что и требовалось доказать.

**Примечание.**  $\bar{a} \cdot \bar{b} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus C_* = A_* \odot B_*$ . Действительно,

$$A_* = \left( (a_x)^{\bar{i}_*} \cdot (a_y)^{\bar{j}_*} \cdot (a_z)^{\bar{k}_*} \right), \quad B_* = \left( (b_x)^{\bar{i}_*} \cdot (b_y)^{\bar{j}_*} \cdot (b_z)^{\bar{k}_*} \right),$$

$$A_* \odot B_* = \left( (a_x)^{\bar{i}_*} \cdot (a_y)^{\bar{j}_*} \cdot (a_z)^{\bar{k}_*} \right)^{\log_k \left( (b_x)^{\bar{i}_*} \cdot (b_y)^{\bar{j}_*} \cdot (b_z)^{\bar{k}_*} \right)}, \quad \text{т.е.}$$

$$\log_k C_* = \left( (\log_k a_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_z) \cdot \bar{k}_* \right) \cdot \left( (\log_k b_x) \times \right. \\ \left. \times \bar{i}_* + (\log_k b_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k b_z) \cdot \bar{k}_* \right).$$

Из (4.2) следует, что  $\log_k C_* = \log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \times \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z$ , т.е. логарифм  $\omega$ -образа скалярного произведения двух векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  равен рефлексивному произведению соответствующих квазивекторов, которое, в свою очередь, равно сумме парных произведений логарифмов соответствующих проекций векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

Образ скалярного произведения  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  обладает коммутативностью и дистрибутивностью. Напомним, что при этом следует учитывать ранг операций. Умножение и сложение при отображении  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  будут соответственно трансформироваться в операции на порядок выше (рефлексивное умножение и обыкновенное умножение).

**Теорема 4.3.** Квазивекторы  $A_*$ ,  $B_*$ ,  $D_*$  обладают свойствами **коммутативности** относительно рефлексивного умножения и **дистрибутивности** относительно обыкновенного умножения.

**Доказательство.** а). Докажем коммутативность  $A_*$  и  $B_*$ . Обозначим  $A_* \odot B_* = C_*$ , где  $C_*$  —  $\omega$ -образ скалярного произведения. Тогда

$$\log_k C_* = \log_k \left( A_* \odot B_* \right) = \log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \times$$



$\times \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z = \log_k \left( B_* \odot A_* \right)$ , т.е.  $C_* = B_* \odot A_*$ , что и требовалось доказать.

**Примечание.** Коммутативность  $A_*$  и  $B_*$  следует, конечно, непосредственно из коммутативности операции  $\odot$ . Доказательство приводится только потому, что  $A_*$  и  $B_*$  – математические объекты новой природы.

б). Докажем дистрибутивность  $A_*$ ,  $B_*$ ,  $D_*$ . Обозначим

$$A_* \odot (B_* \cdot D_*) = P_1. \text{ Тогда } \log_k p_1 = \log_k \left( A_* \odot (B_* \cdot D_*) \right).$$

$$\text{Обозначим } p_2 = (A_* \odot B_*) \cdot (A_* \odot D_*).$$

$$\text{Тогда } \log_k p_2 = \log_k (A_* \odot B_*) + \log_k (A_* \odot D_*),$$

$$\begin{aligned} \log_k (A_* \odot B_*) &= \log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \\ &+ \log_k a_z \cdot \log_k b_z, \quad \log_k (A_* \odot D_*) = \log_k a_x \cdot \log_k d_x + \\ &+ \log_k a_y \cdot \log_k d_y + \log_k a_z \cdot \log_k d_z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_k p_2 &= \log_k a_x \cdot \log_k (b_x \cdot d_x) + \log_k a_y \cdot \log_k (b_y \cdot d_y) + \\ &+ \log_k a_z \cdot \log_k (b_z \cdot d_z). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $\log_k p_1 = \log_k \left( A_* \odot (B_* \cdot D_*) \right)$ . Так как

$$\begin{aligned} \log_k (B_* \cdot D_*) &= \log_k B_* + \log_k D_* = (\log_k b_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k b_y) \cdot \bar{j}_* + \\ &+ (\log_k b_z) \cdot \bar{k}_* + (\log_k d_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k d_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k d_z) \cdot \bar{k}_* = \\ &= (\log_k b_x \cdot d_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k b_y \cdot d_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k b_z \cdot d_z) \cdot \bar{k}_*, \end{aligned} \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \log_k \left( A_* \odot (B_* \cdot D_*) \right) &= \log_k a_x \cdot \log_k (b_x d_x) + \log_k a_y \cdot \log_k (b_y d_y) + \\ &+ \log_k a_z \cdot \log_k (b_z d_z). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \log_k p_2 = \log_k p_1 \Rightarrow p_2 \equiv p_1, \text{ а } A_* \odot (B_* \cdot D_*) =$$

$= \left( A_* \odot B_* \right) \left( A_* \odot D_* \right)$ , т.е. дистрибутивность квазивекторов  $A_*$ ,  $B_*$ ,  $D_*$  доказана.

Нетрудно найти  $\omega$ -образы других характеристик векторов. Например, отобразим  $\cos \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между двумя векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , расположенными в пространстве  $\omega_1$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \quad \backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash \quad k^{\cos \log_k \varphi_*} = k^{\left( \log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z \right) / \left( \sqrt{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z} \times \sqrt{\log_k^2 b_x + \log_k^2 b_y + \log_k^2 b_z} \right)}, \quad \text{т.е.} \quad \cos \log_k \varphi_* =$$

$$= \frac{\log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z}{\sqrt{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z} \cdot \sqrt{\log_k^2 b_x + \log_k^2 b_y + \log_k^2 b_z}} \quad (4.3)$$

Действительно, из (4.1) и (4.2) следует:

$$k^{\cos \log_k \varphi_*} = \left( k^{\log_k a_x \cdot \log_k b_x + \log_k a_y \cdot \log_k b_y + \log_k a_z \cdot \log_k b_z} \right)_{\Delta} \Delta \left( \left( k^{\sqrt{\log_k^2 a_x + \log_k^2 a_y + \log_k^2 a_z}} \right) \odot \left( k^{\sqrt{\log_k^2 b_x + \log_k^2 b_y + \log_k^2 b_z}} \right) \right).$$

После несложных преобразований получим формулу (4.3), в которой  $\varphi_*$  – ”угол” между квазивекторами  $A_*$  и  $B_*$ . Итак, квазивекторы – это объекты новой природы, которые *характеризуются* некоторой величиной, называемой *модулем* ( $|A_*|$  и  $|B_*|$ ), а также *ориентацией* в пространстве. В частности, два квазивектора ориентированы между собой с характеристикой ориентации в виде параметра  $\varphi_*$ , который идентифицирован углом между векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

Наконец, найдем  $\omega$ -образ  $W_*$  векторного произведения  $\bar{W} = \bar{a} \times \bar{b}$ :

$$\bar{W} = (a_y b_z - a_z b_y) \cdot \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \cdot \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \bar{k}$$

$$\bar{W} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus W_* = \left( \frac{a_y \odot b_z}{a_z \odot b_y} \odot \bar{i} \right) \cdot \left( \frac{a_z \odot b_x}{a_x \odot b_z} \odot \bar{j} \right) \cdot \left( \frac{a_x \odot b_y}{a_y \odot b_x} \odot \bar{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \log_k W_* &= \log_k \left( \frac{a_y \odot b_z}{a_z \odot b_y} \right) \cdot \bar{i}_* + \log_k \left( \frac{a_z \odot b_x}{a_x \odot b_z} \right) \cdot \bar{j}_* + \\ &+ \log_k \left( \frac{a_x \odot b_y}{a_y \odot b_x} \right) \cdot \bar{k}_*, \end{aligned}$$

$$W_* = k^{\log_k \left( \frac{a_y \odot b_z}{a_z \odot b_y} \right) \cdot \bar{i}_* + \log_k \left( \frac{a_z \odot b_x}{a_x \odot b_z} \right) \cdot \bar{j}_* + \log_k \left( \frac{a_x \odot b_y}{a_y \odot b_x} \right) \cdot \bar{k}_*}.$$

Откуда (4.4)

$$\begin{aligned} W_* &= k^{(\log_k a_y \cdot \log_k b_z - \log_k a_z \cdot \log_k b_y) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_z \cdot \log_k b_x - \\ &- \log_k a_x \cdot \log_k b_z) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_x \cdot \log_k b_y - \log_k a_y \cdot \log_k b_x) \cdot \bar{k}_*}. \end{aligned}$$

Аналогично можно получить  $\omega$ -образы любых объектов векторного анализа.

### §4.3. $\omega$ -образ теории поля

Рассмотрим  $\omega$ -образы основных понятий теории поля.

### 4.3.1. Градиент

Пусть в пространстве  $\omega_1$  задан вектор  $\bar{a}$  в виде вектора-функции:

$\bar{a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \bar{e}_i$ , где  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а  $\bar{e}_i$  – орты (единичные векторы, т.е.  $|\bar{e}_i| = 1$ ).

Отобразим вектор  $a$  в пространство  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \bar{e}_i \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus A_* = \prod_{i=1}^n \left( \left( k^{f_{x_i}} \right) \odot \bar{e}_i \right) = \\ &= \prod_{i=1}^n \left( k^{f_{x_i} \cdot \bar{e}_{i*}} \right), \text{ где } f_{x_i} = \frac{x_i \cdot f}{f}, f_{x_i}' = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \bar{e}_{i*} = \log_k \bar{e}_i. \end{aligned}$$

После логарифмирования квазивектора  $A_*$  получим:

$$\log_k A_* = \log_k \prod_{i=1}^n \left( k^{f_{x_i} \cdot \bar{e}_{i*}} \right) = \sum_{i=1}^n \log_k k^{f_{x_i} \cdot \bar{e}_{i*}} = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \cdot \bar{e}_{i*}.$$

Как видно, в данном случае  $\omega$  – отображение привело к квазивектору, однозначно идентифицированному вектору  $\bar{a}$  ( $\bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a_*}$ , где

$$a_* = \sum_{i=1}^n f_{x_i} \cdot \bar{e}_{i*}.$$

По структуре вектор-функция  $\bar{a}$  – это градиент, т.е.  $\bar{a} \equiv \text{grad } f$ . Получили формулу, определяющую квазиградиент функции  $f$ :

$$\text{grad } f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus G_* = k^{\sum_{i=1}^n \left( f_{x_i}' \right) \cdot \bar{e}_{i*}}, \quad (4.5)$$

где  $G_*$  – квазиградиент  $f'$ .

Найдем  $\omega$ -образ модуля градиента:

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( f_{x_i}' \right)^2} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus B \rightarrow (1 \triangle 2) =$$

$$= \left( \prod_{i=1}^n k \left( 'f_{x_i} \right)^2 \right)^{\rightarrow(1\Delta 2)}, \quad \text{так как} \quad \left( f'_{x_i} \right)^2 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$$

$$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k 'f_{x_i} \odot k 'f_{x_i} = k \left( 'f_{x_i} \right)^2.$$

Как было установлено ранее, показатель степени  $\rightarrow(1\Delta 2) = \Rightarrow \sqrt{k}$ , то

$$B^{\rightarrow \sqrt{k}} = k^{\sqrt{\log_k B}} = k^{\sqrt{\log_k \prod_{i=1}^n k \left( 'f_{x_i} \right)^2}} = k^{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}}.$$

$$\text{Итак, } |\text{grad } f| \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}}.$$

Найдем  $\omega$ -образ направляющих косинусов градиента.

Пусть  $\alpha_i$  – углы, образованные градиентом с осями координат в  $n$ -мерном пространстве. Тогда

$$\cos \alpha_i = \frac{f'_{x_i}}{|\text{grad } f|} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\cos \log_k \alpha_{i*}} = k 'f_{x_i} \Delta k^{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}} =$$

$$= \left( k 'f_{x_i} \right)^{\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}}} = k 'f_{x_i} / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}.$$

$$\text{Откуда } \cos \log_k \alpha_{i*} = \frac{'f_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( 'f_{x_i} \right)^2}}, \text{ а}$$

$$\sum_{i=1}^n (\cos \log_k \alpha_{i*})^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{{}'f_{x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n ({}'f_{x_i})^2}} \right)^2 = 1,$$

где  $\alpha_{i*}$  – ”углы”, образованные *квазиградиентом* с осями координат.

Получили формулу 
$$\sum_{i=1}^n (\cos \log_k \alpha_{i*})^2 = 1, \quad (4.6)$$

которая аналогична общеизвестной формуле  $\sum_{i=1}^n \cos^2 \alpha_i = 1$ .

#### 4.3.2. Производная по направлению

Известно, что  $\frac{df}{ds} = \bar{s} \cdot \text{grad } f$ , где  $\bar{s}$  – направление. Найдем  $\omega$ -образ производной по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} = \bar{s} \cdot \text{grad } f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus P_s = S_* \odot k^{\sum_{i=1}^n {}'f_{x_i} \cdot \overline{e_{i*}}} \\ \log_k P_s = \left( \sum_{i=1}^n ({}'f_{x_i}) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n (\log_k s_{x_i}) \cdot \overline{e_{i*}} \right). \end{aligned}$$

Получили  $\omega$ -образ скалярного произведения двух векторов  $\bar{s}$  и  $\text{grad } f$ .

Из (4.2) следует:

$$\begin{aligned} \log_k P_s &= \sum_{i=1}^n ({}'f_{x_i}) \cdot \log_k s_{x_i}, \\ \text{т.е.} \quad P_s &= k^{\sum_{i=1}^n ({}'f_{x_i}) \cdot \log_k s_{x_i}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Известно, что в скалярном поле бесконечная совокупность производных скалярной функции  $f$  по направлению определяет *градиент* поля, являющийся *мерой неоднородности* поля  $f$ , в векторном поле совокуп-

ность производных вектора по направлению определяет тензор второго ранга  $\nabla \bar{a}$  с компонентами  $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ . Его рассматривают как меру неоднородности векторного поля  $\bar{a}$ .

### 4.3.3. Дивергенция

Найдем  $\omega$ -образ дивергенции векторного поля. Пусть в  $\omega_1$  задан вектор  $\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_{x_i} \cdot \bar{e}_i$ . Тогда его дивергенция равна

$$\mathbf{div} \bar{a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{x_i}}{\partial x_i}.$$

Найдем ее образ в пространстве  $\omega_0$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{x_i}}{\partial x_i} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus D_* = \prod_{i=1}^n k \left( a_{x_i} \right)_{x_i}.$$

Полученное выражение  $D_* = \prod_{i=1}^n k \left( a_{x_i} \right)_{x_i}$  назовем *квазидивергенцией*. Прологарифмировав это выражение, получим:

$$\log_k D_* = \log_k \prod_{i=1}^n k \left( a_{x_i} \right)_{x_i} = \sum_{i=1}^n \log_k k \left( a_{x_i} \right)_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left( a_{x_i} \right)_{x_i}.$$

$$\text{Откуда} \quad D_* = k^{\sum_{i=1}^n \left( a_{x_i} \right)_{x_i}} \quad (4.8)$$

*Квазидивергенция* – это образ в  $\omega_0$   $\mathbf{div} \bar{a}$ , записанной в  $\omega_1$ . Квазидивергенция (по аналогии с квазиградиентом) – это трансформированный образ первоначального объекта  $(\mathbf{div} \bar{a})$  относительно операции логарифмирования, так как  $\log_k D_* \neq \mathbf{div} \bar{a}$ .

#### 4.3.4. Ротор

Найдем  $\omega$ -образ в  $\omega_0$  ротора векторного поля, заданного в  $\omega_1$ .

Пусть в  $\omega_1$  задан вектор  $\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ . Тогда

$$\mathbf{rot} \bar{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{i} + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{k}.$$

Отобразим  $\mathbf{rot} \bar{a}$  в пространство  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus R_* &= \begin{pmatrix} \frac{k}{k} \frac{(a_z)_y}{(a_y)_z} \odot \bar{i} \\ \frac{k}{k} \frac{(a_x)_z}{(a_z)_x} \odot \bar{j} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{k}{k} \frac{(a_y)_x}{(a_x)_y} \odot \bar{k} \end{pmatrix} = k \left( \frac{(a_z)_y}{(a_y)_z} - \frac{(a_y)_z}{(a_z)_x} \right) \cdot \bar{i}_* + \left( \frac{(a_x)_z}{(a_z)_x} - \frac{(a_z)_x}{(a_x)_y} \right) \cdot \bar{j}_* + \\ &+ \left( \frac{(a_y)_x}{(a_x)_y} - \frac{(a_x)_y}{(a_y)_z} \right) \cdot \bar{k}_* = k (\mathbf{rot} \bar{a})_0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $(\mathbf{rot} \bar{a})_0$  — новый математический объект, аналогичный по форме записи обычному ротору.

В результате получили *квазиротор*  $R_*$ . Логарифмируя его, найдем

$$\begin{aligned} \log_k R_* &= (\mathbf{rot} \bar{a})_0 = \left( \frac{(a_z)_y}{(a_y)_z} - \frac{(a_y)_z}{(a_z)_x} \right) \cdot \bar{i}_* + \left( \frac{(a_x)_z}{(a_z)_x} - \frac{(a_z)_x}{(a_x)_y} \right) \cdot \bar{j}_* + \\ &+ \left( \frac{(a_y)_x}{(a_x)_y} - \frac{(a_x)_y}{(a_y)_z} \right) \cdot \bar{k}_*. \end{aligned}$$

#### 4.3.5. Основные формулы, характеризующие квазиполе

а). Найдем  $\omega$ -образ *соленоидального* поля.  $\mathbf{div} \bar{a} = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow$



$\rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sum_{i=1}^n (a_{xi})_{xi}} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_{xi})_{xi} = 0$ . Последнее равенство равно-

сильно  $\sum_{i=1}^n (a_{xi})_{xi} = 0$ , т.е.  $\mathbf{div} \bar{a} = 0$ . Естественно, если в пространстве

$\omega_1$  отсутствуют в некоторой области  $\Omega_1$  источники (или стоки), то они будут отсутствовать и в соответствующей области  $\Omega_i$  любого пространства  $\omega_i$ .

б). Найдем образ  $\omega$ -образ *потенциального* поля.  $\mathbf{rot} \bar{a} = 0$  — это условие потенциальности поля. Тогда  $\mathbf{rot} \bar{a} = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$

$$\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{(\mathbf{rot} \bar{a})_0} = 1 \Rightarrow (\mathbf{rot} \bar{a})_0 = 0, \quad \text{т.е.} \quad \left( (a_z)_y - (a_y)_z \right) \cdot \bar{i}_* + \left( (a_x)_z - (a_z)_x \right) \cdot \bar{j}_* + \left( (a_y)_x - (a_x)_y \right) \cdot \bar{k}_* = 0.$$

Это условие потенциального квазиполя.

в). Найдем  $\omega$ -образ условия *гармоничности* функции. Для этого отобразим сначала оператор набла  $\nabla$  (оператор Гамильтона):

$$\nabla \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \bar{e}_i \quad \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \quad \nabla_0 = \prod_{i=1}^n k^{(\partial x_i)} \odot \bar{e}_i =$$

$$= \prod_{i=1}^n k^{(\partial x_i) \cdot \bar{e}_{i*}}, \quad \text{где} \quad (\partial x_i) = x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right). \quad \text{Получили квазивектор набла}$$

$$\nabla_0 \left( \nabla_0 = k^{\sum_{i=1}^n (\partial x_i) \cdot \bar{e}_{i*}} \right).$$

Прологарифмируем  $\nabla_0$ :

$$\log_k \nabla_0 = \sum_{i=1}^n (\partial x_i) \cdot \bar{e}_{i*} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \bar{e}_{i*},$$

$$\text{т.е. } \nabla_0 = k^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}}} \quad (4.10)$$

Заметим, что  $\nabla f = \mathbf{grad} f$  (произведение скалярной функции  $f$  на вектор  $\nabla$ ). Тогда  $\omega$ -образ будет соответственно *квазиградиентом*, т.е.

$$\nabla_0 f = G_* = k^{\sum_{i=1}^n \left( f_{x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}}} \quad (\text{это следует из (4.10)}).$$

Известно, что  $\mathbf{div} \bar{a} = \nabla \cdot \bar{a}$ , т.е.  $\mathbf{div} \bar{a}$  — это скалярное произведение оператора набла и вектора  $\bar{a}$ . Тогда  $\omega$ -образ дивергенции (*квазидивергенция*)  $D_*$  согласно (4.8) равен:

$$D_* = k^{\sum_{i=1}^n \left( a_{x_i} \right)_{x_i}} = k^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial x_i}}.$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } D_* &= \nabla_0 \odot A_* = \left( k^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}}} \right) \odot \\ &\odot \left( k^{\sum_{i=1}^n \left( \log_k a_{x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}}} \right) = k^{\left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \log_k a_{x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right)}. \\ \log_k D_* &= \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \log_k a_{x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial x_i} \left( \log_k D_* = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \ln k^{\log_k a_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \quad (4.11) \end{aligned}$$

где "·" — знак скалярного произведения.

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов в квазиорто-вом выражении вида*  $\left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \left( \log_k a_{x_i} \right) \cdot \overline{e_{i*}} \right)$  *реконст-*

$$\text{руируется в } \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial x_i} \right).$$

Аналогично, для квазиротора  $R_*$  будет справедливо равенство:

$$R_* = \nabla_0 \otimes A_* = k^{\left( \text{rot} \bar{a} \right)_0},$$

где  $\otimes$  — операция новой природы, являющаяся  $\omega$ -образом (при отображении  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$ ) векторного произведения.

Прологарифмируем  $R_*$ :

$$\log_k R_* = \log_k \left( \nabla_0 \otimes A_* \right) = \left( \text{rot} \bar{a} \right)_0.$$

$$\nabla_0 \otimes A_* = \left( k^{\left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \cdot \bar{e}_{i*} \right)} \right) \otimes \left( k^{\left( \sum_{i=1}^n \left( \log_k a_{x_i} \right) \cdot \bar{e}_{i*} \right)} \right)$$

Для  $n = 3$

$$\begin{aligned} \nabla_0 \otimes A_* &= \left( k^{x \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial x} \right) \cdot \bar{i}_* + y \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial y} \right) \cdot \bar{j}_* + z \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial z} \right) \cdot \bar{k}_*} \right) \otimes \\ &\otimes \left( k^{\left( \log_k a_x \right) \cdot \bar{i}_* + \left( \log_k a_y \right) \cdot \bar{j}_* + \left( \log_k a_z \right) \cdot \bar{k}_*} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны,  $R_* = k^{\left( \left( (a_z)_y - (a_y)_z \right) \cdot \bar{i}_* + \left( (a_x)_z - (a_z)_x \right) \cdot \bar{j}_* + \right.}$   
 $\left. + \left( (a_y)_x - (a_x)_y \right) \cdot \bar{k}_* \right), \text{ т.е.}$

$$\log_k \left( \nabla_0 \otimes A_* \right) = \log_k R_* = \begin{vmatrix} \bar{i}_* & \bar{j}_* & \bar{k}_* \\ x \cdot \frac{\partial \ln}{\partial x} & y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} & z \cdot \frac{\partial \ln}{\partial z} \\ \log_k a_x & \log_k a_y & \log_k a_z \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

т.е. операция  $\otimes$  между квазивекторами при логарифмировании трансформируется в векторное произведение двух соответствующих векторов в квазиортовой форме.

Формула (4.12) согласуется с (4.11). Действительно,  $\left( \left( y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} \right) \bullet \right.$   
 $\bullet \log_k a_z - \left( z \cdot \frac{\partial \ln}{\partial z} \right) \bullet \log_k a_y \Big) \cdot \bar{i}_* = \left( \left( y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} \right) \bullet \log_k a_z \right) \cdot \bar{i}_* -$   
 $-\left( \left( z \cdot \frac{\partial \ln}{\partial z} \right) \bullet \log_k a_y \right) \cdot \bar{i}_* = \left( y \cdot \frac{\partial \ln a_z}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial \ln a_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{i}_*.$

Итак, что произведение проекций  $(y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} \cdot \log_k a_z$  и других) при формировании скалярного произведения в квазиортовой математической конструкции реализуется по такому правилу:  $\left( y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} \right) \times$

$\times \log_k a_z \Rightarrow y \cdot \frac{\partial \ln a_z}{\partial y}$ . Напомним, что запись скалярного произведения оператора набла  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$  и вектора  $\bar{a} = a_x \bar{i} +$   
 $+ a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  осуществлялась так:

$$\nabla \cdot \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \text{ а по формуле (4.11) } \left( x \frac{\partial \ln}{\partial x} \bar{i}_* + \right.$$

$$+ y \frac{\partial \ln}{\partial y} \bar{j}_* + z \frac{\partial \ln}{\partial z} \bar{k}_* \Big) \bullet \left( (\log_k a_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_z) \cdot \bar{k}_* \right) =$$

$$= x \cdot \frac{\partial \ln a_x}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \ln a_y}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \ln a_z}{\partial z}.$$

Формула (4.12) по структуре напоминает ротор:

$$\mathbf{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$\log_k R_* = (\mathbf{rot} \bar{a})_0 = \begin{vmatrix} \bar{i}_* & \bar{j}_* & \bar{k}_* \\ {}'\partial_x & {}'\partial_y & {}'\partial_z \\ \log_k a_x & \log_k a_y & \log_k a_z \end{vmatrix},$$

где  ${}'\partial_x = x \frac{\partial \ln}{\partial x}$ ,  ${}'\partial_y = y \frac{\partial \ln}{\partial y}$ ,  ${}'\partial_z = z \frac{\partial \ln}{\partial z}$ .

в). Рассмотрим  $\omega$ -образы гармонической функции.

Известно, что  $\mathbf{div}(\mathbf{grad} f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f$ , где  $f$ , удовлетворяю-

щая уравнению Лапласа, т.е. уравнению  $\Delta f = 0$  называется гармонической функцией.

**Теорема 4.4.** Если функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – гармоническая в пространстве  $\omega_1$ , то в пространстве  $\omega_0$  она удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_i^2} \right) = 0.$$

**Доказательство.** Пусть в  $\omega_1$  задана гармоническая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , т.е.  $\Delta f = 0$ .

Так как  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus {}''f = k^{\ln k \cdot x} \left( \overset{\bullet}{u}_x + x \cdot \overset{\bullet\bullet}{u}_{xx} \right)$ , где  $u = \ln f$ , а

$$\overset{\bullet}{u}_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \overset{\bullet\bullet}{u}_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{то} \quad \Delta f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta_0 f = \prod_{i=1}^n {}''f_{x_i x_i} =$$

$$= \prod_{i=1}^n k^{\ln k \cdot x_i} \left( \overset{\bullet}{u}_{x_i} + x_i \cdot \overset{\bullet\bullet}{u}_{x_i x_i} \right).$$

Откуда 
$$\ln \Delta_0 f = \ln \prod_{i=1}^n f_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^n \ln f_{x_i x_i} = \ln^2 k \cdot \sum_{i=1}^n x_i \times$$
  

$$\times \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_i^2} \right). \quad (4.13)$$

Из условия  $\Delta f = 0$  следует  $\Delta_0 f = 1$  ( $0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^0 = 1$ ), т.е.

$$\ln \Delta_0 f = 0. \text{ Тогда } \sum_{i=1}^n \left( x_i \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} + x_i^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_i^2} \right) = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что  $\Delta_0$  –  $\omega$ -образ лапласиана (квазилапласиан).

**Теорема 4.5.** Если  $f$  – гармоническая функция, то справедливо равенство:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) e_{i*} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) e_{i*} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \ln \left( x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right) \right) \quad {}^{35} \end{aligned} \quad (4.14)$$

**Доказательство.** Так как  $\Delta f = \mathbf{div}(\mathbf{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f)$ , то

---

<sup>35</sup> Скалярное произведение векторов  $\nabla$  и  $\nabla f$ , представленных в квазиортовой форме, реконструируется в скалярную функцию

$$\sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \ln \left( x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right) \right). \text{ Из (4.14) следует новое правило}$$

трансформации объектов новой природы, которыми являются векторы (векторные функции), записанные в квазиортовой форме. Оно понятно из равенства (4.14) без каких-либо пояснений.

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta_0 f = \nabla_0 \odot (\nabla_0 f) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) \odot \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) =$$

$$= k \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) \right).$$

Прологарифмируем это выражение:

$$\log_k \Delta_0 f = \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right)^{-} e_{i*} \right) \cdot \ln k.$$

Из теоремы 4.4 следует, что

$$\ln \Delta_0 f = \ln^2 k \cdot \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_i^2} \right), \text{ т.е.}$$

$$\frac{\ln(\Delta_0 f)}{\ln^2 k} = \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x_i^2} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{1}{x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right)} \cdot \frac{\partial \left( x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \ln \left( x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда } & \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln}{\partial x_i} \right) \bar{e}_{i*} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \bar{e}_{i*} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \ln \left( x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$\text{Примечание. } \Delta_0 f = k^{\ln k} \cdot \sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial \ln \left( x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right) \right)}{\partial x_i} \right).$$

#### 4.3.6 $\omega$ -образы некоторых соотношений векторного анализа

В связи с простотой все доказательства, приведенные ниже, изложены без подробных объяснений.

а) Пусть в  $\omega_1$  дан  $\mathbf{grad}(c \cdot f)$ , где  $c = \text{const}$ . Тогда

$$\mathbf{grad}(c \cdot f) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sum_{i=1}^n (c \odot f)_{x_i} \bar{e}_{i*}}, \quad (4.15)$$

$$\text{где } c \odot f = f^{\log k^c} = f^{c_1} \quad (c_1 = \log_k c), \quad (f^{c_1})_{x_i} =$$

$$= x_i \cdot (\ln f^{c_1})'_{x_i} = x_i \cdot c_1 \cdot (\ln f)'_{x_i} = c_1 \cdot f'_{x_i}, \text{ т.е. } \omega\text{-образ } \mathbf{grad}(c \cdot f)$$

$$\text{в } \omega_0 \text{ равен } k^{c_1 \sum_{i=1}^n f'_{x_i} \bar{e}_{i*}} = G_*^{c_1}. \quad (4.16)$$

Известно, что,  $\mathbf{grad}(c \cdot f) = c \cdot \mathbf{grad} f$ , т.е.

$$c \cdot \mathbf{grad} f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus c \odot G_* = G_*^{\log k^c} = G_*^{c_1}. \quad (4.17)$$

Фактически, мы доказали равенство



$$G_*(c \odot f) = c \odot G_*, \quad (4.18)$$

$$\text{так как } G_*(c \odot f) = k^{\sum_{i=1}^n (c \odot f)_{x_i} \cdot \bar{e}_i}.$$

Аналогично, можно доказать, что  $\mathbf{grad}(c_1 \cdot f_1 + c_2 \cdot f_2) \setminus \omega_1 \rightarrow \rightarrow \omega_0 \setminus G_{1*}^{\log_k c_1} \cdot G_{2*}^{\log_k c_2}$ , где  $G_{1*}$ ,  $G_{2*}$  — соответствующие  $\omega$ -образы  $\mathbf{grad} f_1$  и  $\mathbf{grad} f_2$ .

б). Найдем  $\omega$ -образ  $\mathbf{rot}(c_1 \bar{a}_1 + c_2 \bar{a}_2)$ .

$$\begin{aligned} \log_k R_* &= \mathbf{rot}\left(\bar{a}_1^{-\log_k c_1} \cdot \bar{a}_2^{-\log_k c_2}\right)_0 = \left(\mathbf{rot}\left(\bar{a}_1^{c_{1*}} \cdot \bar{a}_2^{c_{2*}}\right)\right)_0 = \\ &= \left(\left(a_{1z}^{c_{1*}} \cdot a_{2z}^{c_{2*}}\right)_y - \left(a_{1y}^{c_{1*}} \cdot a_{2y}^{c_{2*}}\right)_z\right) \bar{i}_* + \\ &+ \left(\left(a_{1x}^{c_{1*}} \cdot a_{2x}^{c_{2*}}\right)_z - \left(a_{1z}^{c_{1*}} \cdot a_{2z}^{c_{2*}}\right)_x\right) \bar{j}_* + \\ &+ \left(\left(a_{1y}^{c_{1*}} \cdot a_{2y}^{c_{2*}}\right)_x - \left(a_{1x}^{c_{1*}} \cdot a_{2x}^{c_{2*}}\right)_y\right) \bar{k}_*. \end{aligned}$$

Преобразуем  $\left(a_{1z}^{c_{1*}} \cdot a_{2z}^{c_{2*}}\right)_y$ :

$$\begin{aligned} y\left(\ln a_{1z}^{c_{1*}} \cdot a_{2z}^{c_{2*}}\right)'_y &= y(\ln a_{1z})'_y \cdot c_{1*} + y(\ln a_{2z})'_y \cdot c_{2*} = \\ &= c_{1*} \cdot (a_{1z})_y + c_{2*} \cdot (a_{2z})_y. \end{aligned}$$

Тогда,  $\left(a_{1z}^{c_{1*}} \cdot a_{2z}^{c_{2*}}\right)_y - \left(a_{1y}^{c_{1*}} \cdot a_{2y}^{c_{2*}}\right)_z = c_{1*} \times$

$$\begin{aligned}
& \times \left( (a_{1z})_y - (a_{1y})_z \right) + c_{2*} \cdot \left( (a_{2z})_y - (a_{2y})_z \right), \text{ т.е. } \log_k R_* = \\
& = c_{1*} \cdot \left[ \left( (a_{1z})_y - (a_{1y})_z \right) \cdot \overline{i_*} + \left( (a_{1x})_z - (a_{1z})_x \right) \cdot \overline{j_*} + \right. \\
& + \left. \left( (a_{1y})_x - (a_{1x})_y \right) \cdot \overline{k_*} \right] + c_{2*} \cdot \left[ \left( (a_{2z})_y - (a_{2y})_z \right) \cdot \overline{i_*} + \right. \\
& + \left. \left( (a_{2x})_z - (a_{2z})_x \right) \cdot \overline{j_*} + \left( (a_{2y})_x - (a_{2x})_y \right) \cdot \overline{k_*} \right] = \\
& = c_{1*} \cdot (\mathbf{rot} a_1)_0 + c_{2*} \cdot (\mathbf{rot} a_2)_0.
\end{aligned}$$

Откуда,  $R_* = \left( k^{(\mathbf{rot} a_1)_0} \right)^{c_{1*}} \cdot \left( k^{(\mathbf{rot} a_2)_0} \right)^{c_{2*}} = R_{1*}^{c_{1*}} \cdot R_{2*}^{c_{2*}}$ , где  $R_{1*}$ ,

$R_{2*}$ ,  $R_*$  — соответственно  $\omega$ -образы  $\mathbf{rot} \overline{a_1}$ ,  $\mathbf{rot} \overline{a_2}$ ,  $\mathbf{rot}(c_1 \overline{a_1} + c_2 \overline{a_2})$ , полученные отображением  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ .

в). Найдем  $\omega$ -образ  $\mathbf{div}(\mathbf{grad} f)$ .

$$\mathbf{div}(\mathbf{grad} f) = \nabla \cdot \nabla f \setminus \omega_I \rightarrow \omega_0 \setminus D_*(G(f)) = \nabla_0 \odot \nabla_0 f =$$

$$= k^{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \ln}{\partial x_i} e_{i*}} \odot k^{\sum_{i=1}^n (f)_{x_i} \overline{e_{i*}}} = k^{\sum_{i=1}^n \left( x_i^2 \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \ln \left( x_i \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_i} \right)} =$$

$= \Delta_0 f$ . (Согласно теореме 4.5 и формуле (4.14)), где  $\Delta_0 f$  —  $\omega$ -образ лапласиана.

г). Докажем, что  $R_*(G(f)) = 1$ . Так как  $G = k^{\sum_{i=1}^n (f)_{x_i} \overline{e_{i*}}}$ , то для

$n=3$  получим  $(\mathbf{rot} G)_0 = \left( (G_z)_y - (G_y)_z \right) \overline{i_*} + \left( (G_x)_z - \right.$

$$- '(G_z)_x) \overline{j_*} + \left( '(G_y)_x - '(G_x)_y \right) \overline{k_*}, \quad G_x = k \frac{x \cdot \partial \ln f}{\partial x}, \quad G_y = k \frac{y \cdot \partial \ln f}{\partial y},$$

$$G_z = k \frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z}, \quad '(G_z)_y = \frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z} \cdot \ln k \cdot \left( \frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z} \right)_y =$$

$$= \frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z} \cdot \ln k \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial z} \right)_y = \frac{\frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z} \cdot \ln k \cdot y \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial z \partial y}}{\frac{\partial \ln f}{\partial z}} =$$

$$= z \cdot y \cdot \ln k \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial z \partial y}. \text{ В данном случае } '(G_z)_y \text{ находим, используя табли-}$$

цу неприведенного образа производной функции:

$$(a^f)' = f \cdot \ln a \cdot f', \quad (u \cdot v)' = u' + v', \quad f(\varphi(x))' = f'_{\varphi} \cdot \varphi'_x$$

$$\left( \left( \frac{z \cdot \partial \ln f}{\partial z} \right)_y = \left( \frac{\partial \ln f}{\partial z} \right)_y = \frac{0 + y \cdot \left( \frac{\partial \ln f}{\partial z} \right)_y'}{\frac{\partial \ln f}{\partial z}} = \frac{y \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial z \partial y}}{\frac{\partial \ln f}{\partial z}} \right)$$

$$\text{Аналогично, } (G_y)_z = y \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial y} \cdot \ln k \cdot \left( y \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial y} \right)_z = y \cdot z \times$$

$$\times \ln k \cdot \frac{\partial^2 \ln f}{\partial y \partial z}. \text{ В связи с тем, что } \frac{\partial^2 \ln f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \ln f}{\partial y \partial z}, \text{ получим}$$

$$(G_z)_y = (G_y)_z. \text{ Точно также доказываются равенства } (G_x)_z = (G_z)_x$$

и  $'(G_y)_x = '(G_x)_y$ , т.е.  $(\mathbf{rot} G)_0 = 0$ . Откуда

$$R_*(G(f)) = k^{(\mathbf{rot} G)_0} = 1. \text{ Получили, что}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}(f)) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus R_*(G(f)) = 1$$

Действительно,  $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f) = 0$ , т.е.  $0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^0 = 1$ .

д). Найдем  $\omega$ -образ выражения  $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) = \mathbf{div} \mathbf{rot} \bar{a}$ .

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \nabla_0 \odot (\nabla_0 \otimes A_*) = \nabla_0 \odot R_* = D_*(R_*(\bar{a})), \quad \text{т.е.}$$

$\nabla_0 \odot (\nabla_0 \otimes A_*) = D_*(R_*(\bar{a}))$ , где  $D_*(R_*(\bar{a}))$  — квазидивергенция от квазиротора вектора  $\bar{a}$ .

Для  $n = 3$

$$\begin{aligned} \log_k R_*(\bar{a}) &= (\mathbf{rot} \bar{a})_0 = \left( '(a_z)_y - '(a_y)_z \right) \bar{i}_* + \\ &+ \left( '(a_x)_z - '(a_z)_x \right) \bar{j}_* + \left( '(a_y)_x - '(a_x)_y \right) \bar{k}_*. \end{aligned}$$

Тогда

$$\log_k D_*(R_*(\bar{a})) = \left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0x} \right)_x + \left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0y} \right)_y + \left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0z} \right)_z,$$

где  $\left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0x} \right)_x$ ,  $\left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0y} \right)_y$ ,  $\left( (\mathbf{rot} \bar{a})_{0z} \right)_z$  — проекции  $(\mathbf{rot} \bar{a})_0$ , т.е.

$\log_k R_*$ , на соответствующие оси координат ( $(\mathbf{rot} \bar{a})_{0x}$  — на  $OX$  и т.д.)

По аналогии с предыдущим выводом можно показать, что

$$D_*(R_*(\bar{a})) = 1.$$

(Общеизвестно, что  $\mathbf{div}(\mathbf{rot} \bar{a}) = 0$ , т.е.  $D_*(R_*(\bar{a})) = k^0 = 1$ ).

Аналогично, можно найти  $\omega$ -образы и других соотношений векторного анализа. Например,

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \mathbf{grad} f &= \mathbf{rot}(f\bar{a}) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus V_* = A_* \otimes G = \\ &= k^{\sum_{i=1}^n (\log_k a_{x_i}) \bar{e}_{i*}} \otimes k^{\sum_{i=1}^n \left( \left( f_{x_i} \right) \cdot \bar{e}_{i*} \right)} = R_*(f \odot \bar{a}).\end{aligned}$$

**Примечание.** Доказательство целесообразно проводить для частного случая ( $n = 3$ ). Тогда

$$\log_k V_* = \begin{vmatrix} \bar{i}_* & \bar{j}_* & \bar{k}_* \\ \frac{x \cdot \partial \ln}{\partial x} & \frac{y \cdot \partial \ln}{\partial y} & \frac{z \cdot \partial \ln}{\partial z} \\ \log_k(a_x \odot f) & \log_k(a_y \odot f) & \log_k(a_z \odot f) \end{vmatrix}$$

Правило раскрытия такого определителя приведено выше (см. 4.3.5).

В настоящем параграфе приведены только небольшие примеры  $\omega$ -отображений векторно-скалярных соотношений, которые не захватывают всё поле полученных автором результатов.

## § 4.4 Примеры квазиполей

### 4.4.1. Поле тензора 2-го ранга

Рассмотрим поле тензора 2-го ранга  $T(r)$ , имеющего компоненты  $T_{ik} = T_{ik}(r)$ . Примером такого поля может служить поле напряжений в упругой среде.

Поток тензорного поля через поверхность – это поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения тензора  $T$  на вектор нормали  $\bar{n}$ :

$$\bar{W} = \iint_{\sigma} T \cdot \bar{n} \cdot d\sigma.$$

$\bar{W}$  – это вектор (в отличие от потока векторного поля). Компоненты потока тензорного поля равны:

$$W_i = \iint_{\sigma} T_{ik} \cdot n_k \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} (T_{i1} \cdot n_1 + T_{i2} \cdot n_2 + T_{i3} \cdot n_3) \cdot d\sigma.$$

Известна процедура свёртывания по определённым (например, первым) индексам:

$$W_i = \iint_{\sigma} T_{ki} \cdot n_k \cdot d\sigma.$$

Пусть  $T_{ik} = p_{ik}$  — тензор напряжений в упругом теле. Выделяя в этом теле некоторую поверхность  $\sigma$  и определяя равнодействующую  $\bar{F}$  всех сил напряжения, приложенных к этой поверхности:

$$\bar{F} = \iint_{\sigma} p_n \cdot d\sigma,$$

где  $p_n$  — напряжение у элемента  $d\sigma$  с нормалью  $\bar{n}$  ( $F_k = \iint_{\sigma} p_{nk} d\sigma$  — компоненты  $\bar{F}$ ), то согласно  $p_{nk} = p_{ik} \cdot n_i$  (закон преобразования координат при изменении системы координат), получим  $F_k = \iint_{\sigma} p_{ik} \cdot n_i \cdot d\sigma$ , т.е. поток тензора напряжений через поверхность, взятую в упругой среде, равен равнодействующей всех сил напряжений, приложенных к этой поверхности.

Дивергенция тензора:

$$\overline{\text{div}} T = \nabla \cdot T,$$

а производная по направлению  $\frac{dT}{ds} = \bar{s} \cdot \nabla T$ ,  $\frac{dT_{ik}}{ds} = s_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$  и т.д.

Найдем  $\omega$ -образы некоторых из вышеуказанных величин.

Известно, что  $\bar{W} = \bar{I}_{\sigma} = \iint_{\sigma} T \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$ , где

$$I_{xy} = \iint_{D_{xy}} T dx dy, \quad I_{xz} = \iint_{D_{xz}} T dx dz, \quad I_{yz} = \iint_{D_{yz}} T dy dz; \quad D_{xy}, \quad D_{xz},$$

$D_{yz}$  — проекции поверхности  $\sigma$  на координатные плоскости  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $YOZ$ .

$$\text{Тогда } \bar{W} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus W_* = (I_{yz*} \odot \bar{i}) \cdot (I_{xz*} \odot \bar{j}) \cdot (I_{xy*} \odot \bar{k}) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \log_k W_* &= (\log_k I_{yz*}) \cdot \bar{i}_* + (\log_k I_{xz*}) \cdot \bar{j}_* + (\log_k I_{xy*}) \cdot \bar{k}_* = \\ &= (\log_k w_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k w_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k w_z) \cdot \bar{k}_*, \quad \text{где } w_x, w_y, \\ w_z &\text{— проекции квазивектора } W_* \text{ на оси координат; } I_{xy*}, I_{xz*}, \\ I_{yz*} &\text{— } \omega\text{-образы соответствующих двойных интегралов } I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}: \end{aligned}$$

$$I_{xy} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_{xy*} = \exp \left( \int_{a_1}^{b_1} \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\log_k T_z}{y} \cdot dy \right) \right) \frac{dx}{x} \right)^{36},$$

$$I_{xz} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_{xz*} = \exp \left( \int_{a_2}^{b_2} \log_k \left( \exp \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\log_k T_y}{z} \cdot dz \right) \right) \frac{dx}{x} \right);$$

$$I_{yz} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_{yz*} = \exp \left( \int_{a_3}^{b_3} \log_k \left( \exp \left( \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \frac{\log_k T_x}{z} \cdot dz \right) \right) \frac{dy}{y} \right);$$

$$w_x = I_{yz*}, w_y = I_{xz*}, w_z = I_{xy*}. \quad (4.19)$$

Заметим, что (4.19) нетрудно доказать, если учесть, что

$$\log_k (T_z \odot \bar{k}) = (\log_k T_z) \cdot \bar{k}_*,^{37} \quad \log_k (T_y \odot \bar{j}) = (\log_k T_y) \cdot \bar{j}_*,$$

$$\log_k (T_x \odot \bar{i}) = (\log_k T_x) \cdot \bar{i}_*.$$

Тогда, например,

$$I_{xy} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \overline{I_{xy*}} = \exp \left( \int_{a_1}^{b_1} \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\log_k (T_z \odot \bar{k})}{y} \cdot dy \right) \right) \frac{dx}{x} \right) =$$

<sup>36</sup> Пределы интегрирования записываются в соответствии с исходной областью интегрирования, т.е. сохраняются те же, что и в двукратном интеграле до  $\omega$ -отображения.

<sup>37</sup> Заметим, что в данном случае основание и единичный вектор обозначены одной буквой  $k$ .

$$\begin{aligned}
&= \exp \left( \int_{a_1}^{b_1} \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{(\log_k T_z) \cdot \overline{k_*}}{y} \cdot dy \right) \right) \frac{dx}{x} \right) \Rightarrow \log_k \overline{I_{xy_*}} = \\
&= \frac{1}{\ln k} \left( \int_{a_1}^{b_1} \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\log_k I_z}{y} \cdot dy \right) \right) \frac{dx}{x} \right) \cdot \overline{k_*} \Rightarrow \overline{I_{xy_*}} = \\
&= I_{xy_*} \cdot \overline{k_*} \text{ и т.д.}
\end{aligned}$$

$$\overline{W} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_{yz_*} \cdot \overline{i_*} + I_{xz_*} \cdot \overline{j_*} + I_{xy_*} \cdot \overline{k_*}$$

По формуле Остроградского-Гаусса  $\omega$ -образ поверхностного интеграла можно заменить  $\omega$ -образом тройного интеграла, т.е.

$$W_{**} = \exp \left( \int_a^b \log_k \left( \exp \left( \int_{p_1(x)}^{p_2(x)} \log_k \left( \exp \left( \int_{m_1(x,y)}^{m_2(x,y)} \frac{\log_k f_x}{z} \cdot dz \right) \right) \cdot \frac{dy}{y} \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right)^{38},$$

где  $W_{**}, f_x$  — скалярные проекции на ось  $OX$  квазивектора  $W_*$  и

$$f = f(x, y, z) \equiv \overline{\mathbf{div} T(x, y, z)} = \nabla \cdot T(x, y, z).$$

Отобразим  $\overline{\mathbf{div} T}, \frac{dT}{ds}$ :

$$\overline{\mathbf{div} T} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \overline{D_*} = k^{\sum_{i=1}^n (T_{x_i})_{x_i} \cdot \overline{e_{i*}}} ; \log_k \overline{D_*} = \sum_{i=1}^n (\log_k \overline{D_{*x_i}}) \cdot \overline{e_{i*}},$$

$$\frac{dT}{ds} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \overline{P_*} = S_* \odot \overline{\nabla_0 T} = k^{\sum_{i=1}^n (\log_k s_{x_i}) \cdot \overline{e_{i*}}} \odot k^{\sum_{i=1}^n (T_{x_i}) \cdot \overline{e_{i*}}},$$

---

<sup>38</sup> Пределы интегрирования записываются в соответствии с областью интегрирования в исходном тройном интеграле.



$$\log_k \overline{P_*} = \left( \sum_{i=1}^n (\log_k s_{xi}) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n {}'T_{xi} \cdot \overline{e_{i*}} \right) = \sum_{i=1}^n {}'T_{xi} \cdot \log_k s_{xi} \Rightarrow$$

$$\overline{P_*} = k^{\sum_{i=1}^n {}'T_{xi} \cdot \log_k s_{xi}}$$

$$\frac{dT_{ik}}{ds} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus P_{*i} = S_{*m} \odot \left( k^{x_m \cdot \frac{\partial \ln T_{ik}}{\partial x_m} \cdot \overline{e_{i*}}} \right) =$$

$$= k^{\sum_{i=1}^n (\log_k s_{mx_i}) \cdot \overline{e_{i*}}} \odot k^{\sum_{i=1}^n ({}'T_{ik})_{x_m} \cdot \overline{e_{i*}}};$$

$$\log_k P_{*i} = \left( \sum_{i=1}^n (\log_k s_{mx_i}) \cdot \overline{e_{i*}} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n ({}'T_{ik})_{x_m} \cdot \overline{e_{i*}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n ({}'T_{ik})_{x_m} \cdot \log_k s_{mx_i} \Rightarrow P_{*i} = k^{\sum_{i=1}^n ({}'T_{ik})_{x_m} \cdot (\log_k s_{mx_i})},$$

где  $P_{*i}$  – компоненты квазивектора  $\overline{P_*}$ .

$\overline{W_*}$ ,  $\overline{D_*}$ ,  $\overline{P_*}$  – квазивекторы, характеризующие *квазитензорное* поле.  $\log_k \overline{W_*}$ ,  $\log_k \overline{D_*}$ ,  $\log_k \overline{P_*}$  – векторные функции.

При отображении  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  тензорного поля получим *квазитензорное* поле. Тензорное (и, частный случай его, векторное) описание физических величин – это способ представления определённой объективной реальности. Аналогично, квазитензорное (квазивекторное) описание этих величин – это математическое моделирование *возможной* объективной реальности, которая не обязательно существует в настоящий момент времени и не обязательно может быть обнаружена имеющимися средствами опознания и исследования.

#### 4.4.2. Квазилапласово поле

Как известно, векторное поле  $\bar{a}(r)$  называется *лапласовым*, если в любой его точке выполняется равенства  $\mathbf{rot} \bar{a} = 0$  и  $\mathbf{div} \bar{a} = 0$ , т.е. лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным, а в односвязной области полностью определяется скалярным потенциалом  $\varphi$ . Причём,  $\Delta\varphi = 0$  (так как, если  $\mathbf{rot} \bar{a} = 0$  и  $\bar{a} = \nabla\varphi$  для односвязной области, то  $\mathbf{div} \bar{a} = \mathbf{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$ ). Исследование потенциала  $\varphi$  основано на следующих свойствах *гармонических* функций:

– если в области  $G$ , ограниченной  $\sigma$ , функция всюду гармоническая, то  $\iint_{\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot d\sigma = 0$ ;

– если  $\varphi$  и  $\psi$  – гармонические функции всюду в области  $v$  ограниченной поверхностью  $\sigma$ , то  $\iint_{\sigma} \varphi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial n} \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} \psi \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot d\sigma$ ;

– функция  $\varphi$ , гармоническая внутри  $G$ , может быть найдена в любой точке  $G$  (по значениям  $\varphi$  и  $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$  на границе  $\sigma$  области  $G$ ) по формуле

$$4\pi\rho(M_0) = \iint_{\sigma} \left( \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) d\sigma;$$

– уравнение  $\Delta\varphi = 0$  имеет единственное значение в области  $G$ , если на границе ( $\sigma$ )  $\varphi$  принимает заданные значения.

Пусть  $\varphi$  – потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$ , т.е.

$$\bar{V} = \nabla\varphi, \mathbf{div} \bar{V} = 0, \Delta\varphi = 0, \mathbf{rot} \bar{V} = 0,$$

где  $\bar{V}$  – скорость.

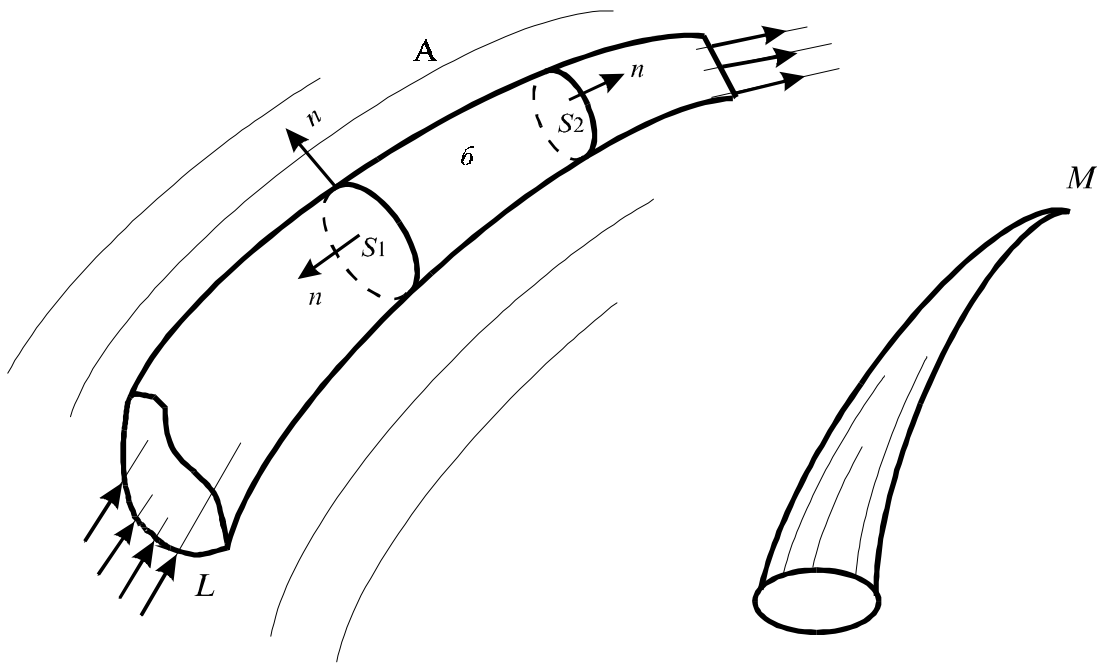


Рис. 5. Интенсивность векторной трубки соленоидального поля постоянна вдоль всей трубки. Векторная трубка соленоидального поля не может оканчиваться или начинаться в поле.

Тогда из свойства гармонических функций следует, что *интенсивность* трубок тока или векторных трубок (Рис. 5), т.е. образованных векторными линиями поля  $\bar{V}$ , *постоянна* по длине трубок; в односвязной области, ограниченной твердыми стенками, на которых  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ , не может

возникнуть непрерывное безвихревое течение; кинетическая энергия некоторого объема жидкости  $G$ , ограниченного поверхностью  $\sigma$ , может быть вычислена по формуле

$$W_k = \frac{\rho}{2} \iint_{\sigma} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma,$$

что следует из определения

$$W_k = \frac{\rho}{2} \iiint_{\sigma} V^2 dG$$

и равенства  $\bar{V} = \nabla \phi \left( W_k = \frac{\rho}{2} \iiint_{\sigma} (\nabla \phi)^2 dG \right).$

Отобразим  $\bar{V}$ ,  $\mathbf{div} \bar{V}$ ,  $\Delta \varphi$ ,  $\mathbf{rot} \bar{V}$ ,  $W_k$  из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned}\bar{V} = \nabla \varphi = \mathbf{grad} \varphi \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus V_* = k \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} \cdot \overline{e_{i*}}; \\ \mathbf{div} \bar{V} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus D_* = k \sum_{i=1}^n (V_{x_i})_{x_i}; \Delta \varphi \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \Delta_0 \varphi, \\ \text{т.е. } \ln \Delta_0 \varphi = \ln k \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \left( \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x_i} + x_i \cdot \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial x_i^2} \right); \quad (4.20)\end{aligned}$$

$$\mathbf{rot} \bar{V} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus R_* = k (\mathbf{rot} \bar{V})_0, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned}\log_k R_* = & \left( (V_z)_y - (V_y)_z \right) \cdot \overline{i_*} + \left( (V_x)_z - (V_z)_x \right) \cdot \overline{j_*} + \\ & + \left( (V_y)_x - (V_x)_y \right) \cdot \overline{k_*};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_k \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus W_{k*} = \\ = \exp \left( \int_a^b \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \log_k \left( \exp \left( \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\rho \cdot V \cdot V}{z} \cdot dz \right) \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \frac{dy}{y} \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right), \quad (4.21)\end{aligned}$$

где  $V = V(x, y, z)$ ,  $a, b, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  — пределы интегрирования, которые находятся при рассмотрении области  $G$  интегрирования в первообразе, т.е. в выражении  $W_k = \iiint_G \frac{\rho V^2}{2} dx dy dz$ .

Квазивекторные  $(V_*, R_*)$  и квазискалярные  $(D_*, \Delta_0 \varphi, W_{k*})$  величины являются характеристиками *квазиполя* скорости безвихревого течения несжимаемой жидкости.

Математическая модель квазиполя (4.20) имеет идентифицированный физический смысл, заключающийся в *возможности* наличия у любой физической характеристики поля аналоговых величин (инфинитного спектра идентификаторов) *новой* природы с модифицированными размерностями.

Альтернативное классическому *монообразному* суждению о физических субстанциях инфинитно-спектральное описание последних способствует более глобальному пониманию объективной реальности.

Проблема *полиобразного* физического мышления связано как с трудностью преодоления барьера между привычным и качественно новым представлением об объектах, так и отсутствием *уникального* экспериментального материала по данному вопросу. И, тем не менее, именно эта проблема создаёт фундаментальные предпосылки для существования концепции множества идентичных объектов.

#### 4.4.3. Основная теорема квазивекторного анализа

Любое непрерывное квазивекторное поле  $A_*(r)$ , заданное во всём пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими квазидивергенцией и квазиротором может быть представлено единственным образом в виде произведения квазипотенциального  $A_{1*}(r)$ , и квазисolenoidalного  $A_{2*}(r)$  полей  $(A_*(r) = A_{1*}(r) \cdot A_{2*}(r))$ .<sup>39</sup>

При этом основным условием первообраза потенциального поля является равенство  $\mathbf{rot} \overline{a_1}(r) = 0$ , а квазипотенциальность выражается так:

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \overline{a_1}(r))_0 = 0, \text{ т.е. } & \left( (a_{1z})_y - (a_{1y})_z \right) \cdot \overline{i_*} + \\ & + \left( (a_{1x})_z - (a_{1z})_x \right) \cdot \overline{j_*} + \left( (a_{1y})_x - (a_{1x})_y \right) \cdot \overline{k_*} = 0. \end{aligned}$$

<sup>39</sup> В данном случае реализуется суперпозиция логарифмов полей, т.е.

$$\log_k A_*(r) = \log_k A_1(r) \cdot \log_k A_2(r).$$

Условие квазисолеоидальности следующее:

$$\sum_{i=1}^n \left( a_{2x_i} \right)_{x_i} = 0.$$

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, заметим, что результат можно получить путем  $\omega$ -отображения  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  основной теоремы векторного анализа.

#### 4.4.4. $\omega$ -образ электромагнитного поля

Пусть  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей, являющиеся функциями точки и времени;  $\rho = \rho(r, t)$  – плотность распределения зарядов;  $\vec{j} = \vec{j}(r, t)$  – векторная функция плотности тока  $\vec{j} = \vec{j}(r, t)$ . Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме.

Известна связь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma_L} \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = - \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (4.22)$$

$$\iint_{\sigma_L} \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = 0, \quad (4.23)$$

где  $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Уравнение (4.22) утверждает, что изменение во времени потока магнитного поля  $\iint_{\sigma_L} \vec{H} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$  через поверхность  $\sigma$ , опирающуюся

на контур  $L$ , равно циркуляции электрического поля  $\mathcal{E} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$  вдоль

контра  $L$  ( $\mathcal{E}$  – электродвижущая сила и первое уравнение – это закон электромагнитной индукции Фарадея). Уравнение (4.23) показывает, что поток магнитного поля через замкнутую поверхность  $\sigma_c$  произвольной формы всегда равен нулю. Применяя формулу Стокса, получим

$$\iint_{\sigma_L} \left( \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} \right) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = 0 \text{ и в силу произвольности } \sigma_L,$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -c \cdot \text{rot } \bar{E}. \quad (4.24)$$

По формуле Остроградского  $\iint_{\sigma_V} \bar{H} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = \iiint_V \text{div } \bar{H} \cdot dV = 0$ , откуда, в

$$\text{силу произвольности объема } V, \text{div } \bar{H} = 0. \quad (4.25)$$

Уравнения (4.22, 4.23) и (4.24, 4.25) называются *однородной* парой уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Связь векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  с плотностью распределения зарядов  $\rho$  и тока  $\bar{j}$  определяется *неоднородной* парой уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma_L} \bar{E} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = c \cdot \int_L \bar{H} \cdot dl - 4\pi \iint_{\sigma_L} \bar{j} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma \quad (4.26)$$

$$\iint_{\sigma_L} \bar{E} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = 4\pi \iiint_V \rho \cdot dV \quad (4.27)$$

Применяя к (4.26) формулу Стокса, можно написать

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = c \cdot \text{rot } \bar{H} - 4\pi \bar{j} \quad (4.28)$$

К (4.27) применяя формулу Остроградского, получим (в силу произвольности объема  $V$ ):

$$\text{div } \bar{E} = 4\pi\rho \quad (4.29)$$

Уравнения (4.28) и (4.29) называются *неоднородной парой* уравнения Максвелла в дифференциальной форме, а системы (4.22, 4.23, 4.26, 4.27) и (4.24, 4.25, 4.28, 4.29) представляют собой систему уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах. Эта система описывает электромагнитное поле в вакууме.

Отображение системы из  $\omega_1$  в  $\omega_0$  осуществляется по аналогии с вышеизложенным: а) все векторные характеристики (*grad*, *div*, *rot* и др.) отображаются по известным уже формулам; б)  $\omega$ -образы интегралов (кратных, поверхностных и т.д.) лучше всего записывать в виде  $\omega$ -образов повторных интегралов, иногда используя при этом  $\omega$ -образы формул Остроградского-Гаусса, Стокса и Грина; в) дифференциальные объекты отображаются в виде трансформированных  $\omega$ -образов производной; г) константы проще вводить под знак интегро-дифференциальных объектов –

первоосновы, чтобы не сделать ошибки при оперировании в терминах  $\omega$ -преобразований и т.д.

В качестве примера приведем несколько  $\omega$ -образов уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \tau} + c \cdot \mathbf{rot} \bar{E} = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{'(\bar{H})}_{\tau} \cdot \left( c \odot k^{(\mathbf{rot} \bar{E})}_0 \right) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \bar{H} \right)_{\tau} + \log_k c \left( \left( \left( E_z \right)_y - \left( E_y \right)_z \right) \cdot \bar{i}_* + \left( \left( E_x \right)_z - \left( E_z \right)_x \right) \cdot \bar{j}_* + \right. \\ \left. + \left( \left( E_y \right)_x - \left( E_x \right)_y \right) \cdot \bar{k}_* \right) = 0; \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{div} \bar{H} = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sum_{i=1}^n \left( H_{x_i} \right)_{x_i}} = 1 \quad (4.31)$$

$$\left( \bar{H} = \sum_{i=1}^n H_{x_i} \cdot \bar{e}_i \right);$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_V} \bar{H} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \\ \rightarrow \omega_0 \setminus \exp \left( \int_a^b \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \log_k \left( \exp \left( \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \frac{\log_k f(x,y,z)}{z} \cdot dz \right) \right) \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \frac{dy}{y} \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где  $f(x, y, z) = \mathbf{div} \bar{H}$ , а пределы интегрирования  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  получаются при рассмотрении области интегрирования  $V$ , ограниченной поверхностью  $\sigma_V$ .

Аналогично отображаются и другие уравнения исходной системы. Например,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_V} \bar{E} \cdot \bar{n} \cdot d\sigma = 4\pi \iiint_V \rho \cdot dV \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus I_{xy*} \cdot I_{xz*} \cdot I_{yz*} = \\ = \exp \left( \int_a^b \log_k \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \log_k \left( \exp \left( \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \frac{\log_k (4\pi \cdot \rho(x,y,z))}{z} \cdot dz \right) \right) \right) \times \right. \end{aligned}$$



$$\times \frac{dy}{y} \Big) \cdot \frac{dx}{x} \Big), \quad (4.33)$$

где

$$I_{xy*} = \exp \left( \int_{a1}^{b1} \log_k \left( \exp \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\log_k E_z}{y} dy \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right),$$

$$I_{xz*} = \exp \left( \int_{a2}^{b2} \log_k \left( \exp \left( \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\log_k E_y}{z} dz \right) \right) \cdot \frac{dx}{x} \right),$$

$$I_{yz*} = \exp \left( \int_{a3}^{b3} \log_k \left( \exp \left( \int_{\chi_1(y)}^{\chi_2(y)} \frac{\log_k E_x}{z} dz \right) \right) \cdot \frac{dy}{y} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= c \cdot \text{rot } \bar{H} - 4\pi \bar{j} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k \overset{'}{E} t = \frac{c \odot k^{(\text{rot } \bar{H})_0}}{k^{4\pi \odot \bar{\delta}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow t \frac{\partial E}{\partial t} &= \log_k c \cdot \left( \left( \overset{'}{(H_z)_y} - \overset{'}{(H_y)_z} \right) \cdot \bar{i}_* + \left( \overset{'}{(H_x)_z} - \overset{'}{(H_z)_x} \right) \times \right. \\ &\times \bar{j}_* + \left. \left( \overset{'}{(H_y)_x} - \overset{'}{(H_x)_y} \right) \cdot \bar{k}_* \right) - 4\pi \bar{\delta}_*, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\bar{\delta}_* = \log_k \bar{\delta}$ , а  $\bar{\delta} \equiv \bar{j}$  – плотность тока (новое обозначение  $\bar{\delta}$  введено, чтобы не перепутать плотность тока с единичным вектором  $\bar{j}$ ).

$$\begin{aligned} \text{div } \bar{E} &= 4\pi \cdot \rho \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\sum_{i=1}^n \overset{'}{(E_{x_i})_{x_i}}} = k^{4\pi \rho_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \overset{'}{(E_{x_i})_{x_i}} &= 4\pi \rho_0, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где  $\rho_0$  –  $\omega$ -образ  $\rho$ .

Уравнения (4.30...4.35) описывают электромагнитное квазиполе в вакууме и являются  $\omega$ -образом этого электромагнитного поля.

#### 4.4.5. $\omega$ -образы скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля.

Как известно ([35], стр. 236-237) в электродинамике важную роль играют вспомогательные функции: скалярный  $\varphi = \varphi(r, t)$  и векторный  $\bar{a} = \bar{a}(r, t)$  потенциалы. Введем их так, чтобы они удовлетворяли однородной паре уравнений Максвелла.

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + c \cdot \text{rot } \bar{E} = 0 \quad (4.24)$$

$$\text{div } \bar{H} = 0 \quad (4.25)$$

Так как  $\text{div rot } \bar{H} = 0$ , то  $\bar{H}(r, t) = \text{rot } \bar{a}(r, t)$  и после подстановки в (4.24) получим  $\text{rot} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{E} \right) = 0$  (4.36), откуда  $\bar{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = -\nabla \varphi$  (4.37), где  $\varphi$  — произвольная функция от  $r$  и  $t$  (в данном случае использовали равенство  $\text{rot grad } \varphi = 0$ ).

Замена  $\bar{a}$  на  $a + \nabla f$  и одновременно замена  $\varphi$  на  $\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$  не изменяют векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  ( $\bar{H} = \text{rot } \bar{a} = \text{rot}(a + \nabla f) = \text{rot } a + \text{rot grad } \varphi$  и

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial (a + \nabla f)}{\partial t} - \nabla \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Подставляя (4.36) и (4.37) в неоднородную пару уравнений Максвелла (4.28), (4.29), получим уравнения, которым должны удовлетворять скалярный  $\varphi$  и векторный  $\bar{a}$  потенциалы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = c \cdot \text{rot rot } \bar{a} - 4\pi \cdot \bar{j}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{div} \left( -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = -4\pi \cdot \rho. \quad (4.39)$$

Можно, очевидно, не ограничивая общности, ввести произвольную функцию  $f$  и наложить на  $\varphi$  и  $\bar{a}$  дополнительное условие (Лоренца):

$$\mathbf{div} \bar{a} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.40)$$

Откуда  $\mathbf{div} (a + \nabla f) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  (4.41), а произвольная функция

$\nabla f$  конкретизируется и определяется из этого уравнения:

$$\Delta f = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathbf{div} \bar{a}. \quad (4.42)$$

Используя известное равенство  $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{a} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \bar{a} - \Delta \bar{a}$  и соотношения (4.40) и (4.42), получим из (4.38) и (4.39) уравнения для определения  $\bar{a}$  и  $\varphi$ , а следовательно  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ :

$$\Delta \bar{a} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \bar{j} \quad (4.43)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \cdot \rho. \quad (4.44)$$

В этом случае вводят оператор (деламбертиан):

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4.45)$$

Тогда (4.43) и (4.44) примут вид:

$$\square \bar{a} = -\frac{4\pi}{c} \cdot \bar{j} \quad (4.46)$$

$$\square \varphi = -4\pi \cdot \rho \quad (4.47)$$

Это волновые уравнения для потенциалов.

Найдем  $\omega$ -образы  $\square$ ,  $\square \bar{a}$ ,  $\square \varphi$ .

$$\ln \square_* = \ln^2 k \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln}{\partial x_i^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} t \left( \frac{\partial \ln}{\partial t} + t \frac{\partial^2 \ln}{\partial t^2} \right) \right).$$

Поясним это выражение.

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \square_* = \frac{\Delta_0}{\left( k^\Delta k^{c^2} \right) \odot \left( \partial^2 \right)_2} =$$

$$= \frac{\Delta_0}{c^2 \sqrt{k} \odot k^{\ln k \cdot t \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial t} + t \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial t^2} \right)}},$$

где  $\square_*$  – квазидеаламбертиан,  $\Delta_0$  – квазилапласиан,  $\left( \partial^2 \right)_2 =$

$$= k^{\ln k \cdot t \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial t} + t \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial t^2} \right)} - \omega\text{-образ производной } \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Откуда

$$\square_* = k^{\ln k \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln}{\partial x_i^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} t \left( \frac{\partial \ln}{\partial t} + t \frac{\partial^2 \ln}{\partial t^2} \right) \right)}. \quad (4.48)$$

Отообразим  $\square \bar{a}$  и  $\square \varphi$

$$\square \bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \square_* A_*,$$

$$\square \bar{a} + \frac{4\pi}{c} \bar{j} = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus B_* = (\square_* A_*) \cdot \left( k^{\frac{4\pi}{c}} \odot \bar{\delta} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln B_* = 0, \text{ т.е.}$$

$$\ln k \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln a_{x_i}}{\partial x_i^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} t \left( \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial t} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + t \frac{\partial \ln a_{x_i}}{\partial t} \right) \right) + \frac{4\pi}{c} \cdot \bar{\delta}_* = 0, \quad (4.49)$$

где  $\bar{\delta} \equiv \bar{j}$  – плотность тока;

$A_* = k^{\sum_{i=1}^n (\log_k a_{x_i}) \overline{e_i}}$ , а  $\square_* A_*$  формируется из первообраза  $\overline{a}$  квазивектора  $A_*$  путем вписывания в  $\omega$ -образы частных производных по переменной  $x_i$  соответствующих проекций вектора  $\overline{a}$ .

Наконец,

$$\ln C_* = \ln((\square_* \Phi_*) \cdot k^{4\pi \cdot \rho}) = 0 \Rightarrow \ln C_* =$$

$$= \ln k \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial x_i^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} t \left( \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t} + t \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial t^2} \right) \right) +$$

$$+ 4\pi \cdot \rho = 0, \quad (4.50)$$

т.е.

$$\left( \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x_i} + x_i^2 \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial x_i^2} \right) \right) - \frac{1}{c^2} t \left( \frac{\partial \ln \varphi}{\partial t} + t \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial t^2} \right) +$$

$$+ \frac{4\pi \rho}{\ln k} = 0, \quad (4.51)$$

где  $\Phi_*$  – квазипотенциал ( $\omega$ -образ потенциала  $\varphi$  ( $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$ )),  $C_*$  –  $\omega$ -образ ( $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$ ) выражения  $\square \varphi + 4\pi \rho = 0$ , т.е.  $C_* = 1$ .

(4.49) и (4.50) – волновые уравнения для квазипотенциалов электромагнитного квазиполя. Уравнения (4.30...4.35) и (4.49, 4.51), практически, полностью характеризуют электромагнитное квазиполе в вакууме. Аналогично, можно было бы найти и дополнительные характеристики – *квази-энергию* и *квазивектор* электромагнитного квазиполя.

Поясним различие электромагнитного поля (э.п.) и электромагнитных квазиполей (э.к.). Если э.п. – это *особая* форма материи, посредством которой осуществляется взаимосвязь между электрическими заряженными частицами, характеризующаяся *силовыми* ( $\overline{E}$  – напряженность и  $\overline{B}$  – магнитная индукция) и *энергетическими* ( $\varphi, \overline{a}$  – соответственно скалярный и векторный потенциалы, определённые с точностью до калибровочного преобразования), то э.к. – это *возможные* физические субстанции совершенно *новой* природы. Корпускулярно-волновой дуализм материи трансформируется при  $\omega$ -отображении в инфинитно-спектральную струк-

туру *квазиматерии*<sup>40</sup>, которая характеризуется такими категориями, как *возможность* существования (т.е. необязательность её реального ощущения), *новизна* и *неизвестность* этой реальности, *особенность формы и содержания* её и т.д.. Более того, она может обладать качеством *необнаружения* (по крайней мере, имеющимися и перспективными средствами). Однако, возможность теоретического исследования – это путь к её познанию и изучению.

#### 4.4.6. $\omega$ -отображения термодинамических величин

В термодинамике известны ([45], стр. 376-379) десять основных величин: *давление* ( $p$ ), *объём* ( $v$ ), *температура* ( $T$ ), *энтропия* ( $S$ ), *внутренняя энергия* ( $U$ ), *энтальпия* ( $H$ ), *свободная энергия* ( $F$ ), *термодинамический потенциал* ( $Z$ ), *количество тепла* ( $Q$ ) и совершаемая термодинамической системой *работа* ( $A$ ). Каждая из этих величин может быть выведена как функция двух других. Для записи этих соотношений вводится понятие *якобиана*.

Если заданы две функции  $u = u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , то якобиан ( $J(u, v)$ ) равен:

$$J(u, v) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

Индекс внизу означает, что частная производная берётся, когда эта величина постоянная, т.е.  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_y$  – означает, что  $y = const$ ).

Известна формула

$$J(x, y) \cdot J(z, w) + J(y, z) \cdot J(x, w) + J(z, x) \cdot J(y, w) = 0, \quad (4.53)$$

связывающая любые термодинамические переменные  $x, y, z, w$ .

<sup>40</sup> Квазиматерия – это специфичная материя или возможная объективная реальность, не обязательно данная нам в ощущениях.

Найдем  $\omega$ -образ формулы (4.52):

$$\begin{aligned}
 J(u, v) &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \mathbf{J}_* = \\
 &= \frac{K^{('u_x)} \odot K^{('v_y)}}{K^{('u_y)} \odot K^{('v_x)}} = K^{('u_x) \cdot ('v_y) - ('u_y) \cdot ('v_x)} \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

Тогда  $\log_k \mathbf{J}_* = ('u_x) \cdot ('v_y) - ('u_y) \cdot ('v_x)$ , где  $\mathbf{J}_*$  – квазиякобиан.

Найдём  $\omega$ -образ формулы (4.53):

$$\begin{aligned}
 J(x, y) \cdot J(z, w) + J(y, z) \cdot J(x, w) + J(z, x) \cdot J(y, w) &= 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \\
 \rightarrow \omega_0 \setminus \left( K^{J(\log_k x, \log_k y)} \odot K^{J(\log_k z, \log_k w)} \right) \times \\
 \times \left( K^{J(\log_k y, \log_k z)} \odot K^{J(\log_k x, \log_k w)} \right) \times \\
 \times \left( K^{J(\log_k z, \log_k x)} \odot K^{J(\log_k y, \log_k w)} \right) = \\
 = K^{J(x_*, y_*) \cdot J(z_*, w_*) + J(y_*, z_*) \cdot J(x_*, w_*) + J(z_*, x_*) \cdot J(y_*, w_*)},
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}_* = \log_k x$ ,  $\mathbf{y}_* = \log_k y$  и т.д.

Откуда

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) \cdot J(\mathbf{z}_*, \mathbf{w}_*) + J(\mathbf{y}_*, \mathbf{z}_*) \cdot J(\mathbf{x}_*, \mathbf{w}_*) + \\
 + J(\mathbf{z}_*, \mathbf{x}_*) \cdot J(\mathbf{y}_*, \mathbf{w}_*) = 0. \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Формулы (4.54) и (4.55) позволяют полностью описать инфинитный спектр термодинамических квазиполей.

#### §4.5. Концепция реальности квазиполя.

Изучение смысла и содержания  $\omega$ -образов физических объектов проводится параллельно в двух направлениях: методами *общей теории объектов* и классическими общеизвестными средствами, т.е. методами математики, физики и философии. Необходимо признать, что второе направление пока находится в эмбриональной, причём, весьма проблематической (даже парадоксальной) стадии. Тем не менее, ниже излагается концепция реальности квазиполя, связанная именно с этим направлением, так как настоящая книга написана в плоскости доступных методов и является переходным звеном от общеизвестного к теории объектов.

Поэтому материал данного параграфа следует воспринимать как один из возможных *гипотетических* взглядов на реальность квазиполя. Автор располагает, разумеется, и альтернативными мнениями о физической интерпретации квазиобъективности.

Сложность вопроса связана как с непривычной, экзотической “суперфрактальной” размерностью любой квазисубстанции (или квазиобъекта), так и с противоречивостью понимания новой *физической реальности* при обычном способе её рассмотрения или исследования. Последняя принимается за достоверную только при следующих условиях:

а) она вписывается в пространство нашего мироощущения и миропонимания;

б) если имеется убедительный экспериментальный факт, подтверждающий её существование. К сожалению, ни одно из этих условий в данном случае пока не выполнено. Однако, вопреки этому попытаемся высказать *некоторые* самые общие соображения о реальности квазиполя...

...Кажущаяся простота связей между однородными квазиполями, возможность любой трансформации математической модели квазиполя путём подстановки наводит на мысль, что предлагаемый читателю материал о квазивекторном анализе – это лишь способ описания одной и той же монообразной *объективной реальности*, которая моделируется аппаратом векторного анализа. Утверждение об инфинитном спектре только математических описаний одной и той же объективной реальности и отсутствии инфинитности её физических образов, в какой-то степени опровергается рядом фактов.

1. В *главе 2* настоящей монографии была показана возможность расширения поля действительных чисел путём  $\omega$ -отображений. Например, из *дробных чисел*  $R_f$  нетрудно получить *отрицательные*  $R_-$   
 $(a_1 = (:a) \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_k (:a) = a_2 \in R_-, \text{ где } (a, k) \in R_+, (k, a) > 1,$



$$\begin{aligned}
R_f &= \{ :a \} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus R_- = \{ \log_k (:a) \} \}; \text{ из отрицательных } - \Delta\text{-числа} \\
R_\Delta & \left( a_2 \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_k a_2 = a_3 \in R_\Delta, \quad k \neq 1, \quad k \in R, \quad a_2 \in R_-; \right. \\
R_- &= \{ a_2 \} = \{ \log_k (:a) \} \setminus \omega_0 \rightarrow \\
&\rightarrow \omega_1 \setminus R_\Delta = \{ \log_k a_2 \} = \{ \log_k \log_k (:a) \} \}; \text{ из } \Delta\text{-чисел } - \Delta\text{-числа} \\
R_\Delta & \left( a_3 \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_k a_3 = a_4 \in R_\Delta, \quad k \neq 1, \quad k \in R, \quad a_3 \in R_\Delta; \right. \\
&\quad \left. R_\Delta \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus R_\Delta = \{ \log_k a_2 \} = \{ \log_k \log_k \log_k (:a) \} \}, \right.
\end{aligned}$$

и т.д. Очевидно, что числа  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и т.д. – *отличается* по величине (*форме*) и по принадлежности тому или иному множеству (*содержанию*), но *связаны* как одним способом отображения ( $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$ ), так и основой (ядром), под которым будем понимать число  $a$  ( $a \in R_+, a > 1$ ). Утверждение, что отрицательные числа – это те же дробные, но иначе записанные – *абсурдно и несостоятельно* (общеизвестно, что в решениях уравнений, описывающих реальные процессы, встречаются одновременно отрицательные и дробные числа и они отражают различные значения физической величины (или процесса)).

Попутно заметим, что инфинитный спектр полей различных  $\Delta$ -чисел ( $R_\Delta, R_\Delta, R_{\Delta i}, \dots$ ), первоначально сконструированный путём рефлексивного отображения *поля* действительных числе  $\mathbf{R}$  относительно  $(-\infty)$ , *надполей* (например, надполя  $\mathbf{R}_0 = \Delta_0 \cup \mathbf{R}$  относительно  $(\Delta^\infty)$ ); *образов функций*, сформированных на множествах  $\Delta$ -аргументов) и т.д. означает, что некий объект аналогичный этой цепочке объектов. Например, *квазиполе* целесообразно воспринимать не только как абстрактную способность физического объекта к инфинитности (в пространстве квазифизичности !), но и как *возможность* существования инфинитности (в связи с инфинитным расширением полей неизбежна инфинитность образов любой функциональной или корреляционной зависимости, т.е. физический объект, заключённый в математическую форму, имеет инфинитный спектр квазифизических  $\omega$ -образов).

Итак, экстраполируя  $\omega$ -расширения числовых полей на физические объекты, констатируем факт, что инфинитные спектры квазиполей, содержащие в качестве ядер общеизвестные компоненты, обобщены в единый конгломерат – представляющий полимерный комплекс инфинитных спектров квазиполей. С точки зрения математического моделирования, гипер-

поле возникает в результате  $\omega$ -отображений на базе различных функций связи. При этом соблюдаются все свойства, присущие  $\omega$ -пространствам, как-то: *инфинитность* вложений суперспектров в глобальные суперспектры; *иерархия* структур суперспектров; *идентичность* их строения и т.д. Как и в числовых полях, где за начало отсчёта может быть выбран любой элемент, так и в квазиполях, соблюдается равнозначность выбора главного компонента (ядра) и равноправность способа их представления. Это позволяет устанавливать некоторую адекватность структуры числовых полей и квазиполей. Изучая свойства числовых полей, мы опосредственно исследуем строение спектров квазиполей. Многообразие форм числовых полей и квазиполей как *результат* многообразия  $\omega$ -отображений, *проявляющихся*, в основном, при *выборе различных функций связи* между  $\omega$ -пространствами подчёркивает *родственность* тех и других полей с *объективной реальностью*.

2. В главе 3 такая же ситуация была проиллюстрирована с интегродифференциальными объектами. Производная имеет бесчисленное множество  $\omega$ -образов в пространстве  $\omega_0$ , т.е. существует инфинитный спектр  $\omega$ -образов любого дифференциального уравнения, а следовательно, и инфинитный спектр его решений, каждое из которых моделирует некоторую объективную реальность. Последняя, очевидно, не существует в виде форм материи, укладываемых в наше представление о ней. Признавая, что в окружающем нас мире может находиться объективная реальность, которую мы не воспринимаем и даже не сможем никогда воспринять, мы расширяем представление о действительности. Субстанциональным моментом в понимании полиметрии материи в случае превращения её в квазиматерию<sup>41</sup> при  $\omega$ -отображениях является утверждение, что *всякое логически верное математическое выражение, включающее физические величины, идентифицирует некоторую физическую (или квазифизическую) реальность*.

Однако, полиметрия физических (с квазифизическим расширением) объектов имеет гораздо более сложную природу.

Рассмотрим самый *простейший* пример. Пусть в пространстве  $\omega_1$  дан отрезок  $AB$ , разделённый точкой  $C$  на две части. Отобразим его в пространство  $\omega_0$ , если  $|AC| = a_1$ ,  $|CB| = a_2$ ,  $|AB| = a$  ( $a = a_1 + a_2$ ), а результат отображения  $\omega_1$  в  $\omega_0$  длины отрезка  $|AB|$  будет площадь прямоугольника  $CAA_1B$  (рис. 6):

<sup>41</sup> Под *квазиматериальностью* здесь понимается результат  $\omega$ -отображений материального. В расширенном представлении в квазиматериальность включаются все абстрактные объекты.

$$a_1 + a_2 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{a_1+a_2} = k^{a_1} \cdot k^{a_2} = a_1' \cdot a_2', \quad \text{где} \quad a_1' = k^{a_1}, \quad \text{а} \quad a_2' = k^{a_2}.$$

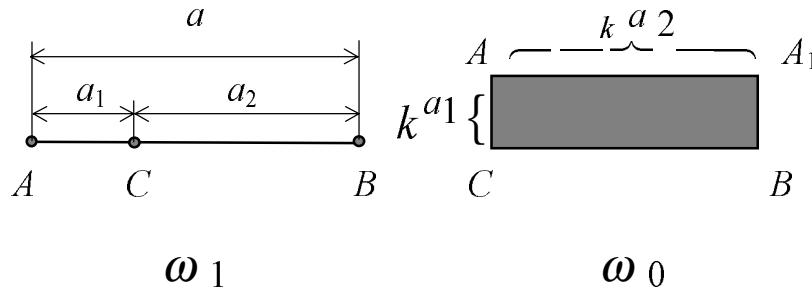


Рис. 6. Компонентные  $\omega$ -отображения  $(\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus)$  отрезка  $AB$ , разделённого на две части, из пространства  $\omega_1$  в пространство  $\omega_0$  (в случае разбиения отрезка  $AB$  на две части  $a_1$  и  $a_2$  ( $|ab| = a = a_1 + a_2$ )).

Разделим отрезок  $AB$  на  $n$  равных частей:  $|AC_1| = |C_1C_2| = \dots = |C_{n-1}B| = \Delta a$ , где  $\Delta a = a/n$ . Отобразим отрезок  $AB$  из  $\omega_1$  в  $\omega_0$  при условии разбиения его в пространстве  $\omega_1$ . Нетрудно показать, что при делении отрезка  $AB$  ( $|AB| = a$ ) на три и более частей получим *тело* (при  $n = 3$ ) и *гипертела* (при  $n > 3$ ) с одинаковыми сторонами расположенными по осям координат. Принимая длину элементарного отрезка стремящуюся к нулю ( $\Delta a \rightarrow 0$ ), а общее число отрезков к бесконечности ( $n \rightarrow \infty$ ), получаем длину каждого отображенного отрезка равной единице ( $k^0 = 1$ ). Так проекция на плоскость  $XOY$  будет представлять собой квадрат, а в трехмерное пространство – куб со стороной грани, равной единице (площадь фигуры, являющейся проекцией гипертел, равна 1).

Заметим, что, отображая в  $\omega_0$  из  $\omega_1$  “отрезок” нулевой длины ( $|AB| = 0$ ), получим единичный  $\omega$ -образ, т.е. при переходе из  $\omega_i$  ( $i \neq 0$ ) в  $\omega_0$  геометрические объекты и, очевидно, физические субстанции, равные нулю, приобретают конечные реально “ощутимые”, т.е. не равные нулю, значения (например, при отображении

$\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  это значение – единица) и, наоборот, *конечное* может трансформироваться в *нулевое*.

В результате  $\omega$ -отображения  $(\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash)$  отрезка  $AB$  из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ , формируется *полиобраз*  $AB$ .

Попутно заметим, что размерность пространства входит в понимание последнего с позиции  $\omega$ -отображений. При этом *пространство может иметь любую размерность от нуля до бесконечности*. Причём, конкретная размерность его зависит, от устройства интеллектуально-психологического аппарата наблюдателя, т.е. от его способности *видения* (восприятия) действительности...

Итак, резюмируя, можно отметить следующие гипотетические аспекты (постулаты) концепции  $\omega$ -образов реальности.

1. Реальное пространство допускает существование любого  $\omega$ -пространства, т.е. его можно рассматривать как инфинитный спектр совмещённых (вложенных)  $\omega$ -пространств. Этот спектр порождает полиобраз объекта (*полиобъект*) и объясняет, в какой-то степени, причудливость (экзотичность) формы реальных объектов.

**Примечание.** Постулат 1 непосредственно связан с таким утверждением: *материя – первична, поэтому она в виде объектов имеет произвольные формы и размеры, а пространственно-временной континуум – вторичен и, как неотъемлемый компонент реальности объектов, предопределяет отношения и связи между последними, а заодно собственную инфинитно-полиморфную  $\omega$ -структуру*.

2. Каждое  $\omega$ -пространство можно рассматривать как  $\omega_0$  (*произвольность выбора нуля*), так как все  $\omega$ -пространства родственны по внутренним связям.

3. Результатом многоактного  $\omega$ -отображения *нуля* может быть *любое* число  $(0 \backslash \omega_i \rightarrow \omega_{i-1} \backslash k^0 = 1 \backslash \omega_{i-1} \rightarrow \omega_{i-2} \backslash k$  и т.д.).

Аналогично, при  $\omega$ -переходах некой физической субстанций допустима трансформация из нулевого её значения в любое другое (при изменении её сути), т.е. кажущееся появление из “ничего” заложено в  $\omega$ -структуре пространства и существующих закономерностях отображений объектов в этом *пространстве*.

4. Понимание (или просто восприятие) объекта зависит от совершенства интеллектуально-психологического аппарата наблюдателя.

Заметим, однако, что распространение теории  $\omega$ -отображений на физические объекты на данном этапе пока весьма проблематично. При этом не исключена возможность использования концепции

$\omega$ -отображений для объяснения ряда парадоксальных ситуаций: неясность связей дискретного и непрерывного, конечного и бесконечного; существование инфинитного информационного поля в любом объекте; возникновение материи из “ничего” и т.д.).

В заключение, отметим, что в настоящей работе даны только отдельные фрагменты принципиально нового суждения об объектах, связанные концепции реальности квазиполей. Последние содержат все *единства*, типичные для любой объективной реальности: *постоянного* (ядра) и *изменчивого* (квазиполя), *конечного* ядра и *бесконечного* (квазиполя), *родственного* (по принципу  $\omega$ -отображения) и *различного* (по результату  $\omega$ -отображения), *непрерывного* (по признаку  $k$ ) и *дискретного* (по признаку  $i$ ), *действительного* (физические и квазифизические объекты) и *абстрактного* (идентифицированные математические объекты), *абсолютного* (конкретный спектр основного квазиполя) и *относительного* (производные спектры образованные путем различных  $\omega$ -отображений), *простого* (принцип омега отображений и функция связи) и *сложного* (результат  $\omega$ -отображений) и т.д.

#### §4.6. Проблематика квазивекторного анализа

В связи с обширностью данного вопроса укажем только *основные* проблемы, возникающие при конструировании и изучении квазивекторного анализа (тем более, что в предыдущем §4.5, уже были затронуты проблемы обоснования реальности квазиполей).

1. Необходимо более тщательно проработать механизм  $\omega$ -отображений скалярных и векторных функций. При этом следует *доказать основополагающие моменты*, т.е., рассмотрев различные  $\omega$ -образы векторов и скаляров (в смежные  $\omega$ -пространства и пространства разных рангов), доказать общие теоремы квазивекторного анализа.

2. Реализовать  $\omega$ -отображения тензорного анализа, сформировать *квазитензорный* анализ и провести все доказательства согласно рекомендациям, данным в п.1. Причём, желательно получить формулы для  $n$ -мерного пространства (в настоящей работе автор ограничивался иногда только трёхмерным пространством).

3. Дать геометрическую интерпретацию  $\omega$ -трансформации объектов, записанных в виде формул. Исследовать  $\omega$ -отображения различных интегральных объектов от векторных функций и их комбинаций

4. Увеличить число примеров типа примеров, приведенных в п. 4.4. Найти  $\omega$ -образы аппарата квантовой механики. Все выводы необходимо давать в квазивекторной (или квазитензорной) терминологии. *Объяснить физическую суть (природу) квазиобъектов.* Более четко обосновать инфинитность образов объектов за счет расширения поля действительных чисел (см. п. 4.5.).

5. Провести  $\omega$ -отображения преобразований векторов при различных изменениях систем координат. Исследовать  $\omega$ -трансформацию векторов в криволинейных системах координат. Применить квазивекторные преобразования в идентифицированной квазиматричной форме.

6. Изыскать рациональную запись (символику) квазитензорных величин при различных  $\omega$ -отображениях.

7. Разработать обоснованную теорию *спецразмерностей* физических объектов и квазиобъектов ( $\omega$ -образов).

8. Сформировать теорию квазиобъектов в теории Картана. В частности, теорию квазиповерхностей получаемых в результате движения квазирепера.

9. Найти  $\omega$ -отображения основных понятий дифференциальной геометрии. Изучать структуру глобального пространства как суперпозицию всевозможных физических  $\omega$ -пространств.

10. Дать математическое описание инфинитных спектров и суперспектра квазиполей с помощью волновых функций, учитывая непрерывность спектров по признаку  $k$  и дискретность их по признаку  $i$ , а также наличие ядра (основной формы записи объекта).

Дать глобальное математическое описание по данному пункту с учётом различных функций связи. При этом ввести обобщающие положения (характеристики и критерии).

11. Разобрать вопросы пространственного временного континуума в свете представлений  $\omega$ -образов *общей* и *специальной* теорий относительности.

Например, попытаться путем  $\omega$ -образов описать искривлённые поверхности, для которых вообще не существуют координатные системы, свободные от таких дефектов, как две казалось бы близлежащие точки расположенные на очень далёком расстоянии друг от друга. В простейшем варианте,  $\omega$ -отображение известного неевклидова соотношения можно записать так:

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 &= g_{11} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus S_* = \left(\frac{x \cdot d \ln s}{dx}\right) \odot \left(\frac{x \cdot d \ln s}{dx}\right) = \\ &= G_{11} \cdot \left( \left( \frac{x \cdot d \ln y}{dx} \right) \odot \left( \frac{x \cdot d \ln y}{dx} \right) \right),\end{aligned}$$

где  $ds$  — дифференциал расстояния между двумя близлежащими точками, а  $dx$  и  $dy$  — дифференциалы координат точек на плоскости, т.е. проекции  $ds$  на оси  $OX$  и  $OY$ .

Откуда,

$$\log_k S_* = \log_k^2 \left( x \cdot \frac{d \ln s}{dx} \right) = \log_k G_{11} + \log_k^2 \left( x \cdot \frac{d \ln y}{dx} \right),$$

а метрический квазитензор  $G_{11}$  равен:

$$G_{11} = \left( \frac{\overset{'}{s}}{\overset{'}{y}} \right)^{\log_k \overset{'}{s} \cdot \overset{'}{y}}.$$

Для римановой геометрии имеем:

$$\begin{aligned}ds^2 &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 g_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus D = (d_* s) \odot (d_* s) = \\ &= \prod_{\alpha=1}^3 \prod_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta} \odot (d_* x_{\alpha}) \odot (d_* x_{\beta}),\end{aligned}$$

где величины со звёздочкой —  $\omega$ -образы дифференциалов и, после логарифмирования можно найти соотношение для метрического квазитензора  $G_{\alpha\beta}$  пространства, который характеризует искривлённость (деформацию) квазиповерхности.

Введём вместо обозначения координат  $X, Y, Z$  и времени  $t$  обозначения  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  ( $x_4 = c \cdot t$ ). Тогда известный интервал  $ds$  отвечает соотношению:

$$C_s = (cds)^2 = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^4 g_{jm} dx_j dx_m,$$

где  $j$  и  $m$  пробегают значения от 1 до 4 и по всем этим значениям проводится суммирование, а  $g_{jm}$  — это функции координат, характеризующие искривление пространства-времени в данной точке.

Откуда,  $C_S \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus C_{S*} = \prod_{j=1}^4 \prod_{m=1}^4 G_{jm} \odot dx_j \odot dx_m$ , где

$C_{S*} - \omega$ -образ  $(cds)^2$ .

Логарифмируя  $C_{S*}$  и обозначая  $\log_k C_{S*} = C_S^*$ ,  $\log_k C_{jm} = G_{jm}^*$ ,  $\log_k dx_{j*} = dx_j^*$ ,  $\log_k dx_{m*} = dx_m^*$ , где  $dx_{j*}$  и  $dx_{m*} - \omega$ -образы дифференциалов  $dx_j$  и  $dx_m$ , получим

$$C_S^* = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=1}^4 G_{jm}^* \cdot dx_j^* \cdot dx_m^*.$$

В результате нашли выражение, описывающее искривлённость *квазиповерхности*.

Изучая вопросы  $\omega$ -отображений ОТО и специальной теории относительности, целесообразно это исследование увязать с вопросами п.п. 8.

Реализуя различные  $\omega$ -отображения и функции связи, следует попытаться сформировать общую концепцию искривлённых поверхностей.

Наконец, нет сомнений, что  $\omega$ -отображения теорий, основанных на понятиях *геодезическая линия*, *кривизна*, *поток* и т.п. дадут качественно новую информацию о структуре пространственно-временного континуума.

## ГЛАВА 5. РАЗНОЕ (ПРИЛОЖЕНИЯ)

### §5.1. Общие положения

В настоящей главе рассмотрены примеры приложений материала, изложенного в предыдущих главах. Цель её дополнить последние фактами, позволяющими более глубоко понять проблематику всей монографии. Диапазон рассматриваемых здесь вопросов достаточно широк. В связи с фрагментарностью исследования материал этой главы решено было выделить под названием “Разное”. Тематика отдельных параграфов подобрана так, чтобы в главе 5 наряду с решением различных вопросов в едином ключе  $\omega$ -отображений была реализована индивидуализация параграфов, каждый из которых может быть изучен отдельно без ознакомления с другими.



## §5.2. О делении второй обратности

В общем инфинитном множестве алгебраических операций, о котором речь шла выше, деление, как и любая обратная операция, должно быть неоднозначным. Рассмотрим некоторые аспекты этого нового действия. Обозначим его двойной косой чертой “//” ( $b = a//c \Rightarrow b \cdot c = a$ ). Примером этого действия может быть операция между показателями степени при извлечении корня:  $\sqrt[c]{d^b} = d^{b//c}$ .

**Лемма 5.1.** Действие между показателями степени при извлечении корня является делением второй обратности:

$$\sqrt[c]{d^b} = d^{b//c}, \quad (5.1)$$

где  $\{b, c, d\} \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq (0; 1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $b//c = x$ ,  $(b, c) \in \mathbf{R}$ . Тогда, согласно свойствам  $\Delta$ -чисел, при  $c \in \mathbf{N}_2$   $x$  имеет два значения, одно из которых действительно, а второе – является  $\Delta$ -числом. Если  $b//c = m \in \mathbf{R}$ , то  $\sqrt[c]{d^b} = +l$ , а при  $m \in \Delta_0$  получим  $d^m = -l$ , так как  $d^{\Delta p} = -(d^p)^{42}$  по свойствам  $\Delta$ -чисел ( $p \in \mathbf{R}$ ,  $m = \Delta p$ ).

Всё это доказывает, что деление  $b//c$  является делением второй обратности. (В отличие от него деление первой обратности имеет одно значение).

**Примечание.** Можно привести несколько иное доказательство леммы. Обозначим  $\sqrt[c]{a^b} = x$ . Тогда  $a^b = x^c$ . После логарифмирования получим  $\log_a(a^b) = \log_a(x^c)$ . Откуда  $b = (\log_a x) \cdot c^{43}$ , т.е.  $\log_a x = b//c$  и  $x = a^{b//c}$ .

---

<sup>42</sup> Равенство  $d^{\Delta p} = -(d^p)$  следует из свойства  $\Delta$ -чисел.  $\log_k(-d) = \Delta \log_k d$ , где  $k, d \in R_+$ ,  $k \neq 1$ .

<sup>43</sup> Показатель степени выносится направо:  $\log(x^n) = (\log x) \cdot n$ , так как

$$\begin{aligned} \log(x^n) &= \log(x \cdot x \cdot \mathbf{K} \cdot x) = \log x + \log x + \mathbf{K} + \log x = \\ &= (\log x) \cdot n. \end{aligned}$$

**Лемма 5.2.** Для  $a, b, c \in \mathbf{R}$  имеет место равенство

$$a \cdot (b // c) = (a \cdot b) // c \quad (5.2)$$

**Доказательство.** Из (5.1) получим

$$(d^a)^{b // c} = \sqrt[c]{(d^a)^b} = \sqrt[c]{d^{a \cdot b}} = d^{(a \cdot b) // c}, \text{ т.е.}$$

$$a \cdot (b // c) = (a \cdot b) // c.$$

**Следствие.** Из (5.2) следует

$$a \cdot \Delta b = \Delta(a \cdot b), \quad (5.3)$$

что встречалось уже в свойствах  $\Delta$ -чисел.

**Теорема 5.1.** Для  $(a, b) \in \mathbf{R}$  имеют место равенства

$$a) \quad a \cdot \frac{1}{b} = a // b, \quad (5.4)$$

$$б) \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{b \cdot a}{c} \quad (5.5)$$

**Доказательство.** а). Пусть  $a \cdot \frac{1}{b} = x_1 \Rightarrow a = x_1 // (1/b)$ . Согласно

$$(5.2) \quad a = x_1 // (1/b) = (x_1 \cdot 1) // (1/b) = x_1 \cdot (1 // (1/b)). \quad \text{Обозначим}$$

$$1 // (1/b) = y. \quad \text{Тогда} \quad 1 = y \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{b} \Rightarrow y \equiv b, \text{ т.е. } a = x_1 \cdot y =$$

$$= x_1 \cdot b \Rightarrow x_1 = a // b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = a // b, \text{ что и требовалось доказать.}$$

б). Обозначим  $\frac{b}{c} \cdot a = x_2$ . Тогда  $\frac{b}{c} = x_2 // a \Rightarrow b = c \cdot (x_2 // a)$ . Со-

гласно (5.2) запишем  $b = c \cdot (x_2 // a) = (c \cdot x_2) // a$ , т.е.  $b \cdot a = c \cdot x_2$  и

$$x_2 = \frac{b \cdot a}{c}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

**Следствие.**  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ . Это равенство следует из п. б) данной

теоремы, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} \cdot a &= \underbrace{\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \dots + \frac{b}{c}}_a = \frac{\overbrace{b+b+\dots+b}^a}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{b}{c} \cdot k + \frac{b}{c} \cdot m &= \frac{b \cdot k}{c} + \frac{b \cdot m}{c} = \frac{b \cdot k + b \cdot m}{c}, \end{aligned}$$

где  $k + m = a$ .

Меняя коэффициенты  $b$ ,  $k$  и  $m$ , можем получить равенства  $b \cdot k = a$ ,  $b \cdot m = b$ , где переменные, стоящие в правой части взяты из формулы  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ .

**Теорема 5.2** Для всех  $a \in \mathbf{N}_1$  и  $b \in ]\Delta^\infty, +\infty[$ ,  $b \notin \{\Delta 0, \theta, 0\}$  имеют место равенства:

$$\frac{a}{b} = a//b \quad {}^{44} \quad (5.6)$$

и  $a \cdot b = b \cdot a$ .

**Доказательство.** Из (5.6), т.е., если первая часть теоремы 5.2 верна, следует:  $a = b(a//b)$ . Согласно лемме 5.2  $a = (b \cdot a)//b \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ . Это равенство имеет место для любого нечётного  $a$  ( $a \in \mathbf{N}_1$ ),  $b \in ]\Delta^\infty, +\infty[$  и  $b \notin \{\Delta 0, \theta, 0\}$ . Действительно, пусть  $b \in \mathbf{R}$ . Тогда  $a \cdot b = b \cdot a$  в силу коммутативности операции умножения действительных чисел ( $\{a, b\} \in \mathbf{R}$ ). Пусть  $b \in \Delta_0$ , т.е.  $b = \Delta b_1$ , где  $b_1 \in \mathbf{R}$ . Тогда  $a \Delta b_1 = \Delta(a \cdot b_1)$ , а  $\Delta b_1 \cdot a = \Delta(b_1 \cdot a) = \Delta(a \cdot b_1)$  при  $a \in \mathbf{N}_1$ , т.е.  $a \cdot \Delta b_1 = \Delta b_1 \cdot a$  и  $a \cdot b = b \cdot a$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Так как  $\frac{b}{a} = b//a$  при указанных выше условиях, то при этих условиях справедливо равенство  $(a+b)//c = a//c + b//c$ , которые непосредственно следует из леммы 5.1.

---

<sup>44</sup> Равенство (5.6) легко доказать из (5.4).

$$d^{(a+b)//c} = \sqrt[c]{d^{(a+b)}} = \sqrt[c]{d^a \cdot d^b} = \sqrt[c]{d^a} \cdot \sqrt[c]{d^b} = d^{a//c} \cdot d^{b//c} = \\ = d^{a//c + b//c} \Rightarrow (a+b)//c = a//c + b//c.$$

Разумеется, приведенные выше доказательства не дают исчерпывающего описания деления второй обратности. Тем не менее, общее представление об этой операции из вышеизложенного может сформироваться. Основные положения таковы:

а) деление второй обратности связано с нарушением коммутативности операции умножения ( $a \cdot b \neq b \cdot a$ ), т.е. из  $a = b//c \Rightarrow a \cdot c = b$  (но не  $c \cdot a = b$ !), а из  $a = \frac{b}{c} \Rightarrow c \cdot a = b$ ;

б) деление второй обратности следует применять при расширении поля действительных чисел до множества  $R_0$  ( $R_0 = \mathbf{R} \cup \Delta_0$ );

в) деление второй обратности объясняет появление двух значений у корня чётной степени:  $\sqrt[c]{d} = \pm m$  при  $c \in \mathbf{N}_2$ .

В заключение, отметим, что существует ряд теорем и правил, определяющих природу той или иной операции, её свойства и следствия.

Например:

а). У коммутативной операции обе обратные ей операции совпадают по значению.

б). У некоммутативной операции имеются различные обратные операции (условно назовём их – “аналог корня” и “аналог логарифма”).

### §5.3 Примеры $\omega$ -образов объектов математического анализа

Нетрудно получить различные  $\omega$ -образы объектов математического анализа.

1. Например, модифицированные формулы Тейлора, под которыми будем понимать различные  $\omega$ -образы этой формулы выглядят так (для  $x_0 = a$ ):

а) при отображении  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$ :

$$f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( \binom{(n)}{f(a)} \right) \frac{\left( \log_k \left( \frac{x}{a} \right) \right)^n}{n!}, \quad k > 1, \quad (5.7)$$

где  $\binom{(n)}{f(a)}$  –  $\omega$ -образ  $(\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash)$   $n$ -й производной;

б) при отображении  $\backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash$

$$f(x) = \log_k \sum_{n=0}^{\infty} k^{\binom{(0)}{n}} f(a) + n \cdot \log_k (k^{x-k^a}) - \log_k n!, \quad k > 1, \quad (5.8)$$

где  $\binom{(0)}{n} f(a)$  –  $\omega$ -образ  $(\backslash \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \backslash)$   $n$ -й производной;

в) для  $\backslash \omega_0' \rightarrow \omega_0 \backslash$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p \sqrt{\frac{\left( f_{k2}^{(n)}(a) \right)^p \cdot (x^p - a^p)}{n!}}, \quad p \neq 0, 1, \quad (5.9)$$

где  $f_{k2}^{(n)}(a)$  –  $\omega$ -образ  $(\backslash \omega_0' \rightarrow \omega_0 \backslash)$   $n$ -й производной;

Можно найти инфинитный спектр  $\omega$ -образов формулы Тейлора.

Для приближенных вычислений рационально использовать следующую формулу, которую получим для трёх членов  $\omega$ -образа формулы Тейлора, не приведенного к масштабу пространства  $\omega_0$ :

$$f(a \cdot h) \approx f(a) \cdot h \cdot f' \cdot (h^{\ln h})^{\frac{f' \cdot f}{2!}} \cdot \left( h^{(\ln h)^2} \right)^{\frac{f' \cdot (f')^2 + f' \cdot f \cdot f''}{3!}},$$

где  $'f = f'(a)$ ,  $''f = f''(a)$ ,  $'''f = f'''(a)$ ,  $a = x_0$ ,  $h = \frac{x}{x_0}$ . (5.10)

Докажем эту формулу. Пусть в окрестности некоторой точки  $x_0$  функция  $f(x)$  дифференцируемая трижды. Представим её в виде:

$$f(x) \approx a_0 \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^{a_1} \cdot \left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}\right)^{a_2} \cdot \left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right)}\right)^{a_3}$$

Найдем  $'f(x_0)$ .  $'f = x(\ln f)'$ , но  $\ln f(x) \approx \ln a_0 + a_1 \times$   
 $\times \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 \cdot \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_3 \cdot \ln^3\left(\frac{x}{x_0}\right)$

$$(\ln f)' \approx a_1 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 2a_2 \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{x} + 3a_3 \cdot \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$'f = x \cdot (\ln f)' \approx a_1 + 2a_2 \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + 3a_3 \cdot \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Откуда,  $a_1 = f'(x_0)$ .

Найдём  $'f(x_0) \cdot ''f(x_0)$ .  $'f \cdot ''f = x(\ln f)' + x^2(\ln f)''$ .

Тогда,  $'f(x_0) \cdot ''f(x_0) \approx x_0 \left( a_1 \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right) + 2a_2 \cdot \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{x_0} + \right.$

$$\left. + 3a_3 \cdot \ln^2\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1}{x_0} \right) + x_0^2 \left( -a_1 \left(\frac{1}{x_0^2}\right) + \frac{1}{x_0^2} \cdot 2a_2 - 3a_3 \frac{1}{x_0^2} \times \right.$$

$$\times \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = a_1 - a_1 + 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{{}'f \cdot {}''f}{2!}.$$

Аналогично найдем  $'f(x_0) \cdot ({}''f(x_0))^2 + {}'f(x_0) \cdot {}''f(x_0) \cdot {}'''f(x_0).$

Обозначим  $\ln f = \varphi$ . Тогда  $'f = x \cdot \varphi'$ ,  ${}''f = (x \cdot \varphi')' = 1 + \frac{x \cdot \varphi''}{\varphi'}$ ,

$$'f \cdot {}''f = x \cdot \varphi' + x^2 \cdot \varphi'', \quad {}'''f = \left(1 + \frac{x \cdot \varphi''}{\varphi'}\right)' = \frac{x \cdot \varphi'}{\varphi' + x \cdot \varphi''} \times$$

$$\times \frac{(x \cdot \varphi'')' \cdot \varphi' - (\varphi'')^2 \cdot x}{(\varphi')^2}. \quad \text{Поясним:} \quad \left(\left(\frac{x \cdot \varphi''}{\varphi'}\right)'\right) =$$

$$= \frac{(x \cdot \varphi'')' \cdot \varphi' - \varphi'' \cdot x \cdot \varphi''}{(\varphi')^2} = \frac{x \cdot (\varphi' \cdot \varphi'' + x \cdot \varphi' \cdot \varphi''' - x \cdot (\varphi'')^2)}{(\varphi')^2 + x \cdot \varphi' \cdot \varphi''}.$$

Тогда  $'f \cdot {}''f \cdot {}'''f = (x \cdot \varphi' + x^2 \cdot \varphi'') \cdot {}'''f = \frac{x^2}{\varphi'} (\varphi' \cdot \varphi'' + x \cdot \varphi' \cdot \varphi''' - x \cdot (\varphi'')^2).$

Найдем  $'f \cdot ({}''f)^2$ .  $'f \cdot ({}''f)^2 = (x \cdot \varphi' + x^2 \cdot \varphi'') \cdot \left(1 + \frac{x \cdot \varphi''}{\varphi'}\right) =$

$$= \frac{x}{\varphi'} \left( (\varphi')^2 + 2x \varphi' \cdot \varphi'' + x^2 (\varphi'')^2 \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& f' (f'')^2 + f' \cdot f'' \cdot f''' = \frac{x}{\varphi'} \left( (\varphi')^2 + 2x\varphi' \cdot \varphi'' + x^2(\varphi'')^2 \right) + \\
& + \frac{x^2}{\varphi'} \left( \varphi' \cdot \varphi'' + x \cdot \varphi' \cdot \varphi''' - x \cdot (\varphi'')^2 \right) = x \cdot \varphi' + 3x^2 \varphi'' + x^3 \varphi''' = \\
& = x(\ln f)' + 3x^2 (\ln f)'' + x^3 (\ln f)'''.
\end{aligned}$$

$$(\ln f)' \Big|_{x=x_0} = \frac{a_1}{x_0}, \quad (\ln f)'' \Big|_{x=x_0} = -\frac{a_1}{x_0^2} + \frac{2a_2}{x_0^2},$$

$$(\ln f)''' \Big|_{x=x_0} = \frac{2a_1}{x_0^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_2}{x_0^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3}{x_0^3}$$

$$x_0^3 (\ln f)''' \Big|_{x=x_0} = 2a_1 - 3! a_2 + 3! a_3$$

$$\text{При } x = x_0 \quad f' (f'')^2 + f' \cdot f'' \cdot f''' = \frac{x_0 \cdot a_1}{x_0} + 3x_0^2 \cdot \left( -\frac{a_1}{x_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2a_2}{x_0^2} + x_0^3 \cdot \left( \frac{2a_1}{x_0^3} - \frac{3! \cdot a_2}{x_0^3} + \frac{3! \cdot a_3}{x_0^3} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{f' (f'')^2 + f' \cdot f'' \cdot f'''}{3!}.$$

**Примечание.**  $\omega$ -образы дифференциалов будут:

$$\delta f = (\delta x)' f, \quad \delta(\delta f) = \delta^2 f = \delta x \left( (\delta x)' f \right)' = \left( (\delta x)^{\ln \delta x} \right)'' f \cdot f',$$



$$\delta^3 f = \delta(\delta^2 f) = \left( (\delta x)^{\ln^2 \delta x} \right)' f \cdot f \cdot \left( f + f \right), \quad (5.11)$$

$$\delta^4 f = \left( (\delta x)^{\ln^3 \delta x} \right)' f \cdot f \cdot \left( \left( f + f \right)^2 + f \cdot f + f \cdot f \cdot f \right) \text{ и т.д.}$$

Не останавливаясь на  $\omega$ -образах различных объектов математического анализа, заметим, что их несложно получать по аналогии с соответствующими объектами общеизвестного анализа.

2. Например, для любых  $a, b, c \in \mathbf{R}$  справедливо равенство:

$$\int_a^b (\delta x)^{f(x)} = \int_a^c (\delta x)^{f(x)} \cdot \int_c^b (\delta x)^{f(x)}.$$

Пусть  $a < c < b$ . Тогда

$$\prod_{i=a}^b (\Delta x_i)^{f(\xi_i)} = \prod_{i=a}^c (\Delta x_i)^{f(\xi_i)} \cdot \prod_{i=c}^b (\Delta x_i)^{f(\xi_i)}.$$

Переходя к пределу, получим:

$$\int_a^b (\delta x)^{f(x)} = \int_a^c (\delta x)^{f(x)} \cdot \int_c^b (\delta x)^{f(x)}.$$

Пусть  $a < b < c$ , то

$$\int_a^c (\delta x)^{f(x)} = \int_a^b (\delta x)^{f(x)} \cdot \int_b^c (\delta x)^{f(x)} \Rightarrow \Rightarrow \int_a^b (\delta x)^{f(x)} = \frac{\int_a^c (\delta x)^{f(x)}}{\int_b^c (\delta x)^{f(x)}}.$$

$$\text{Но } \int_c^b (\delta x)^{f(x)} = \frac{1}{\int_b^c (\delta x)^{f(x)}}, \quad \text{т.е.} \quad \int_a^b (\delta x)^{f(x)} = \int_a^c (\delta x)^{f(x)} \times$$

$$\times \int_c^b (\delta x)^{f(x)}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

3. Докажем формулу  $\mathbb{P}(u^v) = \mathbb{P}v \cdot \ln v + \mathbb{P}u$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(u(x)^{v(x)}\right) &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \log_{u(x)^{v(x)}}^{u(x^{\delta x})^{v(x^{\delta x})}} = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \left( \frac{v(x^{\delta x})}{v(x)} \cdot \log_{u(x)}^{u(x^{\delta x})} \right) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \frac{v(x^{\delta x})}{v(x)} + \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta x} \log_{u(x)}^{u(x^{\delta x})} = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{\left( v(x^{\delta x}) \right)' - (v(x))'}{(\delta x)'} + \mathbb{P}u(x) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \frac{\left( v(x^{\delta x}) \right)' - 0}{1} + \mathbb{P}u(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 1} \left( v(x^{\delta x}) \right)' + \mathbb{P}u(x) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta_*(\delta x)} \delta_* v(x^{\delta x}) + \mathbb{P}u(x) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 1} \log_{\delta_*(x^{\delta x})} \delta_* v(x^{\delta x}) \cdot \log_{\delta_*(\delta x)} \delta_*(x^{\delta x}) + \mathbb{P}u(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_{\delta_{*x}} \delta_{*v}(x) \cdot \lim_{\delta x \rightarrow 1} \delta x \cdot \ln x + {}^p u(x) = {}^v(x) \cdot \ln x + {}^p u(x) = \\
&= {}^p v(x) \cdot \frac{\ln v(x)}{\ln x} \cdot \ln x + {}^p u(x) = {}^p v(x) \cdot \ln v(x) + {}^p u(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Заметим также, что по аналогии с формулой  $'(u+v) = \frac{u \cdot 'u + v \cdot 'v}{u+v}$  имеет место равенство:

$${}^p(u \cdot v) = \log_{u \cdot v} \left( u^{{}^p u} \cdot v^{{}^p v} \right),$$

которое несложно доказать. Действительно,  ${}^p(u \cdot v) = ({}^u + {}^v) \log_{u \cdot v} x =$

$$= \left( {}^p u \cdot \log_x u + {}^p v \cdot \log_x v \right) \cdot \log_{u \cdot v} x = {}^p u \cdot \log_{u \cdot v} x^{\log_x u} +$$

$$+ {}^p v \cdot \log_{u \cdot v} x^{\log_x v} = {}^p u \cdot \log_{u \cdot v} u + {}^p v \cdot \log_{u \cdot v} v =$$

$$= \frac{{}^p u \cdot \ln u + {}^p v \cdot \ln v}{\ln u \cdot v} = \frac{\ln u^{{}^p u} + \ln v^{{}^p v}}{\ln u \cdot v} = \log_{u \cdot v} \left( u^{{}^p u} \cdot v^{{}^p v} \right),$$

что и требовалось доказать.

$$\text{Докажем, что } {}^p(u+v) = \frac{\log \left( 2^{{}^p u} \cdot 2^{{}^p v} \right)}{\log \left( 2^{(u+v)} \right)}.$$

$$\text{Действительно, } {}^p(u+v) = (u+v)' \cdot \log_{2^{(u+v)}} 2^x = \left( {}^p u \cdot \log_{2^x} 2^u + \right.$$

$$\left. + {}^p v \cdot \log_2^v \right) \cdot \log_2^x = \frac{\log \left( {}^2 u^{{}^p u} \cdot {}^2 v^{{}^p v} \right)}{\log \left( {}^2 (u+v) \right)}.$$

Выбирая любой объект (формулу, теорему и т.д.) математического анализа, можно найти его  $\omega$ -образ из любого пространства.

Например, возьмём способ касательных (способ Ньютона) для приближенного вычисления корней уравнений:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2), \quad f(x_2) > 0, \quad x_2 - \text{заданное ко-}$$

нечное значение аргумента.

$$\text{По аналогии} \quad \left( \frac{x}{x_2} \right)^{'f(x_2)} = \frac{y}{f(x_2)}. \quad \text{При } x = a_1, \quad y = 1, \quad (\text{так как}$$

$$0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus 1, \quad \text{то} \quad y = 0 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus y = 1), \quad \text{т.е.}$$

$$\left( \frac{a_1}{x_2} \right)^{'f(x_2)} \cdot f(x_2) = 1 \Rightarrow a_1 = x_2 \cdot \sqrt[{'f(x_2)}]{f(x_2)} \text{ и т.д.}$$

**Примечание.** Докажем также встречающуюся в тексте формулу:

$$\int (\delta x)^{f(x)} = \exp \left( \int \frac{f(x)}{x} dx \right).$$

$$'f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}, \quad \log_{\delta x} \delta f(x) = \frac{x \cdot df(x)}{f(x) \cdot dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\log_{\delta x} \delta f(x)}{x} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x)$$

$$f(x) = \exp\left(\int \frac{\log_{\delta x} \delta f(x)}{x} dx\right) = \exp\left(\int \frac{f(x)}{x} dx\right).$$

Или иначе:

$$\int (\delta x)^{f(x)} = F(x) \Rightarrow {}^1F(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot F'(x)}{F(x)} = f(x) \Rightarrow (\ln F(x))' = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln F(x) = \int \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow F(x) = \exp\left(\int \frac{f(x)}{x} dx\right),$$

т.е.  $\int (\delta x)^{f(x)} = \exp\left(\int \frac{f(x)}{x} dx\right)$ , что и требовалось доказать.

В заключение запишем выражения для некоторых  $\omega$ -образов дифференциалов. Так как в  $\omega_0$   $df(x) = f'(x) \cdot dx$ , т.е.  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ , то,

по аналогии с этим,  $df(x) =$

$$= f'(x) \cdot dx \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \overset{\bullet}{\nu} f(x) = f(x) + \nu x, \quad \text{а} \quad df(x) \setminus \omega_1 \rightarrow^{45}$$

$$\rightarrow \omega_0 \setminus \delta f = (\delta x)^{{}^1f} \Rightarrow {}^1f(x) = \log_{\delta x} \delta f(x).$$

Тогда “суперсупердифференциал”

---

<sup>45</sup>  ${}^1f$  — образ производной, не приведенный к масштабу  $\omega_0$  и полученный псевдо-отображением  $f' \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus {}^1f$ , где  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus *$  означает, что результат  $\omega$ -отображения не приводится к масштабу  $\omega_0$ .

$$\delta x = {}^s f(\delta x) \Rightarrow {}^s f(x) = \text{slog}_{\delta x} \delta f(x),$$

где  ${}^s f(x)$  — «суперсуперпроизводная».

Если за основу взять  $\omega$ -образ производной  ${}^p f(x)$ , полученный отображением:

$$f'(x) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k' f(x) = {}^p f(x),$$

причём  ${}^p f(x)$ , как указывалось, это образ производной, приведенный к масштабу  $\omega_0$ , то  $\delta f = {}^p f(x) \odot \delta x \Rightarrow {}^p f(x) = \delta f(x) \triangle \delta x$ , где  $df \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \delta f$ .

Аналогично,  $\omega$ -образ производной  ${}^p f$ , где  ${}^p f(x)$  —  $\omega$ -образ, полученный псевдоотображением  $f'(x) \setminus \omega_2 \rightarrow \omega_0 \setminus {}^p f(x)$ , т.е.  ${}^p f(x)$  — не приведен к масштабу  $\omega_0$ , имеет дифференциал

$$\delta f = (\delta x)^{{}^p f(x)} \Rightarrow {}^p f(x) = \log_{\delta x} \delta f(x).$$

Очевидно,  $\dot{v}f = \dot{f} + vx \Rightarrow \dot{f}(x) = vf(x) - vx$ , где  $\dot{f}$  — образ производной, полученный  $\setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus$  и приведенный к  $\omega_0$  и т.д..

#### §5.4. $\omega$ -образные единицы

Сначала рассмотрим отображение  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  комплексного числа.

Пусть в  $\omega_1$  задано комплексное число  $z = a + bi$ . Отобразим его в пространство  $\omega_0$ . Для этого определим операцию *рефлексивного извлечения корня*. Так как рефлексивное возведение в степень определено как  $a^{\rightarrow b} = \underbrace{a \odot a \odot a \odot \dots \odot a}_{\log_k b \in \mathbb{Z}, k \neq 1}$ , то обратная операция, т.е. рефлексивное извлечение корня, будет записана так:

$$\sqrt[b]{a} = x \Rightarrow a = x^{\rightarrow b} = \underbrace{x \odot x \odot x \odot \dots \odot x}_{\log_k b \in \mathbb{Z}, k \neq 1}$$

$$\begin{aligned}
&= k^{(\log_k x)^{\log_k b}} \Rightarrow \log_k a = (\log_k x)^{\log_k b} \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\log_k a)^{1/\log_k b} = \log_k x \Rightarrow x = k^{\log_k b \sqrt[\log_k b]{\log_k a}}, \\
&\text{т.е.} \quad b \leftarrow \sqrt{a} = k^{\log_k b \sqrt[\log_k b]{\log_k a}} \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\text{Тогда } i = \sqrt{-1} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus = k^{\sqrt{-1}} = k^i$$

$$\left( a = -1 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus a_* = k^{-1} = \frac{1}{k} \Rightarrow \log_k a_* = -1, \right.$$

$$\left. b = 2 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus b_* = k^2 \Rightarrow \log_k b_* = \log_k k^2 = 2 \right),$$

где  $a_*, b_*$  –  $\omega$ -образы  $a$  и  $b$  в  $\omega_0$  из  $\omega_1$ .

$$z = a + bi \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^a \cdot (k^b \odot k^i) = k^{a+bi}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Если } k = e^m, \quad \text{то } k^{a+bi} = e^{ma+mbi} = x + iy \Rightarrow x = k^a \times \\
&\times \cos(b \cdot \ln k), \quad y = k^a \cdot \sin(b \cdot \ln k), \quad \text{т.е.} \quad x + iy = k^a \times \\
&\times (\cos(b \cdot \ln k) + i \cdot \sin(b \cdot \ln k)) \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Итак,  $\omega$ -образ комплексного числа при отображении  $\setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus$  является тоже комплексным числом.

В результате, как и следовало ожидать, нам не удалось получить чисел новой природы (все операции и операнды общеизвестны).

Попытаемся теперь найти аналог числа  $i$  в области  $\Delta$ -чисел. Для этого рассмотрим структуру мнимой единицы:  $i = \pm \sqrt{-1} = (-1)^{1/2}$ , т.е. мнимая единица  $i$  образовалась из отрицательных и положительных чисел в результате введения операции деления второй обратности. При отображении  $\setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus$  операнда  $-1$  и операции деления второй обратности получим:  $-1 \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_k(-1) = \Delta 0$ , если  $\log_k(-1) \in \Delta_0$ ,  $// \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \Diamond$ , т.е. деление второй обратности отобразится в рефлексивное деление второй обратности. Очевидно,

$$k^{\Delta m} \Diamond k^n = k^{\Delta m // n} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \Delta m // n, \text{ где}$$

В нашем случае  $\sqrt[n]{k^{\Delta m}} = \sqrt{-1}$ , т.е.  $k^{\Delta m} \equiv -1$ . Откуда  $\Delta m \equiv \Delta 0$ , а  $n = 2$ , т.е.  $i \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus j = \Delta 0/2$ , где  $j$  – мнимая  $\Delta$ -единица является числом *новой* природы. На основании числа  $j$  можно сконструировать теорию функций  $j$ -переменной. Эта теория будет  $\omega$ -образом ТФКП в области  $\Delta$ -чисел.

### §5.5. Примеры решения дифференциальных уравнений с применением аппарата $\omega$ -отображений

Математический аппарат  $\omega$ -отображений может быть использован для расширения класса решённых дифференциальных уравнений до бесконечности. Причём,  $\omega$ -образы известных уравнений (а они будут более сложными по структуре дифференциальными уравнениями, решение которых затруднено) и их решения находятся весьма просто без каких-либо преобразований. Суть вышеизложенного заключается в следующем:

а) выбираем *любое* известное уравнение с решением (имеется в виду любое по сложности уравнение, решение которого уже известно);

б) представляем, что это уравнение и его решение “находятся” в некотором пространстве  $\omega_i$  или  $\omega_i'$  (в настоящей работе выбран простейший случай, когда  $i = 1$ );

в) отображаем уравнение и решение в  $\omega_0$ .

Естественно, что при многоактном  $\omega$ -отображении по “вертикали” ( $i = \text{var}$ ,  $k = \text{const}$ ) и по “горизонтали” ( $i = \text{const}$ ,  $k = \text{var}$ ), а также, сочетая одновременно те и другие  $\omega$ -отображения, т.е.  $i = \text{var}$ ,  $k = \text{var}$ , можно получить сколь угодно сложное по структуре дифференциальное уравнение с готовым решением. Всякого рода замечания по поводу того, что такие результаты можно получить подстановками, опровергаются тем фактом, что в данном случае вся процедура отображения весьма проста, не требует особых затрат (временных, интеллектуальных и т.д.). Следует не забывать, что в этой книге описаны *только*  $\omega$ -пространства с *показательной* функцией связи  $k^x$ . Однако, реализуя  $\omega$ -отображения с другой функцией связи, получим, практически, всё инфинитное множество всевозможных дифференциальных уравнений и их решений.



Прежде чем привести примеры решений дифференциальных уравнений с применением аппарата  $\omega$ -отображений, докажем теорему, которая ранее встречалась (теорема 3.15, с 127), но с иной интерпретацией результата.

**Теорема 5.3.** Если  $f$  неотрицательная непрерывная в некоторой области  $D$  функция и имеет в  $D$   $n$ -производных, то при  $k \neq 0, 1$   $k \in \mathbf{R}$  и  $f \neq 0$  отношение  $\varphi = \ln \frac{(n)}{f} / \left( \ln \frac{(n-1)}{f} \right)'$  линейно относительно аргумента  $\varphi = cx$  (5.20),  $c = \ln k$ .

**Доказательство.** Преобразуем  $\varphi$ :  $\ln \frac{(n)}{f} = cx \cdot \left( \ln \frac{(n-1)}{f} \right)'$ , т.е.

$$\frac{(n)}{f} = \exp \left( cx \cdot \left( \ln \frac{(n-1)}{f} \right)' \right) = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(n-1)}{f} \right)'}$$

Далее доказательство совпадает с доказательством т. 3.15.

$$\frac{''}{f} = \frac{(2)}{f} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{'}{f} \right)'} = k^{x(y' + x \cdot y'') \cdot \ln k}, \quad y = \ln f \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично, } \frac{'''}{f} = \frac{(3)}{f} &= k^{x \cdot \left( \ln \frac{(2)}{f} \right)'} \\ \frac{(3)}{f} &= k^{\ln^2 k \cdot x \cdot (y' + 3xy'' + x^2 y''')} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\frac{(4)}{f} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(3)}{f} \right)'} = k^{\ln^3 k \cdot x \cdot (y' + 7xy'' + 6x^2 y''' + x^3 y^{IV})};$$

$$\frac{(5)}{f} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(4)}{f} \right)'}$$

$$\frac{(5)}{f} = k^{\ln^4 k \cdot x \cdot (y' + 15xy'' + 25x^2 y''' + 10x^3 y^{IV} + x^4 y^V)} \text{ и т.д.}$$

Пусть равенство  $\frac{(n)}{f} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(n-1)}{f} \right)'}$  верно. Тогда  $\frac{(n+1)}{f} = k^{\left( \frac{(n)}{f} \right)'}$ . Обозначим  $\frac{(n)}{f} = Z$ , т.е.

$$\frac{(n+1)}{f} = k^{Z'} = k^{x \cdot Z'/Z} = k^{x \cdot (\ln Z)'} = k^{x \cdot \left( \ln \frac{(n)}{f} \right)'}$$

Теорема доказана.

Нередко при решении задач математической физики встречается *лапласиан*  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Отображая его из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ , получим логарифм квазилапласиана:

$$\begin{aligned} \ln \Delta = & x \cdot \frac{\partial \ln}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \ln}{\partial z} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial x^2} + \\ & + y^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial y^2} + z^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

**Пример 1.** Пусть в  $\omega_1$  задано уравнение  $f' = x^2$  и его решение  $f = \frac{x^3}{3}$ . Найти  $\omega$ -образы этого уравнения и его решения:

$$\begin{aligned} f' = x^2 \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{x \cdot (\ln f)'} &= k^{\log_k^2 x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot (\ln f)' &= \log_k^2 x; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\log_k^3 x \Delta k^3} = k^{\log_k^3 x / \log_k k^3} = k^{\log_k^3 x / 3}$$

$$\log_k f = \frac{\log_k^3 x}{3} \Rightarrow \ln f = \frac{\log_k^3 x}{3} \cdot \ln k.$$

Откуда  $(\ln f)' = \frac{3 \cdot \log_k^2 x \cdot \ln k}{3} \cdot (\log_k x)' = \frac{\log_k^2 x \cdot \ln k}{x \cdot \ln k} = \frac{\log_k^2 x}{x}$ , что

совпало с (1), т.е. искомое уравнение  $(\ln f)' = \frac{\log_k^2 x}{x}$ , а его решение

$$f = k^{\log_k^3 x / 3}.$$

**Пример 2.** Пусть в  $\omega_1$  задано уравнение в терминах этого пространства:

$$\underline{f''} = \underline{x \odot \cos x}$$

Образ этого уравнения в пространстве  $\omega_0$ :

$$k^{\ln k \cdot x \cdot \left( (\ln f)' + x \cdot (\ln f)'' \right)} = x^{\cos \log_k x}, \quad k \neq 1$$

так как  $\underline{\cos x} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\cos \log_k x} = k^{\cos(\log x / \log k)}$ .

Используя одно из решений уравнения  $f'' = x \cdot \cos x$  в  $\omega_0$   $f = 2 \cdot \sin x - x \cdot \cos x$ , запишем в терминах  $\omega_1$  и затем найдём соответствующий образ решения в  $\omega_0$ . Получим

$$f = k^{(2 \cdot \sin(\log x / \log k) - (\log x / \log k) \cdot \cos(\log x / \log k))}.$$

**Примечания.** 1. Запись в терминах пространства  $\omega_1$  можно опускать и непосредственно записывать искомое решение в  $\omega_0$ :  $f'' = x \cdot \cos x(\omega_1)$ , т.е. уравнение задано в пространстве  $\omega_1$ .

2. Если бы уравнение  $f'' = x \cdot \cos x$  было задано в пространстве  $\omega_1'$  и требовалось бы найти его решение в пространстве  $\omega_0$ , то необходимо реализовать переход  $\omega_1' \rightarrow \omega_0' \rightarrow \omega_0$ , либо  $\omega_1' \rightarrow \omega_1 \rightarrow \omega_0$ . Получим следующее дифференциальное уравнение<sup>46</sup>:

---

<sup>46</sup> В примере 5 дана краткая теория отображения  $\omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus$ .

$$\frac{p}{\ln k} \cdot \left( \frac{f_t''}{f} - \left( \frac{f_t'}{f} \right)^2 \right) = t \cdot \cos t,$$

где  $t = \log_k x^p$ ,  $f = f(x^p)$ .

Решение этого уравнение в  $\omega_0$  запишется так:

$$f = k^{(2 \cdot \sin \log_k x^p - \log_k x^p \cdot \cos \log_k x^p)},$$

**Пример 3.** Пусть в  $\omega_1$  задано уравнение  $\frac{f_{\tau\tau}''}{f} = a^2 \odot \frac{f_{xx}''}{f}$ ,  
 $\underline{f}(\underline{0}, \tau) = \underline{0}$ ,  $\underline{f}(\underline{l}, \tau) = \underline{0}$ ,  $\underline{f}(x, \underline{0}) = \underline{\varphi}(x)$ ,  $\left. \frac{f_{\tau}'}{f} \right|_{\tau=0} = \underline{\Psi}(x)$ ,  
 $(a, l, k) = \text{const}$

В  $\omega_0$  это уравнение выглядит так:

$$\tau \cdot \left( \chi_{\tau}' + \tau \cdot \chi_{\tau\tau}'' \right) = a^2 \cdot x \cdot \left( \chi_x' + x \cdot \chi_{xx}'' \right) \quad (1)$$

где  $\chi = \ln f$ . Реализуем отображение  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ .

Зная решение аналогичного уравнения  $\left( f_{\tau\tau}'' = a^2 \cdot f_{xx}'' \right)$  в  $\omega_0$  запишем решение уравнения:

$$f = \prod_{n=k}^{\infty} \left( C_n^{\cos\left(\frac{an\pi}{l} \cdot \log_k \tau\right)} \cdot D_n^{\sin\left(\frac{an\pi}{l} \cdot \log_k \tau\right)} \right)^{\sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot \log_k x\right)},$$

где

$$C_n = \exp \left( \int_1^{k^l} \frac{\varphi(\log_k^x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot \log_k^x\right)}{x} \cdot dx \right)^{\frac{2}{l}},$$

$$D_n = \exp \left( \int_1^{k^l} \frac{\psi(\log_k^x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l} \cdot \log_k^x\right)}{x} \cdot dx \right)^{\frac{2}{an\pi}}.$$

**Пример 4.** Пусть в  $\omega_1$  в терминах этого пространства записано уравнение:

$$\underline{\Delta f} = -\underline{1} \odot \underline{m} \quad (m = \text{const } k = e)$$

Решение уравнения  $\Delta f = -m$  в  $\omega_0$  известно ( $\Delta$  – лапласиан). В силу внутренней идентичности пространств это решение будет и решением аналогичного уравнения “внутри”  $\omega_1$ . Отобразим уравнение и решение в  $\omega_0$ .

Логарифм квазилапласиана будет записан так:

$$\begin{aligned} \ln \underline{\Delta} &= x \cdot \frac{\partial \ln}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \ln}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \ln}{\partial z} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial x^2} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial y^2} + \\ &+ z^2 \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial z^2} = \frac{\partial \ln}{\partial r} + r \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial r^2} \right) + z \cdot \left( \frac{\partial \ln}{\partial z} + z \cdot \frac{\partial^2 \ln}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

$$|\underline{u}(\underline{r}, \underline{z})| < \infty, \quad \underline{u}(\underline{r}, \underline{0}) = \underline{u}(\underline{r}, \underline{l}) = \underline{u}(\underline{R}, \underline{z}) = \underline{0}, \quad \underline{0} \leq \underline{r} < \underline{R},$$

$$\underline{0} < \underline{z} < \underline{l}, \quad (\underline{R}, \underline{l}) = \text{const}$$

Тогда

$$\ln \underline{\Delta f} = -m$$

$$\text{и} \quad f(r, z) = \exp \left\{ \frac{m \cdot (R^2 - \ln^2 r)}{4} + m \cdot R^2 \times \right.$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 \cdot J_1^2(\mu_n) \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n \cdot l}{R}\right)} \right) \cdot \left[ \left( \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n \cdot l}{R}\right) - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n \cdot \ln z}{R}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n \cdot l}{R}\right) \times \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n \cdot \ln z}{R}\right) \right] \cdot J_0\left(\frac{\mu_n \cdot \ln z}{R}\right) \Bigg\}.$$

**Пример 5.** Пусть в  $\omega_1$  дано уравнение  $f^V = \sin x$ . Найдём  $\omega$ -образы этого уравнения и его решение в  $\omega_0$ :

$$f^V = \sin x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus f^* = k^{\ln^4 k \cdot x} \cdot \left( y' + 15xy'' + 25x^2 y''' + \right. \\ \left. + 10x^3 y^{IV} + x^4 y^V \right) = k^{\sin \log_k x} \Rightarrow \ln^4 k \cdot x \times \\ \times \left( y' + 15xy'' + 25x^2 y''' + 10x^3 y^{IV} + x^4 y^V \right) = \sin \log_k x, \quad (1)$$

где  $y = \ln f$ , (1) – это образ в  $\omega_0$  исходного уравнения. Так как решение  $f^V = \sin x$  известно:  $f = -\cos x$ , то  $f^* = k^{-\cos \log_k x}$  – это решение уравнения (1), в чём легко можно убедиться.

Итак, зная уравнение и его решение в  $\omega_1$ , нетрудно сразу же записать в  $\omega_0$  и уравнение и решение.

Аналогично решаются дифференциальные уравнения, отображенные из смежных пространств  $\omega_0$ . Записав дифференциальное уравнение в обычных терминах, решив его и полагая, что и дифференциальное уравнение и его решения заданы в смежном пространстве  $\omega_0$ , отобразим их в  $\omega_0$ . Получим более сложное уравнение и его решение. Повторяя многократно отображения в различных пространствах, можно найти весьма сложные уравнения и их решения. При этом не следует забывать об использовании другой функции связи, а не только  $k^x$ .

Запишем  $\omega$ -образы производных при отображении из смежного пространства в общеизвестное  $\omega_0$ :

$$f' \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus f'_{k_2} = \frac{f}{x} p \sqrt{\frac{x \cdot f'}{f}},$$

где  $p = \log_{k_1} k_2$ ;  $k_1, k_2$  – соответственно параметры функции связи  $k^x$  пространств  $\omega_0$  и  $\omega_0'$ ;

$$f'' \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus f''_{k_2} = \left( \frac{(f^p)''}{p^2 \cdot x^{2(p-1)}} - \frac{(p-1) \cdot (f^p)'}{p^2 \cdot x^{2p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ и т.д.}$$

**Примечание.** Образы производных порядка более второго имеют достаточно сложную структуру.

**Пример 6.** Пусть в  $\omega_0'$  задано уравнение  $f' = x^2$ . Одно из его решений  $f = \frac{x^3}{3}$ . Найдем  $\omega$ -образы уравнения и его решения в  $\omega_0$ :

$$f' = x^2 \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \left( \frac{(f^p)'}{p \cdot x^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}} = (x^{2p})^{\frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f^p)' = p \cdot x^{p-1} \cdot x^{2p} = p \cdot x^{3p-1} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \left( \frac{x^{3p}}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow f^p = \frac{x^{3p}}{3}, \text{ где } f - \omega_0\text{-образ } \frac{x^3}{3} \text{ или}$$

образ решения исходного уравнения. Тогда  $(f^p)' = p \cdot x^{3p-1}$ , что удовлетворяет (1).

**Пример 7.** Пусть дано уравнение  $f' = \cos x$  в пространстве  $\omega_0'$ . Найти  $\omega$ -образы этого уравнения и его решения в пространстве  $\omega_0$ .

**Решение.** Одним из решений уравнения  $f' = \cos x$  в  $\omega_0'$  будет  $f = \sin x$ . Тогда

$$f' = \cos x \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus f'_{k_1} = \sqrt[p]{\cos x^p}, \quad (1)$$

где  $p = \log_{k_1} k_2$ ;  $k_1, k_2$  – соответственно параметры функции связи  $k^x$

пространств  $\omega_0$  и  $\omega_0'$ ;  $f'_{k_1} = \frac{f}{x} \cdot \left( x \cdot \frac{f'_{k_2}}{f} \right)^{\frac{1}{p}}$ ;  $f'_{k_2} \equiv f'$ . Образ решения  $f = \sin x \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus f_{k_1} = \sqrt[p]{\sin x^p}$ .

Итак, в  $\omega_0$  уравнение  $f' = \cos x$  выглядит так:

$$\frac{f}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot f'}{f} \right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\cos x^p} \Rightarrow f' \cdot f^{p-1} = x^{p-1} \cdot \cos x^p, \quad (2)$$

а его решение  $f = \sqrt[p]{\sin x^p}$  (3). Фактически, решив простейшее уравнение  $y' = \cos x$ , мы нашли решение более сложного по структуре уравнения  $f' \cdot f^{p-1} = x^{p-1} \cdot \cos x^p$ .

**Проверка:**  $f = (\sin x^p)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow f' = x^{p-1} \cdot \cos x^p \times$   
 $\times (\sin x^p)^{\frac{1}{p}-1}, f^{p-1} = (\sin x^p)^{1-\frac{1}{p}},$  а  $f' \cdot f^{p-1} = x^{p-1} \cdot \cos x^p$ , т.е.  
 решение  $f = \sqrt[p]{\sin x^p}$  действительно верно.

**Примечание.** Уравнение  $f' \cdot f^{p-1} = x^{p-1} \cdot \cos x^p$ , разумеется, просто решить заменой  $x^p = t$ , т.е.

$$\int f^{p-1} \cdot df = \int x^{p-1} \cdot \cos x^p \cdot dx \Rightarrow f = \sqrt[p]{p \cdot \int x^{p-1} \cdot \cos x^p \cdot dx}$$

и  $f = \sqrt[p]{\int \cos t \cdot dt} = \sqrt[p]{\sin x^p}$ .



В общем случае, если  $f'_{k1} = \frac{f}{x} \left( \frac{x \cdot f'}{f} \right)^{\frac{1}{p}} = \varphi(x^m)$ , то

$$f = \sqrt[p]{\int \varphi^p(t) \cdot dt}.$$

Например,  $f' = \operatorname{ctg} x$ . Решение этого уравнения  $f = \ln \sin x$ . Тогда

$$f'_{k1} = \sqrt[p]{\operatorname{ctg} x^p}, \text{ т.е. } \left( \frac{f}{x} \right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot (f')^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{\operatorname{ctg} x^p}, \text{ а решением этого}$$

уравнения будет  $f = \sqrt[p]{\ln \sin x^p} \quad \left( f = \sqrt[p]{\int \left( \sqrt[p]{\operatorname{ctg} t} \right)^p dt}, \text{ где } \varphi(t) = \sqrt[p]{\operatorname{ctg} t} \right)$ . Можно вновь отобразить уравнение (2):

$$\frac{f}{x} \left( x \cdot \frac{f'}{f} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot f^{p-1} = \sqrt[p]{x^{p \cdot (p-1)} \cdot \cos x^{p^2}}.$$

Его решение будет формироваться из решения уравнения (3):

$$f = \sqrt[p]{\sqrt[p]{\sin x^{p^2}}} = \left( \sin x^{p^2} \right)^{\frac{1}{p^2}} \text{ и т.д.}$$

**Пример 8.** Пусть в  $\omega_1$  задано уравнение  $f'' + f' = x$  найти его  $\omega$ -образ и его решение в пространстве  $\omega_0$ .

**Решение.** В  $\omega_1$  пространстве исходное уравнение имеет решение

$$f = \frac{x^2}{2} - x.$$

Отобразим уравнение и решение из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ :

$$f'' + f' = x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\ln k \cdot x \cdot (y' + x \cdot y'')} \cdot k^{x \cdot y'} = k^{\log_k x} \quad (y = \ln f),$$

$$\text{т.е. } (\ln k + 1) \cdot xy' + \ln k \cdot x^2 \cdot y'' = \log_k x,$$

а решение его в  $\omega_0$  будет:

$$\frac{x^2}{2} - x \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus f^* = k^{\frac{1}{2} \log_k^2 x - \log_k x} =$$

$$= k^{\log_k x \cdot \left( \frac{1}{2} \log_k x - 1 \right)} = x^{\log_k \sqrt{x} - 1}.$$

Все приведенные примеры иллюстрируют решение только *обратной* задачи: по готовому уравнению и его решению мы конструируем инфинитный спектр аналогичных по  $\omega$ -фактору, но более сложных по структуре уравнений и их решений. Не останавливаясь на доказательстве заметим, что *существует  $\omega$ -пространство, где любое данное дифференциальное уравнение может быть решено аналитически, а также имеется алгоритм поиска такого  $\omega$ -пространства.*

Естественно, что не всегда решение может быть представлено конечным числом известных функций... В связи с тем, что в данной книге исследуется только одна функция связи  $(k^x)$  и нет глубины проработки вопроса о дифференциальных уравнениях, решение *прямой* задачи (решение *любого* заданного дифференциального уравнения, применяя аппарат  $\omega$ -отображений), в рамках вышеизложенного материала, практически, невозможно.

В заключение, заметим, что  $\omega$ -образы производных могут быть использованы не только для решения дифференциальных уравнений, но и для более широкого круга других задач. Примерами простейшего их применения являются рационализация нахождения локального экстремума или повышение точности вычисления очень больших чисел.

Пусть имеется плотность распределения вероятности логнормальной случайной величины:

$$p(x) = \prod_{i=1}^k \chi_i = \prod_{i=1}^k \left( \frac{\log e}{\sigma_i x_i \cdot \sqrt{2\pi}} \right) \cdot \exp \left( \frac{-\left( \log_{x_i} a_i \right)^2}{2 \cdot \sigma_i^2} \right),$$

$$x_i > 0, -\infty < a_i < \infty, \sigma_i^2 > 0, (x_i \leq 0 \Rightarrow p(x) = 0).$$

Для нахождения экстремума  $p(x)$  воспользуемся условием

$$p'(x) = 0:$$

$$\begin{aligned}
{}^1p(x) &= \bigcup_1^k \left\{ {}^1P_{x_i}(x) \right\} = 0, & {}^1P_{x_i}(x) &= \sum_{i=1}^k {}^1(\chi_i)_{x_i} = \\
&= \sum_{i=1}^k \left( \left( \frac{\log e}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \right)_{x_i} + \left( \exp \left( \frac{-(\log x_i - a_i)^2}{2 \cdot \sigma_i^2} \right) \right)_{x_i} - (x_i)_{x_i} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^k \left( -(\log x_i - a_i) \cdot \frac{\log e}{\sigma_i^2} - 1 \right) = 0 \Rightarrow x_i = \exp \left( \frac{a_i - \frac{\sigma_i^2}{\log e}}{\log e} \right),
\end{aligned}$$

$i \in (1, \dots, k)$  и т.д.

Такое решение проще общеизвестного. Ключ к точному вычислению больших чисел кроется в формуле:

$$\exp(f - x + \ln f' + \Delta x) \approx \exp f \left( \ln(e^x + e^{\Delta x}) \right) - \exp f(x),$$

которую нетрудно получить из производной

$${}^0f = f - x + \ln f', \quad {}^0f = \lim_{\Delta x \rightarrow (-\infty)} \left[ \ln \left( e^{f \left( \ln(e^x + e^{\Delta x}) \right)} - e^f \right) - \Delta x \right].$$

Для больших  $\Delta x$ :

$${}^0f = f - x + \ln f' \approx \ln \left( e^{f \left( \ln(e^x + e^{\Delta x}) \right)} - e^f \right) - \Delta x.$$

Выбирая быстрорастущую функцию и задавая любые значения  $x$  и очень большие значения  $\Delta x$ , можно получить методику вычисления с большой точностью весьма больших чисел.

В приближенных вычислениях целесообразно использовать инвариантную относительно образа производной  ${}_i^p f$  формулу ( ${}_i^p f$  — образ в  $\omega_0$  производной, записанной в  $\omega_i$  — пространстве):

$$f\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \mathfrak{R}_{x_0}^{\delta x}\right) \approx \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \mathfrak{R}_{f(x_0)}^{i+1 \atop j} \mathfrak{R}_{\delta x}^p f(x_0) \quad (5.26)$$

**Примечание.** В разных ситуациях следует применять  $\omega$ -образы из разных пространств.

Приведём простейший пример:

$$\sin 20^\circ \approx \frac{1}{2} + \cos 30^\circ \cdot \frac{10\pi}{180^\circ} \approx 0,651$$

$$\sin 20^\circ \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{20}{30}\right)^{30\pi \cdot \text{ctg}\left(\frac{30^\circ}{180^\circ}\right)} \approx 0,346,$$

т.е. даже неприведенная к масштабу  $\omega_0$  производной  $f'$  даёт в данном случае результат, близкий к истинному (0,342), в отличие от применения обычной производной в формуле малых приращений ( $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ ), где результат в 1,9 раза превышает истинный. (Хотя в других случаях формула может оказаться не пригодной).

Заметим также, что при решении прикладных задач (в частности экономических, гидродинамических, химических и других, связанных с оптимизацией процессов и аппаратов той или иной технологии, часто целесообразно математическую модель представлять в виде  $\omega$ -образов дифференциальных уравнений и применять дополнительные условия экстремума, следующие из  $\omega$ -образов производной.

## §5.6. $\omega$ -образы численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений

Одним из наиболее важных практических приложений  $\omega$ -отображений является модернизация численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений. Такое приложение, в какой-то степени, нивелируется развитием компьютерной техники. Тем не менее, вопрос этот заслуживает внимания как, с точки зрения, экономии времени эксплуатации компьютера, так и в плоскости более глубокого понимания эффектов, возникающих при  $\omega$ -отображениях. В настоящей книге разбираются примеры самых простейших ситуаций. Наиболее интерес-

ным является вывод о предельном переходе смежных пространств  $\omega_0'$  в пространство более высокого ранга  $\omega_1$ . (Пространство  $\omega_1$  согласно теореме 3.15 — это асимптотика смежных пространств  $\omega_0'$ ). В результате, формируется представление о реальном пространстве как инфинитном спектре  $\omega$ -пространств аналогичной структуры, но в пределе преобразующихся в другой инфинитный спектр смежных  $\omega$ -пространств, стоящих на ступень выше в общей иерархии  $\omega$ -пространств. Такое представление подтверждается при решении конкретных практических задач. Наличие инфинитного спектра  $\omega$ -образов решений любой задачи свидетельствует о целесообразности классификации объектов (в том числе и пространств) по  $\omega$ -фактору, так как позволяет более глобально смотреть на общеизвестные объекты и процессы...

#### 5.6.1. $\omega$ -образ численного решения дифференциальных уравнения.

Как известно, в методе Эйлера  $i+1$  — значение функций  $(y_{i+1})$  находят по формуле.

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i, y_i) \quad (5.27)$$

Записав (5.27) в терминах  $\omega_1$ -пространства и затем отобразив полученное выражение в  $\omega_0$ , найдем:

$$y_{i+1} = y_i \cdot \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)^{x_i \cdot \frac{f(x_i, y_i)}{y_i}} \quad (5.28)$$

Действительно,  $'y = \log \left( \frac{y_{i+1}}{y_i} \right) / \log \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)$ , где  $'y = x_i \cdot (\ln y)'$ .

Тогда  $f(x_i, y_i) \approx \frac{y_i}{x_i} \cdot \log \left( \frac{y_{i+1}}{y_i} \right) / \log \left( \frac{x_{i+1}}{x_i} \right)$ . Откуда получим формулу (5.28).

Аналогично, в случае отображения из смежного пространства нетрудно установить (см. теорему 3.14):

$$y'_{k2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[p]{f^p \cdot \left( \sqrt[p]{x^p + (\Delta x)^p} \right)} - f^p(x)}{\Delta x},$$

$$y'_{k2} \rightarrow \frac{\sqrt[p]{y_{i+1}^p - y_i^p}}{\sqrt[p]{x_{i+1}^p - x_i^p}} = \sqrt[p]{\frac{y_{i+1}^p - y_i^p}{x_{i+1}^p - x_i^p}},$$

$$\left( f'_{k2} = \frac{f}{x} \cdot \sqrt[p]{\frac{f' \cdot x}{f}} \rightarrow \left( \frac{x \cdot f'_{k2}}{f} \right)^p = \frac{f' \cdot x}{f} \rightarrow \right.$$

$$\rightarrow \left. f' = \frac{f}{x} \cdot \left( \frac{x \cdot f'_{k2}}{f} \right)^p = \left( \frac{x}{f} \right)^{p-1} \cdot (f'_{k2})^p \right)$$

$$f(x_i, y_i) = y' = \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^{p-1} \cdot \frac{y_{i+1}^p - y_i^p}{x_{i+1}^p - x_i^p} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \frac{y_i}{x_i} \right)^{p-1} \cdot f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1}^p - y_i^p}{x_{i+1}^p - x_i^p}.$$

$$y_{i+1} = \sqrt[p]{\left( x_{i+1}^p - x_i^p \right) \cdot \left( \frac{y_i}{x_i} \right)^{p-1} \cdot f(x_i, y_i) + y_i^p} \quad (5.29)$$

**Пример.** В таблице представлены результаты решения уравнения  $y' = x \cdot \sqrt{y}$  для начальных условий  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $N = 5$ .

**Таблица 1.** Результаты численного решения уравнения  $y' = x \cdot \sqrt{y}$   
 $(x_0 = 1, y_0 = 1, h = 0.1, N = 5)$ .

$x$	Эйлер	S-Эйлер	P-Эйлер	Ист. знач.
1.1	1.1	1.1	1.1	1.10776
1.2	1.21537	1.21616	1.21576	1.23210
1.3	1.34766	1.35015	1.34888	1.37476
1.4	1.49858	1.50380	1.50114	1.53760
1.5	1.66996	1.67912	1.67444	1.72266

**Примечание.** S-Эйлер, P-Эйлер – модернизированный метод Эйлера, полученный отображением соответственно  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  и  $\omega_0' \rightarrow \omega_0$ .

Оценим ошибку вычислений. В общеизвестном методе Эйлера суммарная ошибка:

$\beta_0 = \varepsilon_0 = \frac{1}{2!} \cdot |f''(\xi)| \cdot h^2$ ,  $x_i < \xi < x_{i+1}$ ,  $\varepsilon_0$  – ошибка в методе Эйлера. В модернизированном методе Эйлера путем  $\omega$ -преобразований  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$  ошибка  $\varepsilon_1$  равна  $(\varepsilon_1, \beta_1)$  – образы в  $\omega_0$  суммарной ошибки метода Эйлера из  $\omega_1$ , не приведенной  $(\varepsilon_1)$  и приведенной  $(\beta_1)$  к масштабу  $\omega_0$ :

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{1}{2!} f''(\xi) \right) \frac{\ln^2 H}{2!} = C \frac{\ln^2 H}{2!} \quad (C = \text{const}),$$

$$\ln \varepsilon_1 \sim \ln^2 H \Rightarrow \varepsilon_1 \sim e^{\ln^2 H} = \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right)^{\ln \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right)},$$

$$\varepsilon_1 \sim \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right) \odot \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right) \Rightarrow \varepsilon_1 \sim H \odot H, \quad (5.30)$$

где  $H - \omega$ -образ шага  $h (h \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus H)$ .

$$\text{Итак, } \varepsilon_1 \sim H \odot H = H^{\rightarrow 2}, \text{ т.е. } \beta_1 = \ln \varepsilon_1 \sim \ln^2 \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right).$$

$$\text{Откуда } \beta_1 \sim \frac{h^2}{x_i^2} \quad \left( \ln \left( 1 + \frac{h}{x_i} \right) \approx \frac{h}{x_i} \right).$$

В результате:

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} \sim h^2 : \frac{h^2}{x_i^2} = x_i^2, \quad (5.31)$$

т.е. при  $|x_i| > 1$  модернизированный метод Эйлера эффективней, чем обычный. При увеличении  $|x_i|$  и  $|x_i| > 1$  точность вычислений быстро растет. Нетрудно показать, что в методах Рунге-Кутты и Милна отношение  $\frac{\beta_0}{\beta_1} \sim x_i^4$ , т.е. при росте  $x_i$  достаточно быстро можно получить, фактически, истинное значение.

Дадим дополнительные пояснения. Если  $f(x)$  — функция перехода между  $\omega$ -пространствами, то абсолютная погрешность  $\Delta_{\text{общ}}$  пропорциональна  $\left( f^{-1}(h+x_i) - f^{-1}(x_i) \right)^2$ .

Действительно, пусть  $h = x_{i+1} - x_i$ , а

$$h \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus H.$$

$$\text{Тогда } H = f \left( f^{-1}(x_{i+1}) - f^{-1}(x_i) \right) = f \left( f^{-1}(h+x_i) - f^{-1}(x_i) \right),$$

Неприведенная абсолютная погрешность

$$\varepsilon \sim f \left( f^{-1}(H) \cdot f^{-1}(H) \right),$$



а абсолютная погрешность  $\omega$ -образа метода Эйлера в  $\omega_0$ , приведенная к масштабу  $\omega_0$  равна:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{общ}} &\sim f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(H) \cdot f^{-1}(H)\right)\right) = \left(f^{-1}(H)\right)^2 = \\ &= \left(f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(h+x_i) - f^{-1}(x_i)\right)\right)\right)^2 = \left(f^{-1}(h+x_i) - f^{-1}(x_i)\right)^2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если повысить ранг  $\omega$ -пространства и положить  $f(x) = e^x$ , то

$$h \setminus \omega_2 \rightarrow \omega_0 \setminus H_s = x_{i+1} \Delta x_i = (h+x_i)^{1/\ln x_i}.$$

Тогда  $\Delta_{H_s} = \left(\ln \ln (h+x_i)^{1/\ln x_i}\right)^2 = \ln^2(\log_{x_i}(h+x_i)).$

Обозначив  $\Delta_{\text{общ}} \equiv \Delta_s$ , а  $\Delta_{H_s} \equiv \Delta_{2s}$ , получим

$$\begin{aligned}\Delta_s &\sim \ln^2\left(1 + \frac{h}{x_i}\right) \approx \left(\frac{h}{x_i}\right)^2, & \Delta_{2s} &\sim \ln^2 \frac{\ln(h+x_i)}{\ln x_i} = \\ &= \ln^2 \frac{\left(\left(\frac{h}{x_i} + 1\right) \cdot x_i\right)}{\ln x_i} \approx \ln^2 \left(\frac{\frac{h}{x_i} + \ln x_i}{\ln x_i}\right) = \ln^2 \left(\frac{h}{x_i \cdot \ln x_i} + 1\right) \approx \\ &\approx \left(\frac{h}{x_i \cdot \ln x_i}\right)^2, \text{ т.е. погрешность в общеизвестном методе Эйлера } \Delta_0 \sim h^2, \text{ а в}\end{aligned}$$

модернизированных методах:  $\Delta_s \sim \left(\frac{h}{x_i}\right)^2$ ,  $\Delta_{2s} \sim \left(\frac{h}{x_i \cdot \ln x_i}\right)^2$  и т.д.

Взяв отношение  $\frac{\Delta_0}{\Delta_s}$  и  $\frac{\Delta_0}{\Delta_{2s}}$ , найдем:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_s} \sim \frac{h^2}{h^2 / x_i^2} = x_i^2,$$

$$a \quad \frac{\Delta_0}{\Delta_{2s}} \sim \frac{h^2}{h^2 / (x_i^2 \cdot \ln^2 x_i)} = (x_i \cdot \ln x_i)^2,$$

т.е. модернизированные методы точнее обычного метода Эйлера соответственно в  $x_i^2$  раз и в  $(x_i \cdot \ln x_i)^2$  раз.

В заключение найдем значение аргумента  $x_i$ , когда модернизированный метод Эйлера ( $\omega$ -образ  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ ) по точности адекватен методу Рунге-Кутты:

$$\frac{h^4}{h^2 / x_i^2} = 1 \Rightarrow x_i = \frac{1}{h}.$$

### 5.6.2. $\omega$ -образ решения интегрального уравнения

$\omega$ -модернизация численных методов решения интегральных уравнений (и.у.) приводит также к снижению погрешности этих методов. Кроме того, используя,  $\omega$ -образы и.у., получим и.у. более сложной структуры с готовым решением.

Рассмотрим простейшее одномерное и.у. Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) = \lambda \cdot \int_a^b R(x, s) \cdot \varphi(s) \cdot ds + f(x), \quad (5.32)$$

где  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $\lambda$  – числовой параметр,  $R(x, s)$  – ядро,

непрерывное на  $a \leq x, s \leq b$ ,  $\int_a^b \int_a^b |R(x, s)|^2 \cdot dx ds < \infty$ .

Отобразим (5.32) из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned}
{}_k\varphi(\log_k x) &= k^\lambda \odot \exp\left(\int_a^b \frac{\log_k R(x, s) \cdot \varphi(s) \cdot ds}{s}\right) \cdot k^{f(\log_k x)} \Rightarrow \\
\Rightarrow \varphi(\log_k(x)) &= \lambda \cdot \left(\frac{1}{\ln k} \cdot \left(\int_a^b \frac{\log_k R(x, s) \cdot \varphi(s) \cdot ds}{s}\right) + f(\log_k x)\right),
\end{aligned}$$

где  $f(\log_k x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $a \leq x$ ,  $s \leq b$ ,

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\int_a^b \log_k \left(\exp\left(\int_a^b \frac{\log_k |R(x, s)|^2}{s} ds\right)\right) \frac{dx}{x}\right) < \infty, \\
&\int_a^b \log_k \left(\exp\left(\int_a^b \frac{\log_k |R(x, s)|^2}{s} ds\right)\right) \frac{dx}{x} < \infty \\
&\text{или } \int_a^b \left(\int_a^b \frac{\log_k |R(x, s)|^2}{s} ds\right) \cdot \frac{dx}{x} < \infty.
\end{aligned}$$

Приближённое решение (5.32) записывается так:

$$\varphi_n^{\sim}(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n c_j \cdot R(x, x_j). \quad (5.33)$$

Отобразим  $\varphi_n^{\sim}(x)$  из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n^{\sim}(x) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\varphi_n^{\sim}(\log_k x)}, \\
&R(x, x_j) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{R(\log_k x, \log_k x_j)}, \\
&\varphi_n^{\sim}(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n c_j \cdot R(x, x_j) \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k^{\varphi_n^{\sim}(\log_k x)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^{f(\log_k x)} \cdot k^\lambda \odot \prod_{j=1}^n k^{c_j} \odot k^{R(\log_k x, \log_k x_j)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow k^{f(\log_k x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n c_j \cdot R(\log_k x, \log_k x_j)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varphi_n^{\sim}(\log_k x) = f(\log_k x) + \lambda \cdot \sum_{j=1}^n c_j \cdot R(\log_k x, \log_k x_j) \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Не останавливаясь на примерах решения интегральных уравнений путём  $\omega$ -отображений, заметим, что положительный эффект достигается только при соответствующем отображении того или иного метода решения и.у. в целом. Для этого достаточно взять из литературы [42] любой такой метод и реализовать  $\omega$ -отображение.

### §5.7 Пример $\omega$ -образа вектора смежного пространства

Затронутый в главе 4 вопрос о квазивекторном анализе может получить идентифицированное элементарное развитие, если ввести иное понятие квазивектора. Например, пусть в смежном пространстве  $\omega_0'$  задан вектор  $\bar{a}$ . Отобразим его в пространстве  $\omega_0$  в два акта:

- отобразим  $\bar{a}$  в  $\omega_1$ ;
- отобразим полученный  $\omega$ -образ  $\bar{a}$  из  $\omega_1$  в  $\omega_0$ .

Получим:

$$\bar{a} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_1 \setminus \log_{k_2} \bar{a} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus k_1^{\log k_2} \bar{a} = \bar{a}_*,$$

где  $\bar{a}_*$  – образ вектора  $\bar{a}$  в пространстве  $\omega_0$ , если он задан первоначально в смежном пространстве  $\omega_0'$ ;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты в функции связи  $k^x$  между пространствами  $\omega_1 \rightarrow \omega_0(k_1)$  и  $\omega_1 \rightarrow \omega_0'(k_2)$ .

Из равенства  $\overline{a_*} = k_1^{\log_k 2} \overline{a} = \left( \frac{1}{k_1^{\ln k_2}} \right)^{\ln \overline{a}} = (\overline{a})^p$ , где

$$p = \log_k k_1, \text{ следует, что } \overline{a_*} = \overline{a}^p, \text{ а } \frac{\ln \overline{a_*}}{\ln \overline{a}} = p_* \text{ и } \frac{\overline{a_*}}{\overline{a}} = \frac{k_1}{k_2},$$

$$\overline{a_*} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a}, \text{ т.е. } \overline{a_*} \text{ и } \overline{a} \text{ — коллинеарные векторы и } |\overline{a_*}| = \lambda \cdot |\overline{a}|.$$

Вполне естественно, что в силу свойства смежности пространств  $\omega_0$  и  $\omega_0'$  любой вектор  $\overline{a} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \overline{e}_i$  имеет образ  $\overline{a_*} = \sum_{i=1}^n a_{*i} \cdot \overline{e}_i$ , отличающийся от  $\overline{a}$  только по модулю, т.е.  $\overline{a_*}$  — *обыкновенный* вектор, ориентированный в пространстве  $\omega_0$  так же, как и вектор  $\overline{a}$  в пространстве  $\omega_0'$ .

Однако, в данном случае, встретился и новый математический объект  $\ln \overline{a}$ , который является специфичным *квазивектором* или *квазивектором второго типа*. Обозначим  $\overline{\overline{a_k}} = \log_k \overline{a}$ . Пусть вектор  $\overline{a}$  задан в пространстве  $\omega_{-1}$ . Отобразим его в пространство  $\omega_0$ , полагая, что коэффициент перехода  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$  равен  $k$ :

$$\overline{a} \setminus \omega_{-1} \rightarrow \omega_0 \setminus \log_k \overline{a} = \overline{\overline{a_k}}.$$

Аналогично,

$$\overline{a} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \log_{k_1} \overline{a},$$

$$\overline{a} \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_1 \setminus \log_{k_2} \overline{a}.$$

В случае, если проекции вектора  $\overline{a}$  являются функциями, то, зная формулы отображения функций и интегро-дифференциальных объектов в  $\omega$ -пространствах, нетрудно сконструировать *квазивекторный анализ второго типа*. Заметим, что главным элементом этого анализа является объект  $\overline{\overline{a_k}} = \log_k \overline{a}$  (или просто  $\overline{\overline{a}}$ ).

## §5.8. Некоторые дополнительные факты о числах новой природы

В главе 2 сделана попытка расширить поле действительных чисел. В частности, представлено множество  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел, которые можно получить из операции “ $\circ$ ” (проще сложения) и рефлексивным отображением множества  $\mathbf{R}$  действительных чисел. Показано, что поле  $\Delta$ -чисел получается также  $\omega$ -отображением множества  $\mathbf{R}_-$  отрицательных чисел:

$$\mathbf{R}_- \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \mathbf{R}_\Delta.$$

Установлено, что  $\mathbf{R}_\Delta = \{\log(-a)\}$ , где  $a \in \mathbf{R}_+$ .

Результатом же подобного отображения  $\Delta$ -чисел будет множество  $\mathbf{R}_\Delta \setminus \Delta$ -чисел:

$$\mathbf{R}_\Delta \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \mathbf{R}_\Delta.$$

Процесс таких отображений можно продолжить до бесконечности. Если обозначить  $\mathbf{R}_{\Delta i}$  – множество чисел, сформированное путём  $i$ -го  $\omega$ -отображения  $(\mathbf{R}_{\Delta i-1} \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus \mathbf{R}_{\Delta i})$ , то можно записать, что мы имеем дело с инфинитным спектром  $\{\mathbf{R}_{\Delta i}\}$  инфинитных множеств *чисел новой природы*. Например,  $\mathbf{R}_\Delta \equiv \mathbf{R}_{\Delta 0}$ ,  $\mathbf{R}_\Delta \equiv \mathbf{R}_{\Delta -1}$  и т.д.. Кроме того, не следует забывать, что каждое из множеств  $\mathbf{R}_{\Delta i} \setminus \Delta i$ -чисел порождается введением новой алгебраической операции. Так, множество  $\mathbf{R}_\Delta$   $\Delta$ -чисел возникает при рассмотрении операции “ $\circ$ ”, т.е. первой операции проще сложения. Аналогично, множество  $\mathbf{R}_\Delta$  (или  $\mathbf{R}_{\Delta -1}$ ) – это результат следующей операции проще сложения (действия проще операции “ $\circ$ ”). Так конструируется инфинитный спектр  $\{\mathbf{R}_{\Delta i}\}$ , где  $i$  – номер действия проще сложения, если считать, что общеизвестное сложение имеет значение индекса  $i=1$ . На рис. 1 изображена числовая прямая, дополненная  $\Delta$ -числами. Естественно, что эта прямая может иметь *бесконечное продолжение влево* (но не вправо!).

Нетрудно установить также другие классы чисел новой природы. Например, в § 5.4 настоящей главы было показано, что  $\omega$ -образом мнимой единицы является число  $j = \frac{\Delta 0}{2} (i \setminus \omega_0 \rightarrow \omega_1 \setminus j)$ , на основе которого конструируется  $\omega$ -образ теории функций комплексной переменной

( $\omega$ -ТФКП). Кроме того, существуют “единичные” элементы:  $r = \sqrt{\Delta 1}$ ,  $t = \sqrt{-(\Delta 1)}$ . Все комбинации из действительных и комплексных чисел (различных множеств  $\mathbf{R}_{\Delta i}$ ) являются числами новой природы.

Без доказательства<sup>47</sup> выпишем некоторые равенства ( $(a, b, c) \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}_+$ ; в ряде случаев  $(a, b, c) \in \mathbf{Z}$ ):

$$(\Delta 1) \cdot i = i \cdot (\Delta 1) = \Delta i \quad (i = \sqrt{-1}); \quad (\Delta a) \cdot i = \Delta(a \cdot i); \quad (\Delta i) \cdot a = i \cdot a$$

$$(a \in \mathbf{N}_2); \quad i \cdot (\Delta a) = \Delta(i \cdot a); \quad (\Delta i) \cdot a = \Delta(i \cdot a) \quad (a \in \mathbf{N}_1); \quad i \cdot \Delta i =$$

$$= (\Delta i)^2 = -\Delta 1 \Rightarrow \frac{\Delta 1}{i} = \Delta i; \quad \Delta 1 = (\Delta i) \cdot i; \quad \frac{\Delta i}{i} = \Delta 1; \quad \frac{\Delta i}{i} = \Delta 1;$$

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta i}{i}; \quad a^{\Delta 0} = -1; \quad a^{\Delta 0} = \Delta 1; \quad \ln(\Delta i) = \frac{\Delta 0}{2} + \Delta 0 = j + \Delta 0;$$

$$\ln(\Delta a) = \ln a + \Delta 0 = r \cdot a; \quad r \cdot a - r \cdot b = \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{\Delta a}{\Delta b}; \quad \ln \Delta 1 = \Delta 0$$

$$(\ln(-1) = \Delta 0); \quad (\text{при } a \in \mathbf{R}_+ \quad \ln(:a) = -\ln a + 0 \in \mathbf{R}_-;$$

$$\ln(-a) = \ln a + \Delta 0 = \Delta \ln a \in \mathbf{R}_{\Delta}; \quad \ln \Delta a = \ln a + \Delta 0 = \Delta \ln a \in \mathbf{R}_{\Delta} \text{ и}$$

$$\text{т.д.}); \quad \ln(-(\sqrt{-\Delta 1})) = \Delta 0 + \frac{\Delta 0}{2} + \frac{\Delta 0}{2}; \quad (\text{при } a, b \in \mathbf{R},$$

$$a + \Delta b = \Delta(a + b) \in \mathbf{R}_{\Delta}; \quad a + \Delta b = \Delta(a + b) \in \mathbf{R}_{\Delta};$$

$$a + \Delta(\Delta b) = \Delta(\Delta(a + b)); \quad \Delta a + \Delta b = a + b; \quad \Delta a + \Delta b = \Delta(\Delta(a + b));$$

$$\Delta a + \Delta(\Delta b) = \Delta(a + b) \in \mathbf{R}_{\Delta}; \quad \mathbf{R} + \mathbf{R} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_{\Delta} + \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\Delta},$$

$$\mathbf{R}_{\Delta} + \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\Delta} \text{ и т.д.}); \quad \Delta \ln a = \ln \Delta a \quad (\Delta \ln a = \ln(-a));$$

$$(a^{-b} = : (a^b) \in \mathbf{R}_f; \quad a^{\Delta b} = -(a^b) \in \mathbf{R}_-; \quad a^{\Delta b} = \Delta(a^b) \in \mathbf{R}_{\Delta} \text{ и т.д.});$$

$$(\Delta a)^b = \Delta(a^b), \text{ но } (\Delta a)^b = a^b, \text{ если } a \in \mathbf{N}_1, b \in \mathbf{N}_2;$$

$$(-a)^{\Delta b} = \begin{cases} a^b, & b \in \mathbf{N}_1 \\ (-a)^{\Delta b} = a^{\Delta b}, & b \in \mathbf{N}_2 \end{cases} \quad \text{по аналогии с}$$

$$(-a)^{-b} = \begin{cases} -\left( : (a^b) \right), & b \in \mathbf{N}_1 \\ \left( : a^b \right), & b \in \mathbf{N}_2 \end{cases};$$

$$(-a)^{\Delta b} = (-1)^b \cdot a^b, \quad b \in \mathbf{N}_2, \quad (-a)^{\Delta b} = (-1)^b \cdot \Delta(a^b), \quad a^b \in \mathbf{N}_1; \quad i = k^j$$

$$(k \neq 0); \quad (\Delta a)^{-b} = \begin{cases} a^{-b}, & (a, b) \in \mathbf{N}_2 \\ a^{-b} \cdot \Delta 1, & a^b \in \mathbf{N}_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{т.д.};$$

$$(-a)^{\Delta b} = \begin{cases} (-1)^b \cdot a^b, & a^b \in \mathbf{N}_2 \\ (-1) \cdot \Delta(a^b), & a^b \in \mathbf{N}_1 \end{cases}; \quad \Delta a + j = a + \Delta j;$$

$$\Delta a \sqrt{\Delta b} = \sqrt[a]{b} \cdot \sqrt[a]{-\Delta 1} \text{ и другие.}$$

Примером чисел *новой* природы являются также числа типа  $\alpha \Delta \beta$  при  $\alpha \notin \mathbf{Z}$ . Изменение  $\alpha$  на  $\pm |\gamma|$  вызовет сдвиг точки, изображающей число на прямой соответственно вправо или влево (в зависимости от знака при  $|\gamma|$ , сохраняя смысл числа. *Возможно*, что в этом случае получаются числа  $\xi_k$  ( $\xi_k = \alpha_k \Delta \beta_k$ ), расположены около  $(-\infty)$ , но не являющиеся  $\Delta$ -числами (наблюдается некоторая родственность с гиперчислами, известными из нестандартного анализа)...

Не вызывает сомнений то, что всякая *новая* операция “рождает” числа *новой* природы. Используя комбинации новых чисел и различных операций, можно получить разнообразные новые вариации чисел подобно комплексным.

---

<sup>47</sup> Отдельные равенства уже встречались в тексте. Доказать предлагаемые равенства читатель может самостоятельно.



В заключение отметим, что в свете новых представлений о числах расширяется область допустимых значений функций. (Известные функции можно рассматривать на множествах *новых* чисел).

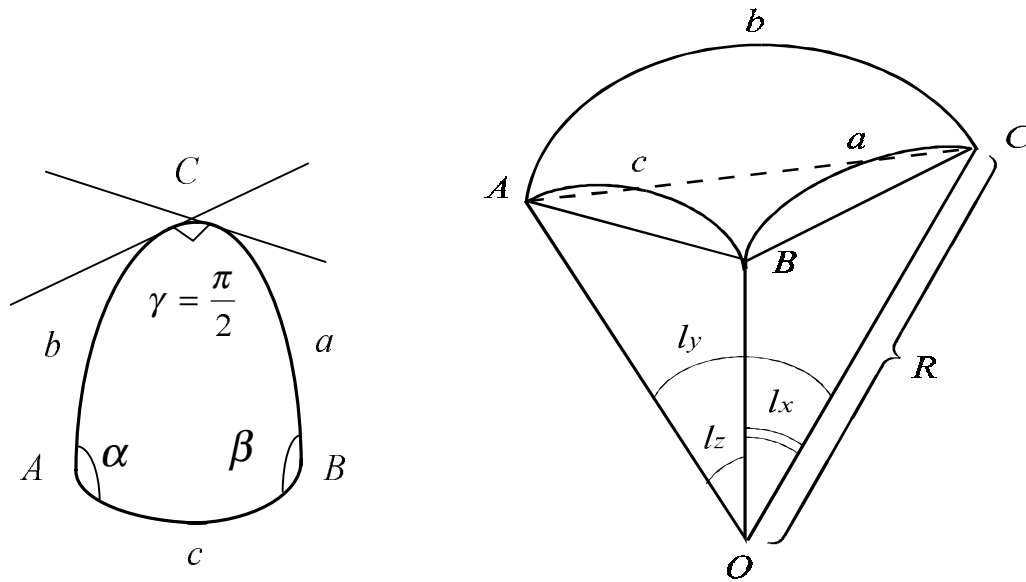


Рис. 7. Изображение прямоугольного сферического треугольника  $ABC$ .

### §5.9. Пример приложения $\omega$ -отображений в сферической тригонометрии

Пусть на сфере задан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Спроектируем его на плоскость, т.е. найдём плоское отображение этого треугольника или треугольник, на который опирается сферический треугольник (рис. 7).

Можно записать следующие соотношения:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin l_x}{\sin l_z}\right),$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin l_y}{\sin l_z}\right),$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}, \quad s_1 = R^2 \cdot \varepsilon,$$

где  $l_x, l_y, l_z$  – углы  $COB, COA, BOA$ ;  $\varepsilon$  – сферический эксцесс;

$s_1$  – площадь сферического треугольника  $ABC$ . Тогда  $k = \frac{s_1}{s_2}$ , где

$s_2$  – площадь плоского треугольника  $ABC$  ( $p = \frac{x+y+z}{2}$ ,

$$s_2 = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}; \quad a = l_x \cdot R, \quad b = l_y \cdot R, \quad c = l_z \cdot R;$$

$a, b, c$  – величины сторон сферического треугольника  $ABC$ , выраженные в радианах;  $x, y, z$  – величины сторон плоского треугольника  $ABC$ .

В связи с тем, что при отображении суммы двух переменных величин  $x$  и  $y$  ( $x+y$ ) из смежного пространства  $\omega_0'$  в  $\omega_0$  получим  $z = \sqrt[p]{x^p + y^p}$  ( $x+y \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \sqrt[p]{x^p + y^p}; x, y, z, p \in R_+$ ), попытаемся найти какие-то закономерности  $\omega$ -отображения  $z = x+y$  при трансформации этой суммы в треугольник, которому соответствует сферический прямоугольный треугольник. Здесь мы допускаем гипотезу об отображении треугольника со сторонами  $x, y, z$ , где  $z = \sqrt[p]{x^p + y^p}$ ,  $p \geq 2$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , на сферу или гиперсферу. Эта гипотеза основана на частном случае: при  $p = 2$   $\omega$ -отображение суммы двух переменных величин  $x$  и  $y$  трансформируется в  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , т.е., если  $x$  и  $y$  – стороны прямоугольного треугольника, то  $z$  – это его гипотенуза:  $x+y \setminus \omega_0' \rightarrow \omega_0 \setminus \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Исходя из этой гипотезы, в данном примере проведено изображение плоских треугольников со сторонами  $x, y, z$  ( $z = \sqrt[p]{x^p + y^p}$ ,  $p > 2$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ) на сферу при условии, что один угол соответствующего сферического треугольника всегда прямой. Исследование этой ситуации проведено численно при различных  $x, y, p$ .

Приведём некоторые *простейшие* выводы, которые можно сделать, анализируя полученные результаты:<sup>48</sup>

<sup>48</sup> Все приведенные в данном примере выводы (результаты) могут быть получены аналитическими методами.

а). При увеличении  $p$  ( $p \rightarrow \infty$ ) треугольник  $ABC$  стремится к равнобедренному, так как при  $p \rightarrow \infty$  множество смежных пространств  $\{\omega_0'\}$  превращается в  $\omega$ -пространство более высокого ранга  $\omega_1$ .

б). В случае равенства  $x$  и  $y$  независимо от их величины целый ряд характеристик сферического треугольника  $ABC$  становится *постоянным*. Например, *сферический эксцесс* (для  $p=3$   $\varepsilon \approx 0,508584$ ), отношение  $k = \frac{s_1}{s_2}$  (для  $p=3$   $k \approx 1,25975$ ),  $l_x + l_y$  (для  $p=3$ ,  $l_x + l_y = 0,9430$  радиан),  $l_x + l_y + l_z$  (для  $p=3$ ,  $l_x + l_y + l_z = 3,1045$  радиан) и т.д..

в). Замена  $x$  и  $y$  на  $mx$  и  $my$  ( $m = const$ ,  $m \in \mathbf{R}_+$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ) приводит к соответствующему изменению радиуса сферы, т.е. радиус становится равным  $mR$  (например, для  $p=3$  при  $x=10$ ,  $y=11$ ,  $R=11,569_8$ ; при  $x=100$ ,  $y=110$ ,  $R=115,69_8$ ; при  $x=1000$ ,  $y=1100$ ,  $R=1156,9_8$ ).

г). Существуют четкие зависимости всех характеристик сферического треугольника  $ABC$  от величины  $p$ ...

... Можно привести и другие выводы, представляющие интерес. Однако, все расчёты в данном примере весьма несложные и их с успехом может провести самостоятельно читатель и получить новые результаты, изыскав закономерности в связях между характеристиками сферических и плоских треугольников.

В заключение, заметим, что как *норма* вектора  $x$   $\left( \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$ ,

так и *спектральный радиус*  $|x| = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x^p\|^p}$  в  $\mathbf{X}$ -банаховой алгебре над

$\mathbf{C}$ , являющийся *полунормой* (или *преднормой*), если он *равномерно непрерывен* на  $\mathbf{X}$  (это условие равносильно коммутативности факторалгебры по радикалу), связаны с  $\omega$ -отображениями в смежных пространствах и предельным переходом при  $p \rightarrow \infty$  множества смежных пространств  $\{\omega_0'\}$  в пространство более высокого ранга  $\omega_1$  (причем, этот переход реализуется *равномерно непрерывно*).

Отметим также некоторые факты, которые могут быть использованы при решении практических задач:

1. Все физические законы имеют инфинитное множество  $\omega$ -образов, которые являются самостоятельными законами.

Например, известны поля температур, напряженности и потенциала электрического поля, скорости течения жидкости (газа) и т.д. между двумя параллельными пластинами ( $f_1 = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y$ ,  $f_2 = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y$ ), если известны соответствующие граничные условия. Пологая, что пластины расположены в  $\omega_0'$ , отобразим их в пространство  $\omega_0$ . Получим конусы  $\left( f_1^* = \sqrt{a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot y^2}, f_2^* = \sqrt{a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot y^2} \right)$ . Нетрудно записать  $\omega$ -образы полей физических величин, известных в пространстве между параллельными пластинами. Полученные  $\omega$ -образы будут описывать квазиполя между двумя коническими поверхностями.

2. Для каждого процесса существует такое  $\omega$ -пространство, после отображения из которого в  $\omega_0$  математическая модель процесса достаточно близка к теоретическому описанию.

Это связано с тем, что на целевую функцию (функцию отклика) влияет множество факторов. При  $\omega$ -отображениях можно достичь ситуации, когда основные факторы будут “супердоминирующими”, а другие – инфинитезимальными, т.е. усилить приближение теории к практике.

3. Существует инфинитное множество математических аппаратов, идентифицированных общеизвестным. Это множество определяет инфинитность математических описаний любого объекта.

Например, можно подобрать такой  $\omega$ -образ метода либмана, который значительно улучшает изначальный.

### §5.10. Проблематика приложения $\omega$ -отображений

В связи с разнородностью материала главы 5 и, как указывалось, дискуссионностью излагаемых вопросов вся глава 5 в целом имеет проблематичный характер. Тем не менее, сфокусируем внимание на наиболее важных моментах.

1. Необходимо собрать, систематизировать и объяснить встречающиеся в теории  $\omega$ -отображений парадоксы, неувязки, кажущиеся ошибки.

Например, парадокс  $(a \cdot b)^{\Delta c} \neq a^{\Delta c} \cdot b^{\Delta c}$ , при  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

$$\left( (2 \cdot 3)^{\Delta 2} = 6^{\Delta 2} = -6^2 = -36, \quad 2^{\Delta 2} \cdot 3^{\Delta 2} = (-2^2) \cdot (-3^2) = 36 \right) \quad \text{не-}$$

трудно объяснить из парадокса приведенного в §2.3 (“Примечание 10”).

$$\lg(a \cdot b)^{\Delta c} \neq (\lg a + \lg b) \cdot (\Delta c) = \lg a \cdot (\Delta c) + \lg b \cdot (\Delta c),$$

$$(a^* + b^*) \cdot (\Delta c^*) \neq a^* \cdot (\Delta c^*) + b^* \cdot (\Delta c^*).$$

2. Классифицировать и описать особые операции и числа новой природы, подобно представленным в данной главе.

3. Сформировать теорию функций  $j$  — переменной.

4. Применить теорию  $\omega$ -отображений при решении различных практических задач.

5. Решить *прямую* задачу в п.5.5., т.е. разработать алгоритм нахождения  $\omega$ -пространства, где любое дифференциальное уравнение решается уже известными приёмами.

6. Исследовать применение  $\omega$ -отображений не только в сферической тригонометрии, но и в тригонометрии, основанной на однополостном гиперboloиде или другой поверхности. Попытаться доказать великую теорему Ферма.

7. Изучить ограничения, накладываемые на дифференциальные уравнения и их системы, которые можно решать модернизированными численными методами с помощью  $\omega$ -отображений.

8. Найти  $\omega$ -образы различных методов поиска оптимума (экстремумов) функций нескольких переменных.

9. На основе анализа теории  $\omega$ -отображений попытаться создать новую концепцию структуры пространственно-временного континуума. Объяснить и обосновать инфинитный спектр пространств и его связь с инфинитным спектром материальных объектов. Разумеется, как указывалось, глубокое понимание природы и структуры пространственно-временных категорий возможно только через призму *общей теории объектов*. Однако уже на данном этапе попытка формирования концепции строения реального физического пространства вполне разумна и допустима. При этом, кстати, не следует отказываться от концепции Лейбница-Эйнштейна, так как именно эта концепция базируется на связи абстрактного и материального. Необходимо развить и дополнить её с позиции представления об  $\omega$ -отображениях. Например, гипотетические рассуждения можно проводить по следующей логической схеме. Установлено существование инфинитного спектра идентичных по структуре  $\omega$ -пространств. Этот факт подтверждается наличием в общеизвестном пространстве инфинитного

спектра  $\omega$ -образов любого объекта при условии, что этот объект расположен в другом пространстве. Сами по себе эти *пространства приобретают реальность лишь при условии нахождения в них объектов*, а различие между ними обнаруживаются только при переходе объекта (или объектов) из одного пространства в другое, так как при этом происходит  $\omega$ -трансформация объекта (или объектов). В результате физическое пространство можно представить в виде “многослойного” вложения бесчисленного множества *абсолютно однородных* по структуре пространств. В результате возможных синтеза и диссоциации  $\omega$ -пространств появляются бесчисленные множества материальных объектов всевозможных форм и свойств. Это связано с наличием  $\omega$ -образов различного уровня, полученных при  $\omega$ -отображениях с использованием инфинитного множества функций связи. Естественно, что энергия тоже является объектом и с ней происходит при  $\omega$ -переходах та же трансформация, что и с любым абстрактным или реальным объектом. При формировании концепции пространственно-временного континуума необходимо помнить, как указывалось выше, что нет ни начального, ни конечного  $\omega$ -пространства, а также *пространственно-временную реальность следует увязывать только с наличием в ней материальных объектов*. Причём *глобальное гиперпространство* любого ранга (так как существует инфинитный спектр гиперпространств ! ) как “конгломерат” локальных пространств – это тоже объект, подверженный всем свойствам  $\omega$ -отображений и этот процесс бесконечный.

Заметим, что вопрос о природе и структуре пространства, т.е. вопрос об окружающей нас действительности, об объектах, в какой-то степени, может быть прояснен аппаратом  $\omega$ -отображений. Однако, всё же *истина объекта раскрывается только при условии бесконечного процесса исследования, проводимого в момент времени, равный нулю...*

В заключение приведём слова С.Вивекананда: “Невежество наше из-за того, что мы *стремимся проводить различия по видам, признакам, месту...* Если два предмета совершенно одинаковы, то их различают по месту в пространстве... В случае же, когда объекты перемещены... различие их перестаёт быть возможным... Спасительное знание есть знание различий, *одновременно охватывающее все объекты в их многообразии...* Это знание охватывает собой всю природу во всех её состояниях: и грубых, и тонких. При этом знании последовательность восприятия исчезает, всё познаётся одновременно и сразу”.

Можно, конечно, соглашаться или не соглашаться с этим мнением, однако не учитывать его нельзя как в вопросах понимания объектно-пространственно-временной структуры окружающего нас мира, так и при

создании искусственного интеллекта, путь к которому идёт через *общую теорию объектов*.

## Заключение

Известные математические средства *описания* физических объектов громоздки, не рациональны и, как правило, не обеспечивают аналитичности решения практических задач. Распространённые методы аппроксимации при численном решении дифференциальных и интегральных уравнений позволяют с определённым приближением судить о конечном результате, но не удовлетворяют желания познать в полной мере физический объект. Путь обновления математических аппаратов их совершенствования, вообще говоря, – не лучший способ модернизации такого *описания*.

В последнее время в литературе просматриваются попытки изыскания нового фундаментального подхода к изучению окружающего нас мира. Это не коренная ломка и отрицание наработанного математикой и физикой материала, а стремление на базе достигнутого сконструировать новый метод исследования абстрактных и реальных объектов. Автор, разделяя эти попытки и воспринимая их как разумное решение глобальной проблемы моделирования действительности по аналогии с заложенными природой принципами её восприятия, присоединился к поиску универсального способа изучения объективной реальности. *Изложенный* в данной книге *материал* является лишь *небольшим примером* или частным случаем в разрабатываемой методике. К недостаткам этого примера можно отнести приверженность автора к *формальной системе*, традиционное формульное выражение заложенной идеи, использование старых общеизвестных понятий при решении новой проблемы. Тем не менее, автор надеется, что предложенные в книге материал позволит не только привлечь пытливого читателя к творчеству и новаторству, но и даст ему первичные навыки для понимания *общей теории объектов*, работа над которой далеко не завершена, а первые результаты предполагается опубликовать в виде небольшой научно-популярной брошюры в ближайшее время ...

## ОБОЗНАЧЕНИЯ.

$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  — соответственно, множества четных и нечётных чисел;

$\mathbf{R}, \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_f, \mathbf{R}_{ir}, \mathbf{R}_-$  — соответственно множества действительных положительных, дробных, иррациональных и отрицательных чисел;

$\Delta_0$  или  $\mathbf{R}_\Delta$  ( $\mathbf{R}_\Delta \equiv \Delta_0$ ) — множество  $\Delta$  — чисел, являющихся корнями уравнения  $x \circ a = (-\infty)$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ;

" $\circ$ " — операция нулевого порядка ( $n = 0$ ) проще сложения, а " $\Delta$ " — операция обратная " $\circ$ " (при этом сложение имеет порядок  $n = 1$ );  
 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \cup \Delta_0 \equiv \mathbf{R} \cup \mathbf{R}_\Delta$ ;

$\Delta a$  — обозначение  $\Delta$  — числа ( $a \in \mathbf{R}$ );

$\mathbf{R}_\Delta$  — множество  $\Delta$  — чисел, где  $\Delta$  — операция  $n = (-1)$ , т.е. *вторая* операция проще сложения и первая операция проще действия " $\circ$ ",  
 $\Delta a$  — обозначение  $\Delta$  — числа;

$\mathbf{R}_{\Delta i}$  — множества  $\Delta i$  — чисел, где  $\Delta i$  — операция  $(-i)$  — го порядка проще сложения (существуют и другое обозначение:  $\Delta_n$  — множество чисел, происхождение которых можно связать с операцией  $\Delta_n$   $(-n)$  — го порядка проще сложения, а  $\Delta_n \equiv \mathbf{R}_{\Delta n}$ );

$\omega_0$  — общеизвестное математическое пространство с доминирующей операцией сложения;

$\omega_i, \omega_j$  —  $i$ -е и  $j$  — пространства, абсолютно аналогичные  $\omega_0$  по внутреннему строению, а отличие от  $\omega_0$  проявляется лишь при отображении (переходе) объектов из  $\omega_i$  (или  $\omega_j$ ) в  $\omega_0$  (при этом происходит трансформация объектов);

$\backslash \omega_i \rightarrow \omega_j \backslash$  — операция  $\omega$ -отображения объекта из пространства  $\omega_i$  в пространство  $\omega_j$ ;

$f_c$  — функция связи между  $\omega$ -пространствами (например, в настоящей книге  $f_c = k^x$ ,  $k > 1$ ,  $k$  — коэффициент отображения);

$\odot$  — рефлексивное умножение (или рефлексивное умножение *первого* порядка),  $a \odot b = a^{\log b / \log k} = b \odot a = b^{\log a / \log k}$ ,  $\odot$  — образ в  $\omega_0$  операции умножения в  $\omega_1$ ;



$\Delta$  – рефлексивное деление (или рефлексивное деление *первого* порядка),  $a\Delta b = a^{\log b^{(k)}}$ ,  $(a, b) \in \mathbf{R}$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ ,  $\Delta$  – образ в  $\omega_0$  операции деления в  $\omega_1$  (рефлексивное деление);

$\Delta a$  – число, образованное операцией “ $\Delta$ ” ( $\Delta a = k\Delta a = k^{1/\log k a}$ ,  $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ );

$a^{\rightarrow b}$  – рефлексивное возведение в степень  $b$  числа  $a$  ( $a^{\rightarrow b} = \underbrace{a \odot a \odot a \odot \dots \odot a \odot a}_{(\log_k b) \in \mathbf{Z}}$ ,  $(a, b, k) > 0$ ,  $k \neq 1$ ),  $a^{\rightarrow b}$  –  $\omega$ -образ в  $\omega_0$  операции возведения в степень в  $\omega_1$ ;

$:a$  – обозначение дробного числа  $\frac{1}{a}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ , т.е.  $:a \equiv \frac{1}{a}$  (по аналогии с обозначением отрицательного числа  $-a = 0 - a$ );

$\underline{a}^i$  –  $\omega$  – образ в  $\omega_0$  числа  $a$ , отображенного из  $\omega_i$  пространства, т.е.

$a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{a}^i$ ;

$i \log_a b$  – образ в  $\omega_0$   $\log_a b$  из  $\omega_1$ , т.е.  $\log_a b \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus i \log_a b$ ;

$\odot_i$  – рефлексивное умножение  $i$ -го порядка, т.е. операция умножения для чисел, относящихся к  $i$ -му классу (по  $\omega$ -фактору),  $\bullet \setminus \omega_i \rightarrow \omega_0 \setminus \odot_i$  по аналогии с отображением  $\bullet \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \odot_1$ ;

$y = {}^x k$  ( $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ ) – сверхпоказательная степень, если  $\left. {}^x k = k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^k}}}} \right\} x$  ( $x = \text{var}$ ,  $k = \text{const}$ );

$y = \text{slog}_k x$  ( $k \in \mathbf{R}$ ,  $k \neq 1$ ) – сверхлогарифмическая (или суперлогарифмическая) функция, являющаяся обратной сверхпоказательной, т.е. из  $y = \text{slog}_k x$  следует  $x = {}^k y$ ;

$y = {}^x k \left( y = \underbrace{{}^k \cdot \cdot \cdot k}_x k, k \in \mathbf{Z}, k > 1 \right)$  – сверхпоказательная функция второго порядка;

$y = \text{sslog}_k x$  – сверхлогарифмическая (суперлогарифмическая) функция *второго* порядка, т.е. из  $y = \text{sslog}_k x$  следует  $x = \underbrace{{}^k \cdot \cdot \cdot k}_y$ , где  $k \in \mathbf{R}, k \neq 1$ ;

$y = {}^n \hat{\mathcal{J}} \bar{x}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) – суперкорень  $n$ -й степени (эта функция обратная сверхстепенной, т.е. из  $y = {}^n \hat{\mathcal{J}} \bar{x}$  следует  $x = {}^n y$ ;

${}_i^n \mathfrak{R}_a^b$  – результат алгебраической операции между операндами  $a$  и  $b$ , где  $n$  и  $i$  – соответственно порядки прямой и обратной операций (например,

${}_1^1 \mathfrak{R}_a^b = b + a, {}_2^1 \mathfrak{R}_a^b = b - a, {}_1^2 \mathfrak{R}_a^b = b \cdot a, {}_2^2 \mathfrak{R}_a^b = b / a$  и т.д.), причём,  ${}_i^n \mathfrak{R}_a^b = {}_i^n \mathfrak{R}_a(b)$ , а в  ${}_1^n \mathfrak{R}_a^b$   $k$  – число повторяющихся операций  $k \in \mathbf{Z}$ ;

$\mathcal{V}_n$  – нейтральный элемент операции  $(-n)$ -го порядка;

$a // b$  – деление  $a$  на  $b$  второй обратности ( $a // b = c \Rightarrow a = c \cdot b$ , т.е. умножение на  $b$  – справа в отличие от деления первой обратности  $\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = b \cdot c$ );

$\underline{f}^i$  – образ функции  $f$ , полученной при отображении в  $\omega_0$  из  $\omega_i$ , т.е.  $f \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{f}^i$  (по аналогии, с  $a \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \underline{a}^i$ );

$\boxtimes, \blacklozenge$  – соответственно рефлексивные умножения *второго* и *третьего* порядков;

$\oplus, \ominus, \boxtimes, \emptyset$  – соответственно  $\omega$ -образы в  $\omega_0$  операций  $+, -, \times, \div$  из  $\omega_{-1}$ ;

$$\sqsubset a = {}^2_k \sqsubset a = {}_k k^{(1/\log_k \log_k a)}$$

$$\diamond a = {}_k k^{k^{(1/\log_k \log_k \log_k a)}} \text{ и т.д.};$$

$\mathbf{R}_{\Delta}, \mathbf{R}_{\sqsubset}, \mathbf{R}_{\diamond}, \dots$  – соответственно множество чисел  $\Delta, \sqsubset, \diamond$  и т.д.;

$'f, 'f, \overset{0}{f}$  – образы в  $\omega_0$  производной из  $\omega_1$ , не приведенной к “масштабу”  $\omega_0 \left( 'f \right)$ , приведенной к “масштабу”  $\omega_0 \left( \overset{0}{f} \right)$  и производной из  $\omega_{-1} \left( \overset{0}{f} \right)$ ;

${}^p f$  – образ в  $\omega_0$  производной из  $\omega_2$ , не приведенный к “масштабу”  $\omega_0$ ;

$f'_{k2}$  – образ в  $\omega_i$  производной из  $\omega_i'$  ( $\omega_i = \omega_{i,k1}$ ;  $\omega_i' = \omega_{i,k2}$ )

$\overset{0}{(n)f}, \overset{0}{(n)f}, f_{k2}^{(n)}$  – образы в  $\omega_0$  производной  $n$ -го порядка соответственно из  $\omega_1, \omega_{-1}, \omega_0'$ .

$\delta x$  – обобщённое обозначение  $\omega$ -образа (приведенного и неприведенного к масштабу  $\omega_0$ ) дифференциала при отображении его в  $\omega_0$  из  $\omega_1$  и  $\omega_{-1}$ ;

$\delta_0 x$  – обозначение  $\omega$ -образа дифференциала (образ в  $\omega_0$  дифференциала из  $\omega_2$ , не приведенного к “масштабу”  $\omega_0$ ).

$\int_{k2}$  –  $\omega$ -образ интеграла, полученный отображением  $\backslash \omega_0 \rightarrow \omega_0' \backslash$ ;

$p_1 = \log_{k_1} k_2$  – пространственный параметр,  $k_1, k_2$  – коэффициенты связи пространств  $\omega_0$  и  $\omega_0'$  с пространством  $\omega_1$  (встречается также обозначение  $k$  вместо  $p_1$ , т.е.  $k \equiv p_1$ );

$\int (\delta x)^{f(x)}$  и  $\int (\delta x)^{\log_k f(x)}$  – суперинтегралы первого рода (соответственно не приведенный и приведенный к “масштабу” пространству  $\omega_0$ );

$\int f(x) + vx$  – образ интеграла, полученный отображением  $\omega_{-1} \rightarrow \omega_0$ , а  $vx$  – образ дифференциала, полученного тем же отображением;

$\bar{i}_*, \bar{j}_*, \bar{k}_*$  – квазиорты  $\left( \bar{i}_* = \log_k \bar{i}, \bar{j}_* = \log_k \bar{j}, \bar{k}_* = \log_k \bar{k} \right)$ ,  $\overline{e_{i_*}}$  – обобщённые квазиорты;

$\bar{a}_*$  – квазивектор  $\left( \log_k \bar{a}_* = (\log_k a_x) \cdot \bar{i}_* + (\log_k a_y) \cdot \bar{j}_* + (\log_k a_z) \cdot \bar{k}_* \right)$ ;

$\odot$  –  $\omega$ -образ скалярного произведения квазивекторов  $\left( \bar{a} \cdot \bar{b} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus A_* \odot B_* \right)$ ;

$\otimes$  –  $\omega$ -образ векторного произведения квазивекторов  $\left( \bar{a} \times \bar{b} \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus A_* \otimes B_* \right)$ ;

$\underline{f}, \underline{a}$  – обозначение функции  $f$  и числа  $a$  в пространстве  $\omega_1$ ;

$\blacklozenge$  – рефлексивное деление второй обратности  $(// \setminus \omega_1 \rightarrow \omega_0 \setminus \blacklozenge)$ ;

$y_{i+1}, y_i - i+1$  и  $i$ -е значения первообразной функции в методе Эйлера численного решения дифференциальных уравнений;

$f(x, y)$  – правая часть уравнения  $y' = f(x, y)$ ;

$\varepsilon_0, \beta_0$  – соответственно ошибка и суммарная ошибка в обычном методе Эйлера  $(\beta_0 = \varepsilon_0)$ ;

$\varepsilon_1, \beta_1$  – образы в  $\omega_0$  суммарной ошибки в методе Эйлера, неприведенной ( $\varepsilon_1$ ) и приведенной ( $\beta_1$ ) к масштабу  $\omega_0$ ;

S-Эйлер, Р-Эйлер – модернизированные методы Эйлера, полученные путем отображений в  $\omega_0$  из  $\omega_1$  и  $\omega_0'$  – пространств;

$h, H, H_s$  – шаг в обычном методе Эйлера ( $h$ ), в  $\omega$  – образе этого метода ( $H$ ) при отображении  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  и в  $\omega$  – образе этого метода при отображении  $\backslash \omega_2 \rightarrow \omega_0 \backslash$ ;

$\Delta_s, \Delta_{2s}$  –  $\omega$  – образы абсолютной погрешности метода Эйлера соответственно при отображениях  $\backslash \omega_1 \rightarrow \omega_0 \backslash$  и  $\backslash \omega_2 \rightarrow \omega_0 \backslash$ .

## Литература.

1. *Ван дер Варден Б.Л.*, Пробуждающаяся наука, пер. с голл., – М., 1959.
2. *Выгодский М.Я.*, Арифметика и алгебра в древнем мире, 2-е изд., – М., 1967.
3. *Дэвенпорт Г.*, Мультипликативная теория чисел, пер. с англ., М., 1971.
4. *Хасее Г.*, Лекции по теории чисел, пер. с нем., – М., 1953.
5. *Березкина Э.И.*, Математика древнего Китая, М., 1980.
6. *Кубилюс И.П.*, Вероятностные методы в теории чисел, 2-е изд., Вильнюс, 1962.
7. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.*, Краткий курс математического анализа, – М: Наука, 1967, 736 с.
8. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.*, Основы математического анализа, ч. 1, – М.: Наука, 1982, 616 с, ч.2, – М.: Наука, 1980, 447 с.
9. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.*, Краткий курс высшей математики, – М.: Наука, 1986, 575 с.
10. *Бронштейн И.Н, Семендяев К.А.*, Справочник по математике, – Лейпциг: "ТОЙНБНЕР", – М.: Наука, 1981, 718 с.
11. *Корн Г., Корн Т.*, Справочник по математике, пер с англ., – М.: Наука, 1977, 832 с.
12. *Курош А.Г.*, Курс высшей алгебры, – М.: Наука, 1971.
13. *Феферман С.*, Числовые системы. Основания алгебры и анализа, – М.: Наука, 1971.
14. *Холл М.*, Теория групп, пер. с англ., – М.: 1962.
15. *Robinson A.*, Non-standard analysis, Amst., 1966.
16. *Дэвис М.*, Прикладной нестандартный анализ, пер. с англ., М., 1980.
17. *Wissign H.*, Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes, В., 1962.
18. *Beran L.*, Gruuppy a Svazy. – Praha: SNTL, 1974.
19. *Siebenmann L.*, Foundational essays on topological manifolds, – Princeton, 1977.
20. *Papy G.*, Mathématique moderne (Arithmétique), – Paris: Didier, 1966.
21. *Тотгёнттер И.*, Дифференциальное вычисление съ собраниемъ примѣров для упражненій, пер. съ англ., Им-

шенецкий В.Г., С.–Петербург, Издание В.П. Печаткина, 1873, 580 с.

22. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа, т.т. I, II, – М.: Физматгиз, 1962-1963.
23. Дьедонне Ж., Основы современного анализа, М.: Мир, 1964.
24. Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, – М.: Наука, 1969.
25. Карташев А.П., Рождественский Б.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления, – М.: Наука, 1980, 288 с.
26. Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.т. 1,2, – М.: ИЛ, 1953.
27. Курош А.Г., Лекции по общей алгебре, – М.: Физматгиз, 1962.
28. Edwards R., Geometric topology, – B., 1975, v. 438.
29. Bryant J., "Trans. Amer. Math. Soc.", 1972, v. 170, p. 85-95.
30. Chapman T., "Topology", 1979, v. 20, p. 339-48.
31. Ancel F., Cannon J., "Ann. Math.", 1979, v. 109, p. 61-86.
32. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Математическая энциклопедия, – М.: Советская энциклопедия, т.т. 1-5, 1977–1985.
33. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Теория функций комплексной переменной, – М.: Наука, 1979, 319 с.
34. Александров П.С., Лекции по аналитической геометрии, – М., 1968.
35. Борисенко А.И., Тарапов И.Е., Векторный анализ и начала тензорного исчисления, – М.: Высшая школа, 1963, 262 с.
36. Einstein A., Grassmann M., "Z. Math. und Physik", 1914, Bd. 62, S. 225-61.
37. Мак-Коннел А.-Д., Введение в тензорный анализ, пер. с англ., – М., 1963.
38. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ. – М., 1961.
39. Схоутен Я.-А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., – М., 1965.
40. Йост Р., Общая теория квантованных полей, пер. с англ., М., 1967.
41. Васильев Ф.П., Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.

42. Бахвалов Н.С., Численные методы, – М.: Наука, 1975.
43. Физический энциклопедический словарь, – М.: Советская энциклопедия, 1984, 944 с.
44. Базаров И.П., Термодинамика, 3 изд., – М., 1983.
45. Батунер Л.М., Позин М.Е., Математические методы в химической технике, – Л.: Химия, 1968, 823 с.
46. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, – М.: Наука, 1973, 416 с.
47. Кузмичев В.Е., Законы и формулы физики, – К.: Наукова Думка, 1989, 862 с.
48. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, пер. с нем., – М.-Л.: ОГИЗ, т. II, 1945, 620 с.
49. H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de mécanique céleste, Paris, 1893.
50. Рубцов К.А., Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций // Кибернетика. – 1989. – № 3. – с. 111-112.
51. Рубцов К.А., Образ производной, полученной отображением операции // РЖ. Математика, "Математическая кибернетика". – 1990. – № 3. – с. 52.
52. Рубцов К.А., Гипотетическое рефлексивное дополнение множества действительных чисел // РЖ Математика, "Основания математики и математическая логика". – 1990. – № 6. – с. 5-6.
53. Рубцов К.А., Ингредиент  $R^0$  в  $R^3$  // Изв. ВУЗов, "Физика". – 1989. – № 3. – с. 128.
54. Рубцов К.А., Новые интегро-дифференциальные объекты. – Белгород: Инф. листок. – 1990. – № 307-90.
55. Рубцов К.А., Дополнение множества действительных чисел и его применение в кибернетике. – Белгород: Инф. листок – 1990. – № 306-90.
56. Rubtsov K., Integro-differential objects of a new nature // The Proceeding ICM 94, Zurich Section: 8, AMS-Classification number: 26 (short communications).
57. Рубцов К.А., Константинов И.С., Изыскание и разработка рефлексивного метода моделирования автоматических систем управления. – // Тезисы международной конференции "Ресурсо- и энергосберегающие технологии строительных материалов, изделий и конструкций", ч.4 "Механизация и автоматизация технологических комплексов...", с.92, Белгород, 1995.



## Содержание

<b>Предисловие</b>	3
<b>Введение</b>	5
<b>Глава 1. Пространства и операции</b>	
§1.1. Вводные замечания	7
§1.2. Концепция $\omega$ -отображений	8
§1.3. Соотношения на основе операций $\odot$ и $\Delta$	14
§1.4. $\omega$ -отображения чисел и функций	18
§1.5. Проблематика общего вопроса $\omega$ -отображений	27
<b>Глава 2. Расширение поля действительных чисел</b>	
§2.1. Общие замечания	28
§2.2. Инвариантные формулы	29
§2.3. Аксиоматика $\Delta$ -чисел	30
§2.4. Возведение в степень $\Delta$ -чисел	37
§2.5. Примеры доказательств в $\omega$ -символике	40
§2.6. Классификация операций и чисел по $\omega$ -фактору	68
§2.7. Проблематика чисел новой природы	71
<b>Глава 3. Новые интегро-дифференциальные объекты</b>	
§3.1. Основные принципы формирования $\omega$ -образов производной	73
§3.2. Образы $'f$ , $'_f$ , $^Pf$	78
§3.3. Образ $\overset{o}{f}$	92
§3.4. Смежные $\omega$ -пространства и образ $f'_{k2}$	97
§3.5. $\omega$ -образы интегралов	118
§3.6. $\omega$ -образы производных высших порядков	129
§3.7. $\omega$ -образы кратных интегралов	132
§3.8. Проблематика интегро-дифференциальных объектов новой природы	137
<b>Глава 4. Элементы квазивекторного анализа</b>	
§4.1. Общие положения	139
§4.2. Квазивекторы	141
§4.3. $\omega$ -образ теории поля	147
4.3.1. Градиент	148

4.3.2. Производная по направлению	150
4.3.3. Дивергенция	151
4.3.4. Ротор	152
4.3.5. Основные формулы, характеризующие квазиполе	155
4.3.6. $\omega$ -образы некоторых соотношений векторного анализа	160
§4.4. Примеры квазиполей	165
4.4.1. Поле тензора 2-го ранга	165
4.4.2. Квазилапласово поле	170
4.4.3. Основная теорема квазивекторного анализа	173
4.4.4. $\omega$ -образ электромагнитного поля	174
4.4.5. $\omega$ -образы скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля	178
4.4.6. $\omega$ -отображения термодинамических величин	182
§4.5. Концепция реальности квазиполя	184
§4.6. Проблематика квазивекторного анализа	189
<b>Глава 5. Разное (приложения)</b>	
§5.1. Общие положения	192
§5.2. О делении второй обратности	193
§5.3. Примеры $\omega$ -образов объектов математического анализа	196
§5.4. $\omega$ -образ мнимой единицы	206
§5.5. Примеры решения дифференциальных уравнений с применением аппарата $\omega$ -отображений	208
§5.6. $\omega$ -образы численных методов решений дифференциальных и интегральных уравнений	220
5.6.1. $\omega$ -образ численного решения дифференциального уравнения	221
5.6.2. $\omega$ -образ решения интегрального уравнения	226
§5.7. Пример $\omega$ -образа вектора смежного пространства	228
§5.8. Некоторые дополнительные факты о числах новой природы	230
§5.9. Пример приложения $\omega$ -отображений	

в сферической тригонометрии	233
§5.10. Проблематика приложения $\omega$ -ото-	
бражений	236
<b>Заключение</b>	239
<b>Обозначения</b>	240
<b>Литература</b>	246

Константин Анатольевич Рубцов

## НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Книга издается в авторской редакции

Технический редактор и корректор А. А. Кириченко

Рецензенты: канд. физ. - мат. наук М. Ф. Калягин (МВОКУ, Москва)  
канд. физ. - мат. наук В. Г. Сыщенко (БГПУ, Белгород)

Автор благодарит И. И. Морозова  
за оказание технической помощи при издании книги.

Сдано в набор  
Формат 60×84 1/16  
Тираж 500 экз. (50+450)  
Цена договорная.

Подписано к печати  
Уч. изд. л. 19  
Заказ

Белгород, Киев, 1996, 251 стр. с илл.

Издательства: БелГТАСМ, 308012, Белгород, Костюкова, 46;  
НПП ИНФОРМАВТОСИМ, Киев. обл., 256400, Б.Церковь,  
Гризадубова, 19/6 (252072, Киев, Фрунзе, 99/1)

Лицензия ЛР №020946 от 29.11.94 г.

Отпечатано в типографиях: АО “Белвитамины”, 308800, Белгород,  
ул. Рабочая, 14; Гортипография, 256400, Б.Церковь, бульвар Побе-  
ды 22-а.