

ESTIMATIVA DA PRECISÃO POSICIONAL UTILIZANDO AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES CLÁSSICO E LIVRE

Giuliano Sant'Anna Marotta
Antônio Simões Silva
Rômulo Parma Gonçalves
Rafael José de Oliveira Andrade
Leonardo Campos de Assis
Universidade Federal de Viçosa - UFV
Departamento de Engenharia Civil
Setor de Engenharia de Agrimensura
Av. PH Holfes, S/N - 36570-000 - Viçosa - MG, Brasil

RESUMO

O ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados (método paramétrico) vem sendo cada vez mais difundido, uma vez que a facilidade da realização de cálculos matriciais por meio computacional deixa de ser um processo lento e oneroso. No presente trabalho são estudadas três diferentes abordagens, uma para o ajustamento de observações convencional ou clássico, usando as clássicas injunções mínimas: posição, orientação e escala, de uma base inicial e duas outras abordagens usando as injunções internas. Estas injunções por não dependerem de amarrações externas são ditas como independentes do datum. São, portanto, injunções feitas de forma não tradicional, onde são dadas outras condições geométricas, conhecidas como injunções internas, e isso torna o ajustamento de observações assim efetuado conhecido como ajustamento livre. Para isto adota-se o método de Helmert, onde as equações de injunções aparecem margeando a equação normal. Com esse tipo de injunção não há dependência da posição do datum nem tampouco da sua precisão. Esse tipo de abordagem é muito útil quando os pontos de controle disponíveis têm qualidade inferior às observações. De posse dos resultados, concluiu-se que o ajustamento livre com quatro injunções para esse estudo de caso apresentou qualidade posicional melhor que as outras duas abordagens.

Palavras chaves: Ajustamento livre, Injunção interna, Qualidade posicional.

ABSTRACT

The adjustment of observations using the least squares method (parametric) has increased and become easier with the use of computer systems, thus the matrices calculus are not a time-consuming and high-cost processing procedure, anymore. In this work, three different methodologies are studied: one for conventional adjustment, using the classical minimum constraint – position, orientation and scale of initial base; and two others using inner constraint known as free adjustment. As these constraints are not dependent from external position and bearing they are considered datum independent. Therefore, they are not traditionally constrained and other geometrical conditions, known as inner constraint, are considered; that is why the adjustment of observations using such techniques is called free adjustment. For this procedure we adopt the Helmert's method, where the constraints equations border the reduced normal equation. Such constraints are independent from the datum position and its accuracy. This kind of procedure is very useful when the quality of the available control points is inferior to the observations. From the achieved results, we concluded that, for this case study, the free adjustment with four constrains resulted in a better positional quality comparing to the others two approaching.

Keywords: Free adjustment, Inner constraint, Positional quality.

1 INTRODUÇÃO

O ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados (método paramétrico) vem sendo cada vez mais difundido, uma vez que a

facilidade da realização de cálculos matriciais por meio computacional deixa de ser um processo lento e oneroso.

Diferentes metodologias envolvendo o método paramétrico são utilizadas para as diversas técnicas de levantamento de posição, onde se podem citar o ajustamento convencional e o ajustamento livre.

No ajustamento convencional, deve-se determinar a posição do datum através da fixação de pelo menos um par de coordenadas (fixar posição), uma direção (fixar rotação) e uma distância (fixar escala), para proporcionar a inversão da matriz normal (AtPA).

Quando não há a definição do datum o levantamento pode sofrer translação, rotação e mudança de escala, acarretando a singularidade da matriz normal e consequentemente tornando-a impossível de ser invertida

Neste caso para acabar com a singularidade da matriz normal usam-se as clássicas injunções mínimas citadas acima (um par de coordenadas, uma direção e uma distância) ou as injunções internas em que a singularidade é levantada com 3 ou 4 injunções, dependendo do tipo de observação disponível. Pode-se ainda não usar nem um tipo de injunção e inverter a matriz normal, mesmo singular, usando um tipo de inversa generalizada, a pseudoinversa ou matriz de Moore-Penrose.

Tanto o uso das injunções internas como o uso da matriz pseudoinversa são conhecidos como ajustamento livre.

Convém ressaltar que há ainda alguns profissionais que não conhecem a denominação do ajustamento livre (free adjustment) para o uso das injunções internas. É comum alguns ainda se prenderem ao conceito de ajustamento livre somente quando usam-se inversas generalizadas. Talvez o aparente pouco uso do ajustamento de observações leve esses profissionais ao desconhecimento do uso desse termo, ajustamento livre, para as injunções internas. Aparente pouco uso porque todos aqueles que lidam com processamento de observações GPS fazem ou deveriam fazer antes do ajustamento final dos vetores GPS um ajustamento livre nos moldes da injunção interna ou mesmo injunções mínimas (Wolf, 1996; Blewitt, 1996). Esse conceito de ajustamento livre de influências externas foi introduzido por Helmert em 1872. E por isso é também conhecido como método de

Helmert. Mesmo para levantamentos terrestres ou clássicos o termo ajustamento livre para se referir ao ajustamento com injunções internas já era usado por Mônico (1986). Silva (1997) e Dodson (1989) também se referem ao ajustamento livre quando tratam de injunções internas. Este uso de injunções internas como ajustamento livre se deve ao fato de após a inversão regular da matriz normal, aumentada com as devidas injunções internas, a parte da matriz inversa oriunda da matriz AtPA, ou seja, sua parte superior esquerda, ser igual a pseudoinversa (Cooper, 1987).

Assim como o ajustamento livre tem boa utilização no processamento GPS, o seu uso no Cadastro Técnico Multifinalitário é muitas vezes aconselhável. Nas determinações de posições utilizando equipamentos modernos, como a taqueometria eletrônica e o GPS, inseridos nas redes de referência cadastral municipal podem apresentar exatidão superior aos pontos de controle das redes de apoio e consequentemente, a rede municipal deve ser ajustada livremente, independente da rede de controle, eliminando a influência dos possíveis erros existentes naquela rede (Silva e Romão 2002)

2 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo possibilitar a comparação dos resultados entre a execução do ajustamento livre com injunções internas e do ajustamento de observações com as injunções clássicas (ajustamento clássico), aplicado ao levantamento topográfico de uma poligonal de cinco vértices como estudo de caso.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Os softwares utilizados na realização do presente trabalho foram: Maple 7 e Microsoft Excel 2003 nos cálculos do ajustamento e AutoCAD2006 para elaboração dos desenhos e figuras.

Foi realizado o levantamento de uma rede contendo 5 observações de ângulos horizontais horários e 6 observações de distâncias. Na Fig. 1 é mostrada a disposição da rede e o esquema das observações. Para o ajustamento clássico a posição do ponto 1 tem coordenadas com desvio padrão igual a 5mm.

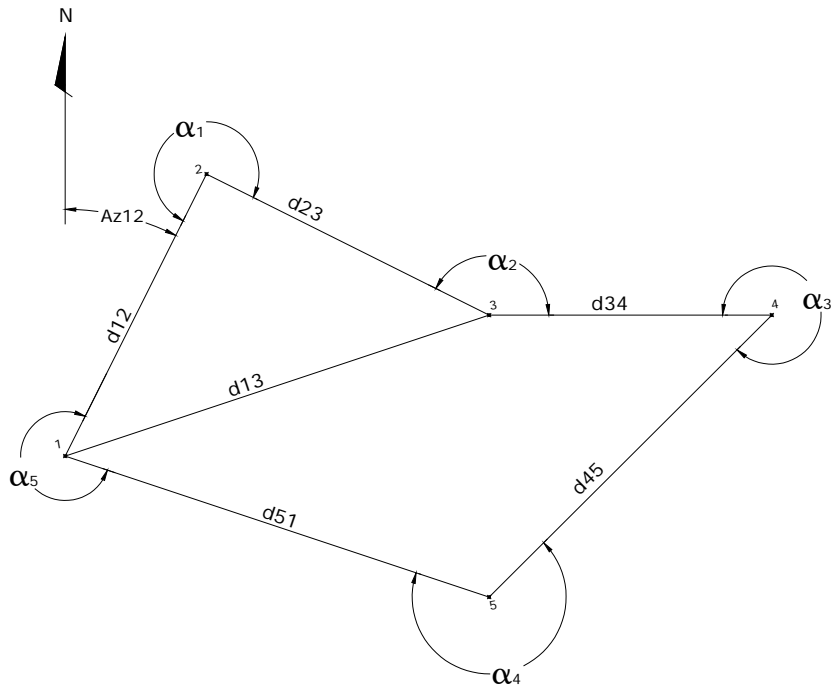


Fig1. Disposição da rede levantada e suas observações.

A metodologia utilizada engloba o ajustamento da rede pelo método convencional e pelo ajustamento livre com 3 injunções internas e com 4 injunções internas. De acordo com Cooper (1987), a quarta linha da matriz de injunção interna não necessita de ser usada no ajustamento, se todas as distâncias dos lados da poligonal forem observadas, mesmo assim fez-se para fins de estudo o uso da quarta linha da matriz de injunção. Ressalte-se aqui que o uso de somente 4 linhas na matriz de injunção é porque a rede analisada tem duas dimensões, ou seja, é planimétrica..

No ajustamento pelo método convencional, foram estabelecidas 14 equações de observação, cinco equações angulares segundo modelo da equação 1, seis equações de distância segundo modelo da equação 2, duas equações de coordenadas na forma das equações 3 e 4 e uma equação de direção na forma da equação 5.

$$\text{ang}_1 = \arctan\left(\frac{E_3 - E_1}{N_3 - N_1}\right) - \arctan\left(\frac{E_2 - E_1}{N_2 - N_1}\right) \quad (1)$$

$$d_{12} = \left[(E_2 - E_1)^2 - (N_2 - N_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$N_1 = N_1 \quad (3)$$

$$E_1 = E_1 \quad (4)$$

$$\text{az}_{12} = \arctan\left(\frac{E_2 - E_1}{N_2 - N_1}\right) \quad (5)$$

No ajustamento livre com injunções internas, a formulação das equações de observações somaram 11 equações, cinco equações angulares da forma da equação 1, seis equações de distância segundo equação 2. E ainda as equações de injunções internas.

Para elaborar as equações de injunções internas vamos usar a abordagem usada em Silva (1997) e considerar que na poligonal em estudo, de duas dimensões e portanto uma rede plana. Vamos ainda considerar que nesta rede as injunções de posição, orientação e escala não estão definidas pelas observações e portanto a deficiência de característica (ou posto) é quatro. Vamos assumir para um ponto P da rede as coordenadas E_p, N_p como valores iniciais. Se houver uma translação dX_o, dY_o , uma rotação $d\alpha$ e uma mudança de escala $(1 + ds)$ na rede, então as novas coordenadas do ponto P serão:

$$\begin{bmatrix} X_i + dX_i \\ Y_i + dY_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dX_o \\ dY_o \end{bmatrix} + (1 + ds) \begin{bmatrix} 1 & d\alpha \\ -d\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} dX_o \\ dY_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_i & X_i \\ 0 & 1 & -X_i & Y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_o \\ dY_o \\ d\alpha \\ ds \end{bmatrix} \quad (7)$$

As injunções internas de posição, orientação e escala são aplicadas em relação ao centróide da figura. Para definição desse centróide é necessário que os valores aproximados das coordenadas sejam

conhecidos. Assim se X_g e Y_g são as coordenadas do centróide e são calculadas por:

$$X_g = \frac{\sum X_i}{n}, Y_g = \frac{\sum Y_i}{n} \quad (8)$$

A injunção para translação é que a posição do centróide permaneça constante. Para isso a derivada de X_g e de Y_g são nulas, ou:

$$dX_g = 0, dY_g = 0 \quad (9)$$

e para que isso aconteça as derivadas dos numeradores da equação 8 serão iguais a zero.

$$\sum dX_i = 0, \sum dY_i = 0 \quad (10)$$

Estas injunções formarão as duas primeiras linhas das equações de injunções.

A terceira linha é formada com a injunção de rotação que estabelece que o azimute do centróide para cada ponto do levantamento permaneça constante. Se o azimute a partir do centróide para um ponto for A_{gi} então temos:

$$\tan A_{gi} = \frac{X_i - X_g}{Y_i - Y_g} \quad (11)$$

e derivando a 11 temos

$$dA_{gi} = \frac{[(Y_i - Y_g)(dX_i - dX_g) - (X_i - X_g)(dY_i - dY_g)]}{r_{gi}^2} \quad (12)$$

Que para permanecer constante, a derivada dos azimutes do centróide para os demais pontos deve ser nula, assim $\sum dA_{gi}$ deve ser nula ou $\sum dA_{gi} = 0$

$$\sum [(Y_i - Y_g)(dX_i - dX_g) - (X_i - X_g)(dY_i - dY_g)] = 0 \quad (13)$$

Que simplificando e usando as equações 8 e 9 fica:

$$\sum (Y_i dX_i - X_i dY_i) = 0 \quad (14)$$

Que é a terceira equação de injunção, ou injunção de orientação.

A quarta linha da matriz de injunções será para escala e é formada a partir da condição que a distancia média do centróide para cada ponto do levantamento permaneça constante.

$$r_{gi}^2 = (X_i - X_g)^2 + (Y_i - Y_g)^2 \quad (15)$$

A equação 15 representa a distância do centróide para um ponto do levantamento. Derivada essa equação fica:

$$dr_{gi} = \frac{[(X_i - X_g)(dX_i - dX_g) + (Y_i - Y_g)(dY_i - dY_g)]}{r_{gi}} \quad (16)$$

Para a distância media permanecer constante temos $dr_{gi} = 0$ e da equação 16 temos

$$\sum [(X_i - X_g)(dX_i - dX_g) + (Y_i - Y_g)(dY_i - dY_g)] = 0 \quad (17)$$

Que simplificando usando as equações 6 e 7 temos

$$\sum [X_i dX_i + Y_i dY_i] = 0 \quad (18)$$

A matriz das equações de injunções fica então:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_n & -X_n \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_n & Y_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

O que é o mesmo que:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ N_1 & -E_1 & N_2 & -E_2 & \dots & N_n & -E_n \\ E_1 & N_1 & E_2 & N_2 & \dots & E_n & N_n \end{bmatrix}$$

O sistema de equações de com injunções internas fica:

$$\begin{bmatrix} A^T P A & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A solução é obtida por

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P A & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A^T P L \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ou por

$$x = (A^T P A)^+ A P L \quad (22)$$

A ultima equação usa a inversa de Moore-Penrose para a inversão da equação normal, o que como foi dito, não é objeto deste trabalho.

Segundo Silva (1998) o uso das inversas generalizadas para observações heterogêneas como em

levantamentos topográficos (ângulos e distâncias) encontra dificuldades computacionais. Na solução para observações não homogêneas sugere-se usar matrizes regulares internamente injuncionadas que têm a singularidade removida e são de fácil inversão.

Desta forma a inversa da matriz da equação 21 é obtida sem dificuldades permitindo a estimativa do vetor das correções. A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados é a sub-matriz superior esquerda da matriz inversa da equação 21.

Em todos os 3 métodos de ajustamento empregados, foi adotado o critério de convergência em nível de milímetro, ou seja, fizeram-se iterações até as correções dos parâmetros se tornarem insignificantes (menores que 1 milímetro).

Para efeito de visualização da diferença entre os métodos foram calculadas e desenhadas as elipses de erros absolutas para cada vértice.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados a serem apresentados, possibilitam a comparação entre os dois métodos de ajustamentos já citados, que consistem no ajustamento de observações convencional e ajustamento livre com três e quatro injunções nesta ordem respectivamente. Na TABELA 1 e Fig. 2 são apresentados, respectivamente, os parâmetros ajustados e as elipses dos erros obtidas pelo método convencional.

TABELA 1: PARÂMETROS AJUSTADOS PELO AJUSTAMENTO CONVENCIONAL

Ajustamento de Observações Convencional							
Vértice	N (m)	Desvio Padrão (mm)	E (m)	Desvio Padrão (mm)	Elipses de Erro Absolutas		
					Semi-Eixo Maior (mm)	Semi-Eixo Menor (mm)	Azimute do S.E. Maior
1	10000,000	5,0	3350,000	5,0	5,0	5,0	Círculo
2	11000,021	11,5	3850,009	20,1	22,3	6,4	117°
3	10499,951	30,2	4849,988	11,4	31,6	6,5	342°
4	10499,906	50,5	5849,998	12,2	51,4	7,6	349°
5	9499,923	31,1	4849,978	12,1	32,8	6,4	19°

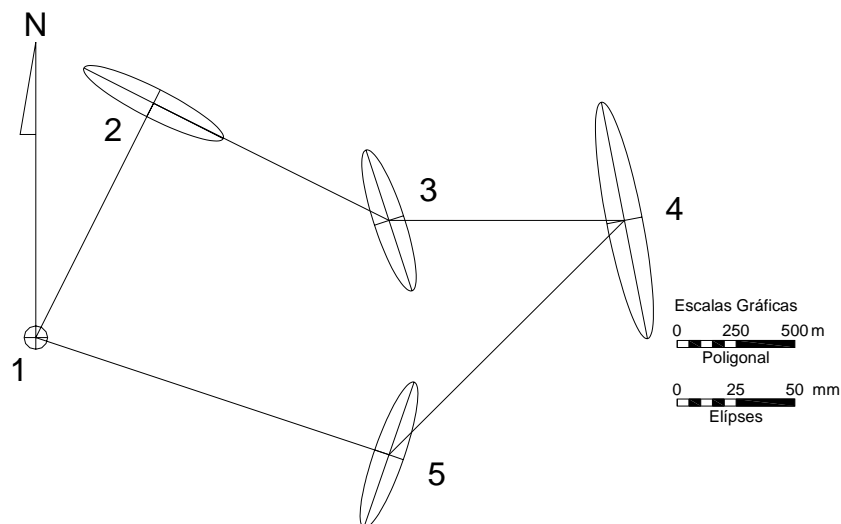


Fig. 2: Elipses de Erro Absolutas do Ajustamento Convencional

Na TABELA 2 e Fig. 3 são apresentados os parâmetros obtidos pelo ajustamento livre com três

injunções e as elipses dos erros obtidas, respectivamente.

TABELA 2: PARÂMETROS AJUSTADOS PELO AJUSTAMENTO LIVRE COM 3 INJUNÇÕES INTERNAS

Ajustamento de Observações Livre com 3 Injunções Internas							
Vértice	N (m)	Desvio Padrão (mm)	E (m)	Desvio Padrão (mm)	Elipses de Erro Absolutas		
					Semi-Eixo Maior (mm)	Semi-Eixo Menor (mm)	Azimute do S.E. Maior
1	10002,517	126,3	3349,214	33,4	130,6	2,1	345°
2	11001,428	71,8	3851,438	72,9	102,3	3,4	45°
3	10499,143	32,9	4850,307	21,4	39,1	3,2	327°
4	10496,881	137,7	5850,313	24,0	139,8	2,0	350°
5	9499,117	27,9	4848,080	84,8	89,2	3,3	72°

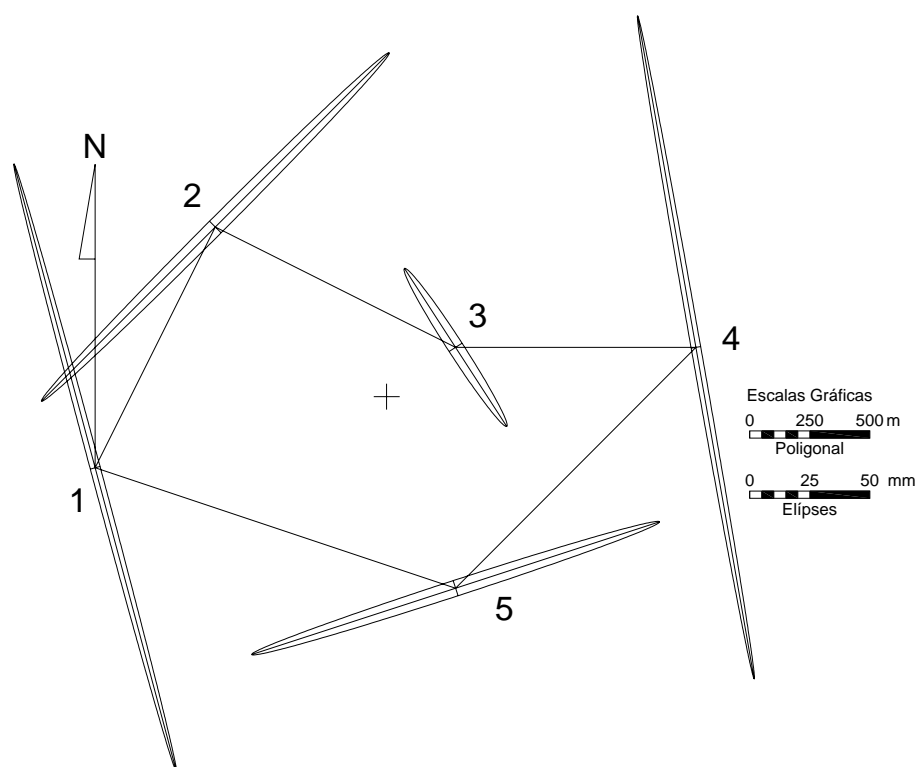


Fig. 3: Elipses de Erro Absolutas do Ajustamento Livre com 3 Injunções

Na TABELA 3 e Fig. 4 são apresentados os parâmetros obtidos pelo ajustamento livre com quatro injunções e as respectivas elipses dos erros.

TABELA 3: PARÂMETROS AJUSTADOS PELO AJUSTAMENTO LIVRE COM 4 INJUNÇÕES INTERNAS

Ajustamento de Observações Livre com 4 Injunções Internas							
Vértice	N (m)	Desvio Padrão (mm)	E (m)	Desvio Padrão (mm)	Elipses de Erro Absolutas		
					Semi-Eixo Maior (mm)	Semi-Eixo Menor (mm)	Azimute do S.E. Maior
1	10000,002	4,0	3349,878	2,6	4,4	1,9	332°
2	10999,994	2,3	3849,988	4,9	5,0	2,2	81°
3	10499,790	4,8	4849,884	2,7	4,9	2,7	352°
4	10499,622	3,3	5849,838	2,1	3,4	2,0	347°
5	9499,677	2,8	4849,766	4,8	4,9	2,8	98°

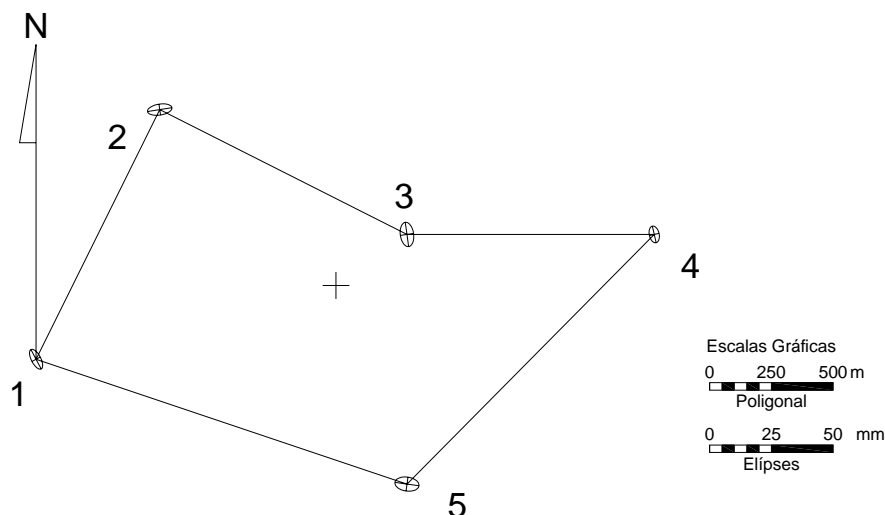


Figura 4: Elipses de Erro Absolutas do Ajustamento Livre com 4 Injunções

Como se pode notar pelos valores resultantes das precisões o ajustamento livre com 4 injunções internas é o que oferece melhor resultado. Em seguida vem o ajustamento usando as injunções mínimas (clássico) e por fim o ajustamento livre com somente 3 injunções internas.

Convém notar que seria de se esperar que o ajustamento com as 3 injunções internas (2 de posição e um de orientação) fosse melhor que aquele com injunções clássicas. Neste caso deve-se verificar quais as variâncias das distâncias (o desvio padrão das distâncias é em torno de 4,5mm). Porque elas é que influenciam na no resultado do ajustamento com somente 3 injunções internas. Se tiramos a quarta linha da matriz de injunções internas, que na prática funciona como uma pseudo observação de variância nula e toda injunção de escala corre para as distâncias observadas com a variância vista acima, a nossa expectativa deverá mudar. Note que a vantagem do ajustamento livre é justamente livrar-se das influencias externas. Ao deixar a qualidade das distâncias observadas ditarem regras no ajustamento esse sofre na sua qualidade. Nesse sentido é bem melhor para esse e para outros casos que ao optar-se pelo ajustamento livre que essa opção seja total. Pode-se fazer ressalva se usássemos as distâncias observadas com variância nula.

5 CONCLUSÃO

Foi feito um estudo de caso onde se usou injunções clássicas (no caso mínimas) e injunções internas com quatro e três injunções.

Verificou-se que o ajustamento livre com injunções internas totais apresenta melhor resultado e que o uso de injunções internas parciais apresenta o pior resultado.

Note que além da melhora na qualidade do ajustamento livre, as precisões dos vértices independem das distancias destes ao ponto fixo. Essa dependência é muito evidente no ajustamento com injunções clássicas. Note que o vértice 4 é o que tem maior variância após o ajustamento. Usando as mesmas observações e empregando o ajustamento livre nota-se que este vértice tem precisão até melhor que os vértices mais próximos do vértice origem.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BLEWITT, G., 1996, GPS data processing methodology: from theory to applications. In KLEUSBERG, A. TEUNISSEN, P. GPS for Geodesy. Verlag, Berlin, . p 231-270
- COOPER, M. A. R., 1987, Control Surveys in Civil Engineering, Collins, London, 381pp
- CROSS, P., 1983, Advanced Least Squares Applied to Position-Fixing, Working Paper No. 6 London: Series Editor: A S Walker, North East London Polytechnic, Department of Land Surveying,.
- DODSON, A. H., 1991, analysis of control networks and their application to deformation monitoring. In KENNIE, T. J. M. Engineering Survey Technology London: Black and Son Ltd.
- MONICO, J. F. Galera, 1986, Ajustamento Livre, Seminário do Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas, UFPR, Curitiba, Brasil, 29pp
- SILVA, A. Simões, 1997, **Optimisation of surveying monitoring networks**. PhD Thesis. Institute of Engineering Surveying and Space geodesy, University of Nottingham, United Kingdom , 168pp

SILVA, A. S.; J. GRIPP JR, 1996, Porque Ajustamento livre, In Anais do VII Congresso Nacional de Engenharia de Agrimensura, Salvador – BA, Brasil, pp. 111-113.

SILVA, A. S. ; V. M. C. ROMÃO, 2002, Ajustamento Livre e Cadastro. In Anais do 5º Congresso Brasileiro

de Cadastro Técnico Multifinalitário - COBRAC, Florianópolis – SC, Brasil, pp. 1-5.

WOLF, P.R.; C. D. GHILANI, 1996, Adjustment Computations: statistics and least squares in surveying and GIS, John Wiley and Sons, New York – USA, 564 pp