

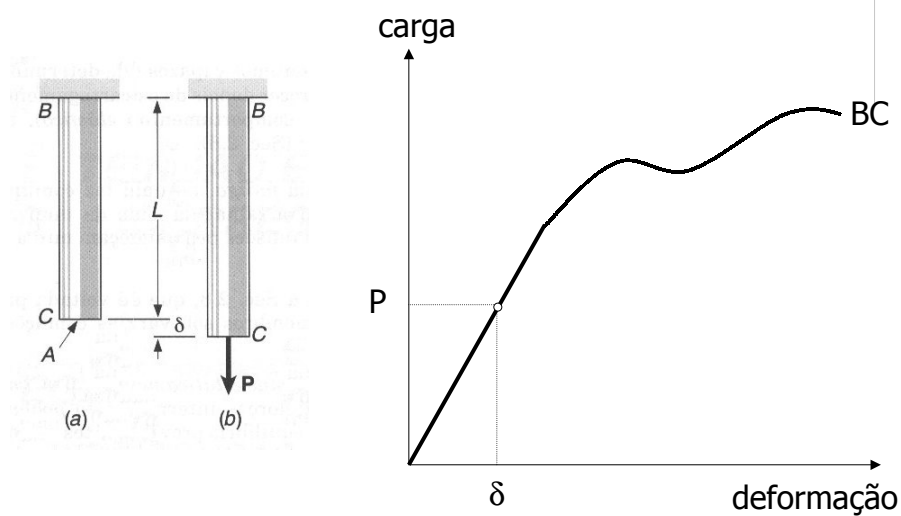
## Cap. 2 – Tensão e Deformação - Carregamento Axial

### 2.1 - Introdução

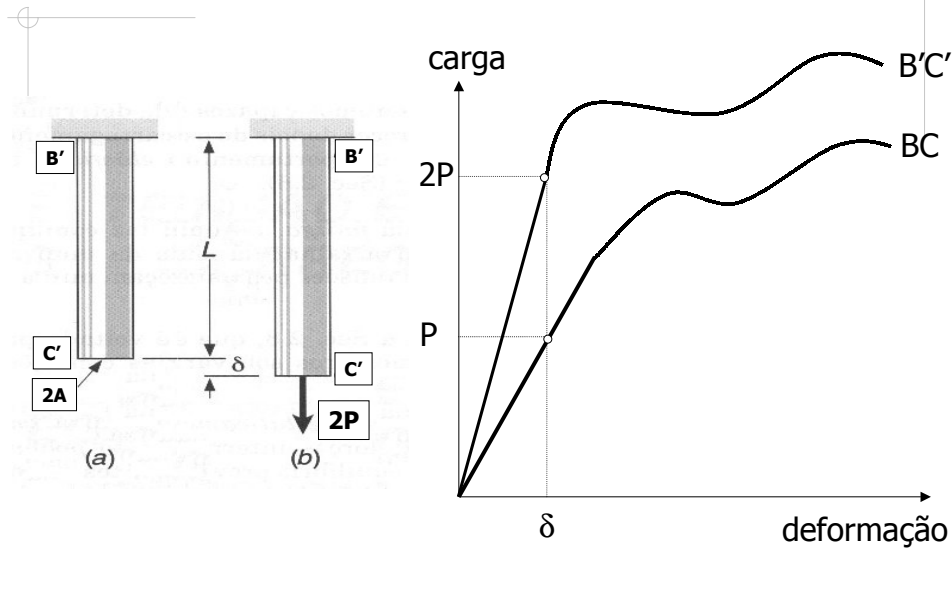
### 2.2 - Deformação Específica

Considere as barras à seguir, todas do mesmo material

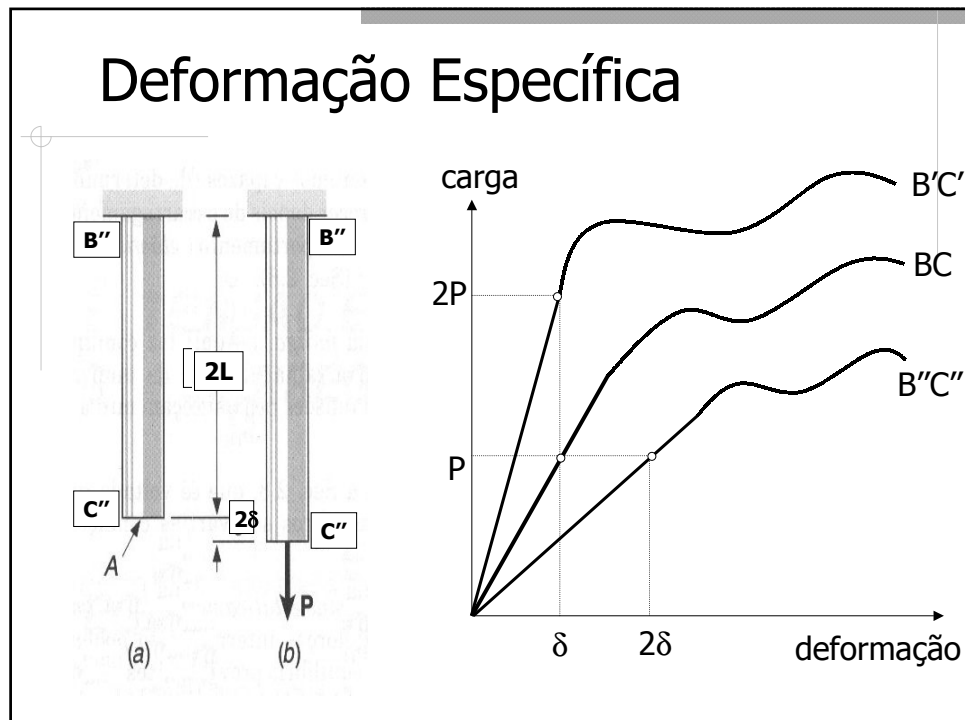
### Deformação Específica



## Deformação Específica

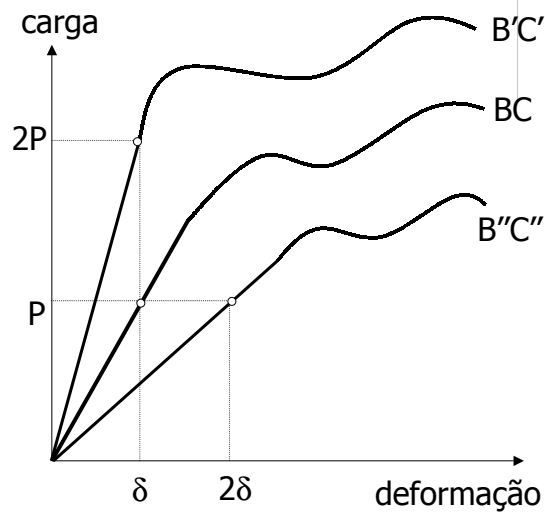


## Deformação Específica



## Deformação Específica

O diagrama carga-deformação não fornece informações úteis para prever as deformações de barras de mesmo material, porém de diferentes dimensões.



## Deformação Específica

Definindo Deformação Específica ( $\epsilon$ ) como a deformação por unidade de comprimento da barra:

$$\epsilon = \delta / L$$

Onde:

$\delta \rightarrow$  deformação da barra [m]

$L \rightarrow$  comprimento inicial da barra [m]

## Deformação Específica

Barra BC:

$$\sigma = P / A ; \varepsilon = \delta / L$$

Barra B'C':

$$\sigma = 2P / 2A = P / A$$

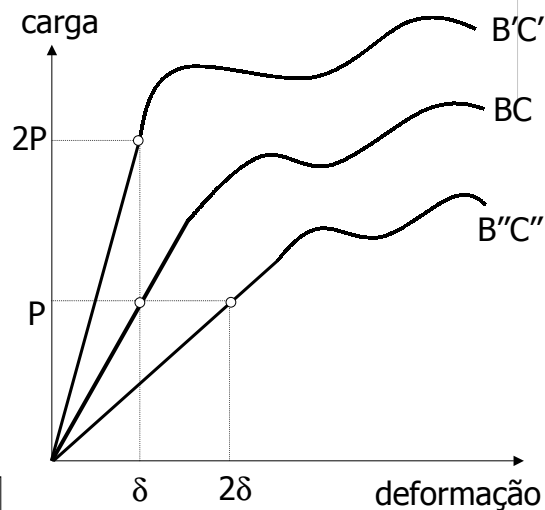
$$\varepsilon = \delta / L$$

Barra B''C'':

$$\sigma = 2P / 2A = P / A$$

$$\varepsilon = \delta / L$$

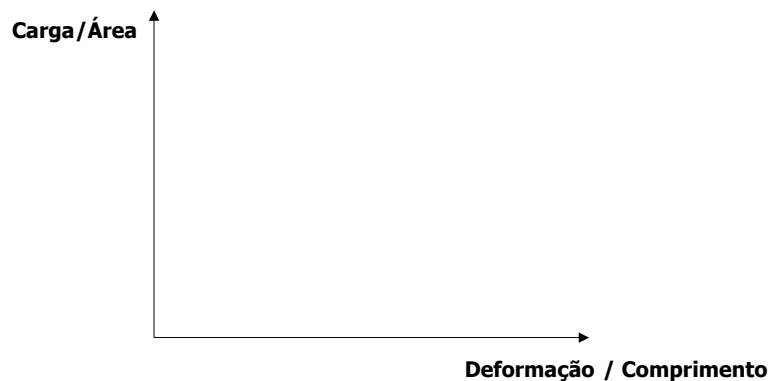
$$\sigma = P / A ; \varepsilon = \delta / L$$



## Deformação Específica

O diagrama tensão-deformação:

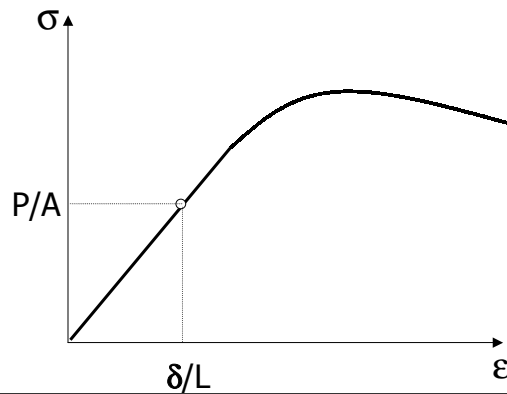
- ✓ não depende das dimensões da barra em estudo
- ✓ define características e propriedades do material
- ✓ Cada material possui um diagrama diferente



## Deformação Específica

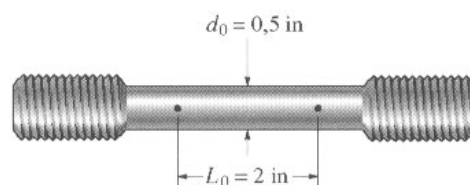
O diagrama tensão-deformação:

- ✓ não depende das dimensões da barra em estudo
- ✓ define características e propriedades do material
- ✓ Cada material possui um diagrama diferente



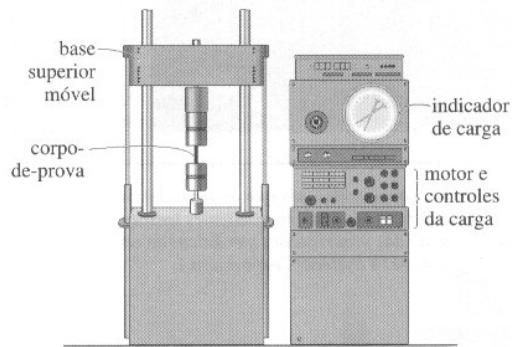
## 2.3 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$

- ◆ é obtido através de ensaios em corpos de prova padronizados



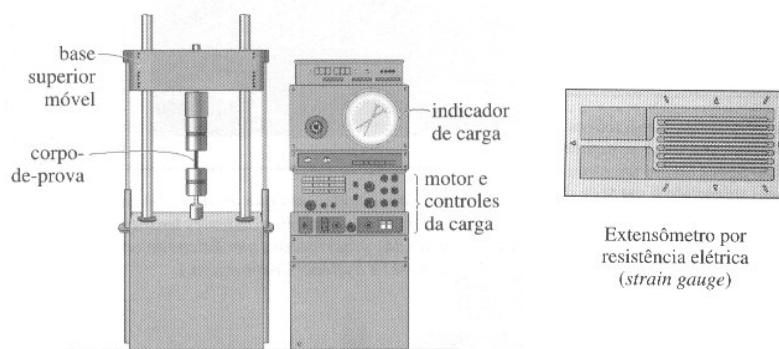
## 2.3 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$

- ◆ O corpo de prova é levado à máquina de teste, onde uma carga de tração é gradualmente aplicada



## 2.3 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$

- ◆ Para cada valor de carga é anotada a deformação



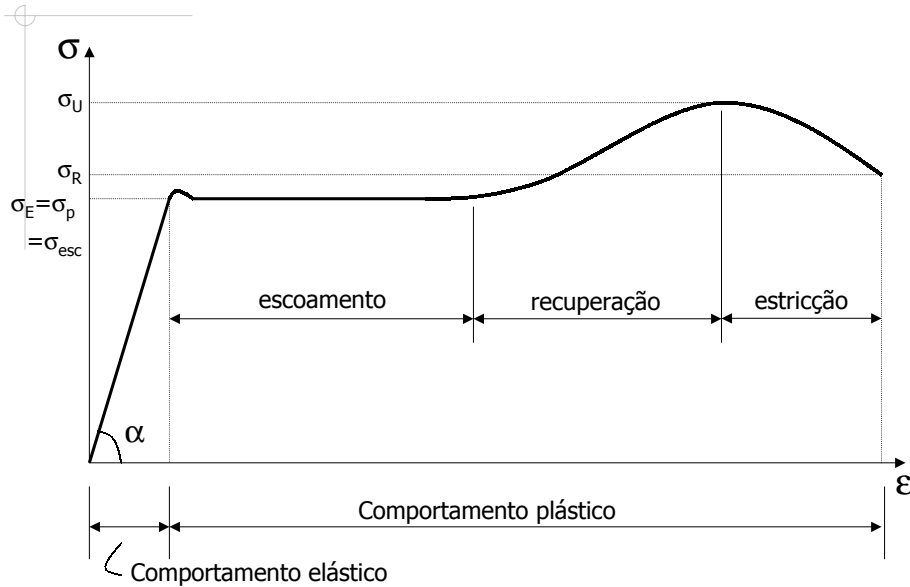
## 2.3 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$

- ◆ Para cada par de valores lidos,  $P$  e  $\delta$ , calcula-se a tensão e a deformação específica dividindo-se estes valores por  $A_0$  e  $L_0$ , respectivamente
- ◆ Obtem-se assim o diagrama  $\sigma \times \epsilon$  do material
- ◆ O diagrama tensãoxdeformação varia de material para material
- ◆ Para um mesmo material o diagrama varia com a temperatura e com a velocidade de aplicação da carga
- ◆ Pode-se dividir os materiais em dúcteis e frágeis, pelos aspectos de seus diagramas

## 2.3 – Diagrama $\sigma \times \epsilon$

- ◆ Materiais dúcteis: deformam-se muito antes de romper  
ex.: alumínio, aço estrutural
- ◆ Materiais frágeis: deformam-se pouco antes de romper  
ex.: ferro fundido, concreto, vidro

## Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ para material dúctil



## Diagrama $\sigma \times \varepsilon$ para material dúctil

- ◆  $\sigma_E \rightarrow$  limite de elasticidade
- ◆  $\sigma_p \rightarrow$  limite de proporcionalidade
- ◆  $\sigma_{esc} \rightarrow$  limite de escoamento
- ◆  $\sigma_U \rightarrow$  limite de resistência
- ◆  $\sigma_R \rightarrow$  limite de ruptura
- ◆  $E = \text{tg } \alpha \rightarrow$  módulo de elasticidade



## Observações:

- ◆ Materiais dúcteis submetidos à compressão apresentam o mesmo diagrama  $\sigma \times \varepsilon$ , exceto na estricção
- ◆ Para materiais frágeis a tensão de ruptura por compressão é muito maior do que a por tração
- ◆ A ruptura de materiais dúcteis ocorre em uma superfície inclinada de  $45^\circ$  em relação ao seu eixo
- ◆ A ruptura de materiais frágeis ocorre numa seção perpendicular ao eixo da barra

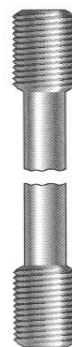
## Aspecto da Ruptura de Corpos de Prova



estricção

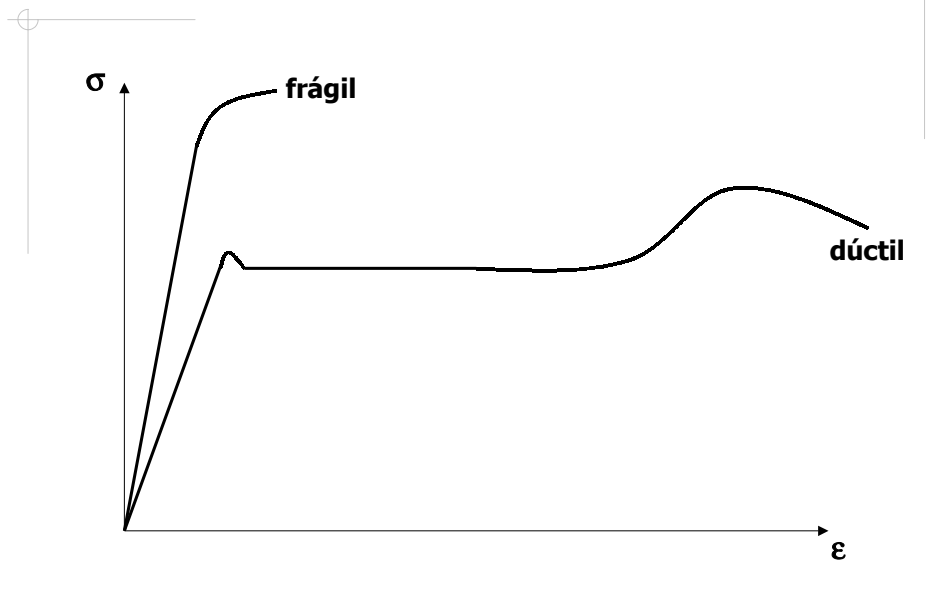


ruptura de  
material dúctil

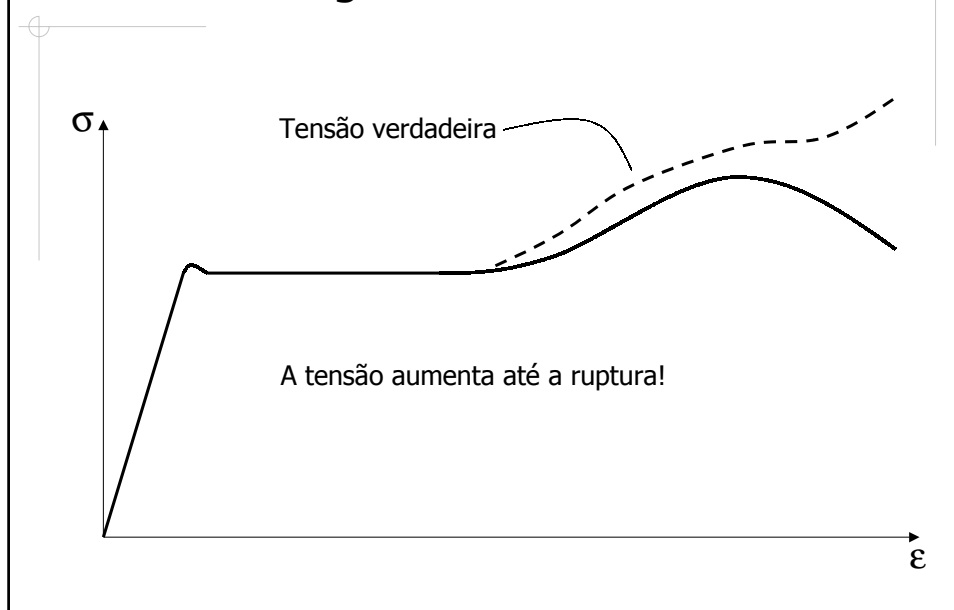


ruptura de  
material frágil

## Diagrama para materiais dúcteis e frágeis



## 2.4 - Diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ verdadeiro



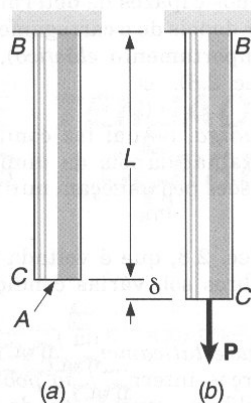
## 2.5 – Lei de Hooke; Módulo de Elasticidade

- ◆ A relação linear entre tensão e deformação no trecho inicial do diagrama é chamada Lei de Hooke (1635-1703):

$$\sigma = E \varepsilon$$

- ◆ O coeficiente  $E$  é chamado de Módulo de Elasticidade do material ou Módulo de Young (1773-1829)
- ◆ Quanto maior o módulo de elasticidade, maior é a sua "rigidez" ou capacidade de resistir a deformações

## 2.6 – Deformação de barras sujeitas a cargas axiais



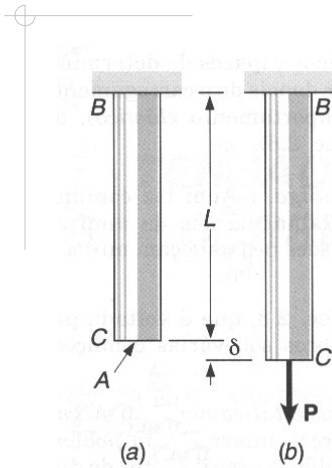
Barra homogênea, comprimento  $L$ , seção transversal  $A$ . Se a tensão não excede o limite de proporcionalidade:

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{P L}{A E}$$

## 2.6 – Deformação de barras sujeitas a cargas axiais



Equação válida para:

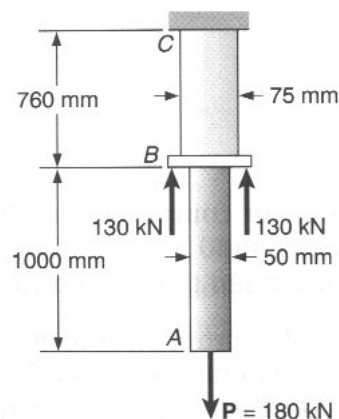
- ✓ barra homogênea
- ✓ seção transversal uniforme
- ✓ força aplicada nas extremidades da barra

Caso contrário, a barra deve ser dividida em trechos que satisfaçam as três condições anteriores.

A deformação total da barra será:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

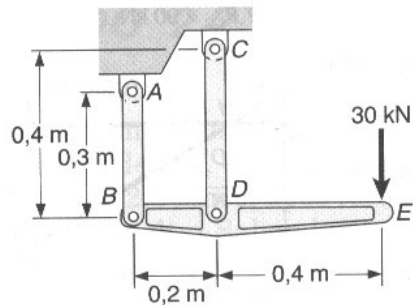
## Problema 2.9



- Barra cilíndrica AB de aço (E=200GPa)
- Barra cilíndrica BC de latão (E=105GPa)

Qual a deformação total da barra ABC e a deflexão do ponto B?

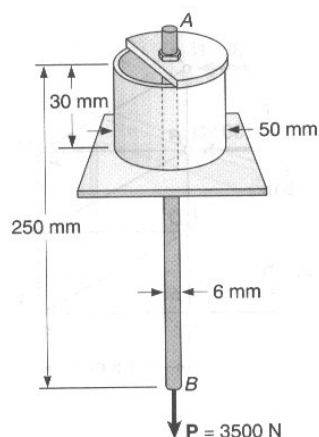
## Problema Resolvido 2.1



- Barra BDE é rígida
- haste AB é de alumínio ( $E=70\text{GPa}$ ) com seção transversal  $500\text{mm}^2$
- haste CD é de aço ( $E=200\text{GPa}$ ) com seção transversal  $600\text{mm}^2$

Determine o deslocamento dos pontos B, D e E.

## Problema 2.18



- Tubo com 3,2mm de espessura e  $E= 3,1 \text{ GPa}$
- Barra de aço  $E=200 \text{ GPa}$
- Placa circular rígida

Determine:

- O alongamento da barra AB;
- A deflexão do ponto B;
- A tensão na barra e no tubo.

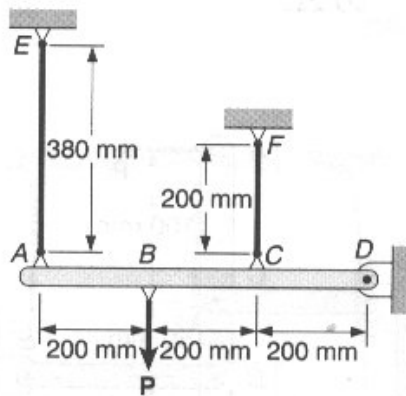
## Exercícios Propostos:

- ◆ 2.1 a 2.15
- ◆ 2.18 a 2.22
- ◆ 2.25 a 2.26

## 2.7 – Problemas Estaticamente Indeterminados

- ◆ Quando as equações de equilíbrio estático, aplicadas ao DCL do corpo, não são suficientes para determinar os esforços internos na estrutura, dizemos que o problema é estaticamente indeterminado.
- ◆ Para resolvê-lo devemos utilizar equações adicionais envolvendo deformações, considerando as condições geométricas do problema.

## Problema 2.45



A barra AD é rígida

Os fios são de aço  
( $E=200\text{GPa}$ ) com 1,6mm de  
diâmetro

Sabendo-se que os fios estão inicialmente esticados, determine a tração adicional em cada fio e a deflexão do ponto B.

## 2.7 – Problemas Estaticamente Indeterminados

### ◆ Método da Superposição

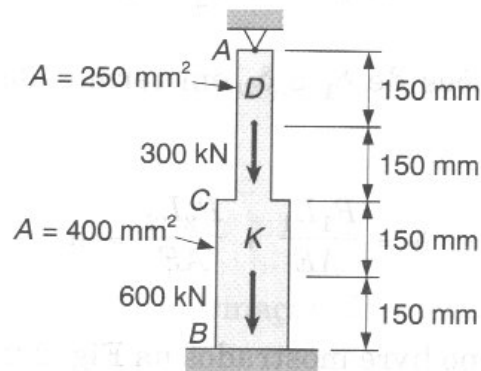
Quando uma estrutura é fixada por um número de apoios maior que o necessário para o seu equilíbrio ela é estaticamente indeterminada.

Chamamos um de seus apoios de superabundante, eliminamos-o e resolvemos o problema.

Em seguida resolvemos novamente o problema considerando apenas a reação superabundante.

A solução é obtida somando-se (superpondo-se) as deformações causadas pelas duas situações.

## Exemplo 2.4



Determine as reações dos apoios A e B após a aplicação do carregamento mostrado.

## 2.8 – Problemas Envolvendo Variação de Temperatura

- ◆ Em estruturas sujeitas a variações de temperatura durante a sua utilização, surgem tensões devidas a esta variação de temperatura.
- ◆ No cálculo destas tensões verificamos que o problema é estaticamente indeterminado.
- ◆ Sua resolução é feita pelo método da superposição, considerando agora as deformações devidas à variação de temperatura.



## 2.8 – Problemas Envolvendo Variação de Temperatura

◆ A deformação devido à variação de temperatura é dada por:

$$\delta_T = \alpha L (\Delta T)$$

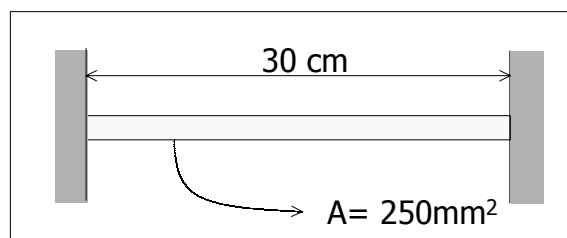
onde:

$\alpha \rightarrow$  coeficiente de dilatação térmica linear do material [ $1/^\circ\text{C}$ ]

$L \rightarrow$  comprimento inicial [m]

$\Delta T \rightarrow$  variação de temperatura [ $^\circ\text{C}$ ]

### Exercício



Uma barra é ajustada aos anteparos quando  $T = 25^\circ\text{C}$ .

Qual será a tensão na barra quando a temperatura for de  $100^\circ\text{C}$  ?

Dados:  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

## Exercícios Propostos:

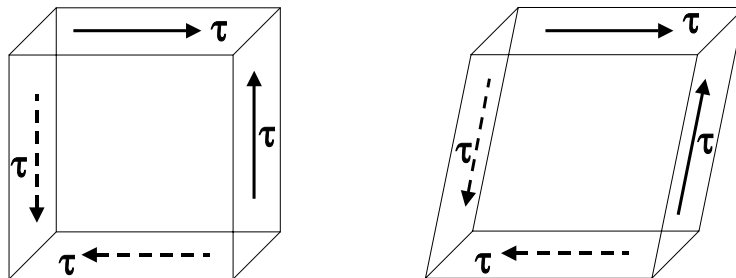
◆ 2.33 a 2.38

◆ 2.43 a 2.45

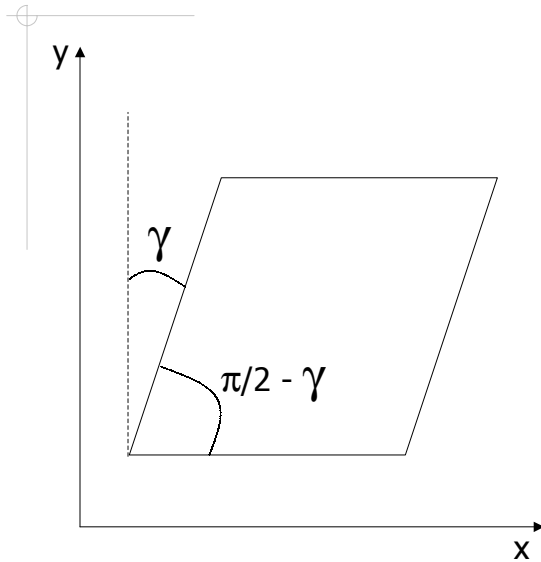
◆ 2.53 a 2.60

◆ 2.63 a 2.64

## 2.9 – Deformação de Cisalhamento



## 2.9 – Deformação de Cisalhamento



$$\tau = G \gamma$$

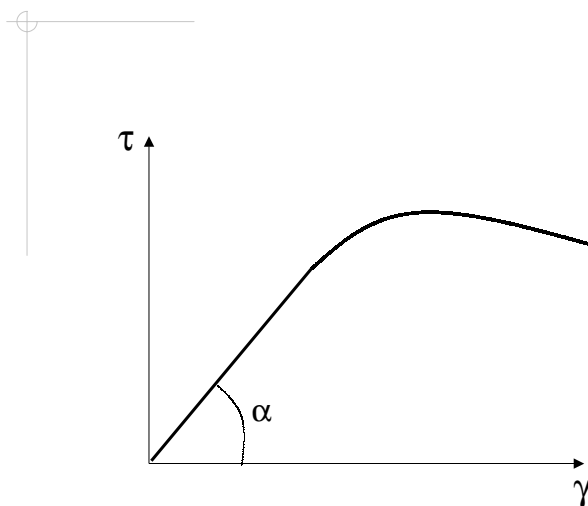
Lei de Hooke para o Cisalhamento, onde:

$\tau \rightarrow$  tensão de cisalhamento [ $\text{N/m}^2$ ]

$G \rightarrow$  módulo de elasticidade transversal [ $\text{N/m}^2$ ]

$\gamma \rightarrow$  deformação de cisalhamento [rd]

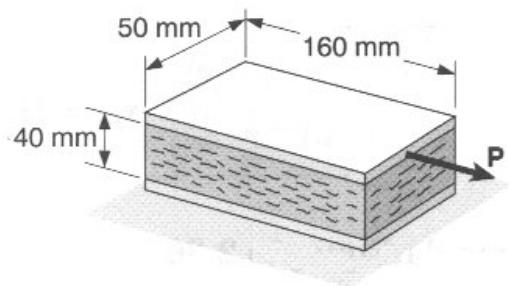
## 2.9 – Deformação de Cisalhamento



$$\tau = G \gamma$$

$$G = \text{tg } \alpha$$

## Exemplo 2.10



Material entre as placas:  
 $G = 600 \text{ MPa}$

Placa inferior é fixa.  
Placa superior desloca-se  
0,8 mm sob a ação de  $P$ .

Qual a deformação de cisalhamento no material?

Qual a força  $P$  que atua na placa superior?

## Exercícios Propostos:

◆ 2.82 a 2.87