

DETERMINAÇÃO DA PRECISÃO POSICIONAL NA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE SISTEMAS DE REFERÊNCIA TERRESTRE

Rômulo Parma Gonçalves
Giuliano Sant'Anna Marotta
Rafael José de Oliveira Andrade
Leonardo Campos de Assis

Mestrandos em Engenharia Civil - Informações Espaciais
Departamento de Eng.^a Civil, Setor de Eng.^a Agrimensura, Universidade Federal de Viçosa
Avenida PH Rolfs, S/N- Campus Universitário, CEP 36.570-000, Viçosa, MG, Brasil.
{romuloparma, giumarotta, rafaeljoaufv, assis_leonardo}@yahoo.com.br

Dalto Domingos Rodrigues

Doutor em Engenharia de Transportes – Informações Espaciais
Departamento de Eng.^a Civil, Setor de Eng.^a Agrimensura, Universidade Federal de Viçosa
dalto@ufv.br

Resumo – Atualmente grande parte dos levantamentos topográficos vem sendo realizada em diversos sistemas de referência terrestre, como WGS84, SIRGAS2000, SAD69 e outros. A ocorrência desses diferentes tipos de sistemas mais comumente utilizados é devido ao aperfeiçoamento das técnicas de mensuração, cálculos e determinação dos parâmetros utilizados na modelagem matemática da superfície física da Terra (Elipsóide). O objetivo deste trabalho foi aplicar a propagação de variâncias na translação entre sistemas levando em consideração os erros inerentes às observações posicionais e os erros referentes aos parâmetros de transformação. Pôde-se notar que ao considerar os erros desses parâmetros, a precisão das coordenadas transformadas foram degradadas consideravelmente, mostrando assim a importância de levar em consideração todos os erros incluídos no processo de cálculo de transformação entre sistemas distintos.

Palavras-chave – Propagação de Variâncias, Transformação de Coordenadas, Sistemas de Referência, Precisão Posicional.

Abstract – Now days, most of the topographic surveying has been realized in several terrestrial reference systems, like WGS84, SIRGAS2000, SAD69 and others. The occurrence of these different kind of systems more commonly used is due to the improvement of the surveying techniques, calculus and determination of the used parameters on the mathematical modeling of the physical surface of Earth (Ellipsoid). The objective of this work was to apply the variance propagation on the translation between systems taking into account the inherent positional observation errors and transformation parameters errors. It could be verified that when these parameters errors were considered in the calculus, the transformed coordinates precision made worse considerably, showing the importance of take into consideration all the errors included into the translation calculus between different systems.

Key-words – Variance Propagation, Coordinate Transformation, Reference Systems, Positional Precision.

1 - INTRODUÇÃO

Como nos dias atuais a tecnologia de posicionamento vem passando por uma evolução consideravelmente elevada, é possível notar que novas técnicas estão surgindo e revolucionando a área de atuação dos profissionais que trabalham com levantamentos topográficos, geodésicos, fotogramétricos, batimétricos, etc.

Já que cada vez mais, os instrumentos de medida estão proporcionando melhores precisões nas observações, torna-se necessário calcular também as precisões dos valores estimados a partir dessas observações. Para isso, existem métodos estatísticos simples como o

de propagação de variâncias, mas que nem sempre são abordados nas plataformas de cálculo de transformação entre sistemas mais comuns.

Embora o recomendável e correto seja verificar, calibrar e obter a precisão efetiva de um instrumento de medição; é uma prática comum usar a precisão nominal dos instrumentos ao se realizar medidas e levantamentos de observações brutas, pois a dificuldade em se repetir inúmeras vezes a mesma medida para realizar o ajustamento pode se tornar uma tarefa laboriosa.

Se tratando de medidas de grandezas posicionais, podemos afirmar que estamos tratando de precisão ou acurácia e não de exatidão, pois não se pode conhecer a verdadeira grandeza de um ponto ou de uma distância por exemplo, mas sim o valor mais provável daquela medida. Portanto a precisão pode ser representada pela variância ou pelo desvio-padrão, que tem a mesma unidade do parâmetro.

Para produção de cartas e mapas através da realização de levantamentos, em caráter oficial para fins legais diversos, no Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), é necessário que as coordenadas estejam relacionadas a um sistema de referência oficial, atualmente aceito no Brasil, - SAD69 ou SIRGAS2000 - sendo este último, equivalente ao WGS84 (sistema de referência utilizado pelo posicionamento por Satélites GPS) para fins de engenharia, segundo o IBGE.

Além da representação de características por meio das coordenadas geodésicas (Latitude, Longitude e Altura Geométrica), tem sido requisitada por inúmeras entidades (órgãos gestores, pessoas físicas e jurídicas) e para diversos propósitos (p. ex. engenharia, agricultura), a representação cartográfica em uma projeção plana. Atualmente, a mais utilizada é, sem dúvida, a Projeção UTM com coordenadas Este e Norte, referenciadas a um meridiano central ou a um fuso e ao hemisfério.

Serão mostradas neste trabalho, as diferenças obtidas nas precisões de coordenadas calculadas com e sem a propagação de variâncias, onde poderá ser notada amplitude desta diferença.

2 - OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo, propagar as variâncias das coordenadas de um ponto num sistema de referência terrestre para outro distinto, permitindo-se assim a verificação da importância destes cálculos e a comparação entre as precisões nos dois sistemas, quando da utilização das coordenadas transformadas.

3 - METODOLOGIA E RESULTADOS

Visto que a lista de elipsóides existentes é superior a uma centena de valores e devido à diversidade de elipsóides, a definição de coordenadas de pontos deve ser muito cuidadosa, uma vez que a coordenada de um ponto varia de elipsóide para elipsóide (Segantine, 2005), então para o caso deste trabalho, serão apresentados na Tabela 1 alguns dos que são ou já foram oficiais no Brasil.

Tabela 1: Elementos definidores do elipsóide terrestre (adaptada de Segantine, 2005)

Elipsóide	Sistema de Referência	Semi-eixo maior (m)	Semi-eixo menor (m)	f	$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$
Hayford ⁵⁰ (1909)	Córrego Alegre	6.378.388	6.356.911,946	1/297	0,0819918888
GRS (1967)	SAD 69	6.378.160	6.356.744,719	1/298,25	0,08182018075
GRS (1980)	SIRGAS2000 (WGS 84)	6.378.137	6.356.752,314	1/298,257223563	0,08181918994

Para obter resultados que possibilitem a comparação entre as precisões adquiridas utilizando dois ou mais sistemas de referência terrestre diferentes, se faz necessário o conhecimento dos parâmetros de translação entre esses sistemas, disponíveis em Cordini, et. al. (1998); RPR 01/2005 – IBGE e apresentados na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros de translação entre sistemas de referência

De	Para	ΔX (m)	ΔY (m)	ΔZ (m)
SAD69	SIRGAS2000 (WGS84)	-67,35	3,88	-38,22
SIRGAS2000 (WGS84)	SAD69	67,35	-3,88	38,22
SAD69	CÓRREGO ALEGRE	138,70	-164,40	-34,40
CÓRREGO ALEGRE	SAD69	-138,70	164,40	34,40
CÓRREGO ALEGRE	SIRGAS2000 (WGS84)	-206,05	168,28	-3,82
SIRGAS2000 (WGS84)	CÓRREGO ALEGRE	206,05	-168,28	3,82

Para estudo de caso, foram escolhidas as coordenadas ajustadas de um ponto localizado no sul de Minas Gerais na cidade de Aiuruoca no sistema WGS84, como apresentado nas equações (1), (2) e (3).

$$\varphi_{\text{WGS84}} = 22^{\circ}04'48,38514'' \pm 0,006 \text{ m} \quad (1)$$

$$\lambda_{\text{WGS84}} = 44^{\circ}39'09,44674'' \pm 0,022 \text{ m} \quad (2)$$

$$H_{\text{WGS84}} = 1447,605 \text{ m} \pm 0,049 \text{ m} \quad (3)$$

Como pode-se notar, os valores de latitude (φ) e longitude (λ), são ambos dados em graus, minutos e segundos e os seus respectivos desvios padrão em metros. Para que possa ter uma noção de que amplitude linear se pode obter através de um valor angular na superfície terrestre, é apresentada a Tabela 3.

Tabela 3: Variações aproximadas nas grandezas de distância na superfície terrestre

Ângulo	Distância aproximada em metros
1°	111133
1'	1852
1''	31
0,1''	3
0,01''	0,3
0,001''	0,03
0,0001''	0,003
0,00001''	0,0003

Primeiramente necessita-se fazer uma transformação de coordenadas, de geodésicas $(\lambda, \varphi, h)_{\text{WGS84/SIRGAS2000}}$ para cartesianas $(X, Y, Z)_{\text{WGS84/SIRGAS2000}}$ no mesmo sistema de referência utilizando os parâmetros do elipsóide de referência GRS80, como apresentado nas equações (4), (5) e (6).

$$X_{\text{WGS84}} = 4207460,686 \text{ m} \pm 0,036 \text{ m} \quad (4)$$

$$Y_{\text{WGS84}} = -4156749,088 \text{ m} \pm 0,036 \text{ m} \quad (5)$$

$$Z_{\text{WGS84}} = -2383179,138 \text{ m} \pm 0,019 \text{ m} \quad (6)$$

Para que se conheça então as coordenadas deste ponto em outro sistema, é suficiente que, ignoradas as transformações de rotação e fator de escala que fogem do escopo deste

trabalho, se faça então somente as devidas translações utilizando as equações (7) (8) e (9) e apresentando-se os resultados nas equações (10) (11) e (12).

$$X_{SAD69} = X_{WGS84} + \Delta X \quad (7)$$

$$Y_{SAD69} = Y_{WGS84} + \Delta Y \quad (8)$$

$$Z_{SAD69} = Z_{WGS84} + \Delta Z \quad (9)$$

$$X_{SAD69} = 4207528.036 \text{ m} \quad (10)$$

$$Y_{SAD69} = -4156752.968 \text{ m} \quad (11)$$

$$Z_{SAD69} = -2383140.918 \text{ m} \quad (12)$$

Deve-se então propagar as variâncias da transformação, já que as coordenadas em WGS84 possuem um desvio padrão diferente de zero. Há também incerteza nos parâmetros de transformação conforme a Resolução 23/89 do IBGE, onde encontram-se estes desvios padrão na translação do sistema geocêntrico WGS84 para o sistema topocêntrico SAD69, que são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros de translação com seus respectivos desvios padrão

WGS84 → SAD69			
ΔX (m)	66,87	σ_x (m)	$\pm 0,43$
ΔY (m)	-4,37	σ_y (m)	$\pm 0,44$
ΔZ (m)	38,52	σ_z (m)	$\pm 0,40$

Conforme pôde ser observado, os parâmetros de translação são diferentes nas Tabelas 3 e 4, apesar de serem referentes a transformações entre os mesmos sistemas, os parâmetros da Tabela 3 são os oficiais atualmente no Brasil, conforme Resolução 01/2005 do IBGE.

Sabendo que toda observação gera incertezas, não se conhece o fato de a Resolução atual omitir os desvios padrão apresentados na Resolução 23/89 também do IBGE.

Para que se possa então propagar as variâncias na translação entre os sistemas de referência, serão utilizadas as incertezas apresentadas na Tabela 4.

Se Y_1 é função dos elementos X_1 e X_2 , dada por $Y_1 = f_1(X_1, X_2)$, então a variância de Y_1 é dada por:

$$\sigma_{Y_1}^2 = \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_{X_2}^2 + 2 \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \right) \sigma_{X_1 X_2} \quad (13)$$

Se outro elemento Y_2 é também função de X_1 e X_2 , dada por $Y_2 = f_2(X_1, X_2)$, então:

$$\sigma_{Y_2}^2 = \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} \right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)^2 \sigma_{X_2}^2 + 2 \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right) \sigma_{X_1 X_2} \quad (14)$$

Logo, a covariância dos valores derivados para Y_1 e Y_2 é expressa por:

$$\sigma_{Y_1 Y_2} = \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} \right) \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right) \sigma_{X_2}^2 + \left[\left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right) + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \right) \left(\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} \right) \right] \sigma_{X_1 X_2} \quad (15)$$

Segundo Fonte (1994), conhecida a matriz de covariância das observações pode-se depois determinar as matrizes de covariância dos resíduos das correções a adicionar aos parâmetros e observações ajustadas através da fórmula de propagação de variâncias apresentada na equação (16).

$$C_{XYZ} = D \cdot C_{obs} \cdot D^T \quad (16)$$

Conforme a lei de propagação das variâncias, D, C_{obs} e C_{XYZ} têm a forma das equações (17), (18) e (19) respectivamente:

$$D = \frac{\partial F(Xa)}{\partial La} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial X} & \frac{\partial X}{\partial Y} & \frac{\partial X}{\partial Z} & \frac{\partial X}{\partial \Delta X} & \frac{\partial X}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial X}{\partial \Delta Z} \\ \frac{\partial Y}{\partial X} & \frac{\partial Y}{\partial Y} & \frac{\partial Y}{\partial Z} & \frac{\partial Y}{\partial \Delta X} & \frac{\partial Y}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial Y}{\partial \Delta Z} \\ \frac{\partial Z}{\partial X} & \frac{\partial Z}{\partial Y} & \frac{\partial Z}{\partial Z} & \frac{\partial Z}{\partial \Delta X} & \frac{\partial Z}{\partial \Delta Y} & \frac{\partial Z}{\partial \Delta Z} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$C_{obs} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_Z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta X}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Y}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\Delta Z}^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C_{XYZ} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Os resultados podem ser observados nas equações (20), (21) e (22):

$$\sigma_{X_{SAD69}} = 0,431m \quad (20)$$

$$\sigma_{Y_{SAD69}} = 0,441m \quad (21)$$

$$\sigma_{Z_{SAD69}} = 0,400m \quad (22)$$

4 - CONCLUSÕES

Conclui-se que ao deixar de se propagar variâncias na transformação entre sistemas de referência terrestre como no caso ilustrado, pode-se ocasionar grandes problemas, já que as incertezas em um dado sistema podem ser ainda maiores quando propagadas para outro.

Notou-se que os desvios padrão no sistema WGS84 (SIRGAS2000) tiveram um considerável aumento de mais de dez vezes quando representados no sistema SAD69. Isso pode ocasionar problemas ainda maiores, visto que nas normas vigentes sobre georreferenciamento, o maior desvio padrão permitido para um dado ponto é da ordem de 500 milímetros.

Neste trabalho, pôde-se observar que essas incertezas que eram menores que 100 milímetros no sistema WGS84, quase ultrapassaram o limite estabelecido na legislação quando transformados para o sistema SAD69 e propagadas as variâncias.

Ressalta-se então a importância de se conhecer e propagar as incertezas posicionais de um marco ou ponto na superfície terrestre, gerando-se assim uma maior segurança quanto a valores o mais próximo possível do desvio padrão real.

5 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR et. al. **Transformação de coordenadas e Datum com propagação de covariâncias**. Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática, Presidente Prudente - SP, 9-13 de julho de 2002. p.113-120.

CASTRO et. al. Estimativa de parâmetros de transformação entre sistemas geodésicos: estudo do caso SAD69 e SIRGAS. Anais do CBCG 2002.

COOPER, M. A R., (1987) **Control surveys in civil engineering**, London:Collins,380p.

CORDINI et. al. Transformações de Referenciais Geodésicos. Anais do COBRAC, 1998.

CROSS, P.A., (1983) *Advanced least squares applied to position-fixing*. – Working paper series. Ed. A S. Walker, Department of Land Surveying, North East London Polytechnic. 204p.

DMA. The Universal Grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS). DEFENSE MAPPING AGENCY. Washington, 1989.

FONTE, C. M. P. C. **Ajustamento de observações utilizando o método dos mínimos quadrados**. 48 p. Universidade de Coimbra. 1994. Acesso em 22 mai. 2006.

GEMAEL, Camil. Introdução ao Ajustamento de Observações - Aplicações Geodésicas. Editora UFPR. Curitiba, 1994. 319p.

GEMAEL, Camil., ANDRADE, J. B. Geodésia Celeste. Editora UFPR. Curitiba, 2004. 319p.

IBGE. Resolução e PR nº 01, de 25-02-2005. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 1989.

IBGE. Resolução e PR nº 23, de 21-02-89. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro, 1989.

INCRA. Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais. Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária, Superintendência Nacional de Desenvolvimento Agrário, Coordenação Geral Técnica, Divisão de Obtenção e Destinação. Brasília, 2003.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo. Editora Unesp, 2000

RODRIGUES, D. D. **Notas de aula**. Apostila. Curso de Engenharia de Agrimensura, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal de Viçosa.

SEGANTINE, P.C.L. GPS Sistema de Posicionamento Global. EESC/USP – São Carlos, 2005. 364p.

SILVA, A. S. Ajustamento pelos mínimos quadrados em ciências geodésicas. 87 p. Apostila. Curso de Engenharia de Agrimensura, Departamento de Engenharia Civil. Universidade Federal de Viçosa 2002.